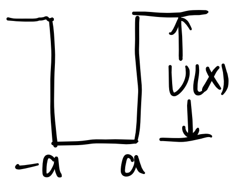
第三章 波动力学I —— 一维定态问题

(量子物理应用I)

§3.1 一维无穷深势阱

(1) 物理体系



$$U(x)=\begin{cases}+\infty & x>a,\ x<-a\\ 0 & -a\le x\le a\end{cases}$$

求解薛定谔方程，得到粒子状态波函数ψ

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=\hat{H}\psi$$

$\hat{H}\phi=E\phi$ 定态薛定谔方程

(2) 求解过程

第一步 分区域写下定态薛定谔方程

$$\hat{H}\phi=E\phi \qquad \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+U(x)\right]\phi=E\phi$$

$$\begin{cases}-\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{d^2\phi}{dx^2}=E\phi & \text{阱内}\\[2mm] \left[-\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{d^2\phi}{dx^2}\right.+\infty\cdot\phi=E\phi & \text{阱外}\end{cases}$$

第2步 求出该方程通解

阱内 $\dfrac{d^2\phi}{dx^2}+\dfrac{2mE}{\hbar^2}\phi=0$ 令 $k=\sqrt{\dfrac{2mE}{\hbar^2}}$ $(k\geq0)$ 阱外 $\phi=0$

其通解 $\phi=A\cos kx+B\sin kx$

第3步 根据边界条件定积分常数

波函数在$[-a,a]$连续

$$\left.\begin{cases}\phi(x=-a)=0 & A\cos ka-B\sin ka=0\\ \phi(x=a)=0 & A\cos ka+B\sin ka=0\end{cases}\right\}\Rightarrow\begin{cases}A\cos ka=0\\ B\sin ka=0\end{cases}$$

当 B=0时 $\cos ka=0$ $k=\dfrac{(n+\frac{1}{2})\pi}{a}$ $n\in 0,1,2\cdots$

此时 $E=\dfrac{k^2\hbar^2}{2m}=\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{(n+\frac{1}{2})^2\pi^2}{a^2}=\dfrac{\hbar^2(n+\frac{1}{2})^2\pi^2}{2ma^2}$ $n=0,1,2\cdots$

$$\phi=A\cos kx=A\cos\frac{(n+\frac{1}{2})\pi}{a}x$$

当 A=0时 $\sin ka=0$ $k=\dfrac{n\pi}{a}$ $n=0,1,2\cdots$

此时 $E=\frac{k^2\hbar^2}{2m}=\frac{n^2\hbar^2\pi^2}{2ma^2}$ $\quad n=0,1,2\cdots$

$\phi=B\sin kx=B\sin\frac{n\pi}{a}x$

当 $A\neq0$ 且 $B\neq0$ 时 $\cos ka$ 与 $\sin ka$ 不可能同时为零 ∴不存在其它情况

$\hat{H}\phi=E\phi$ 能量的本征方程

能量算符 函数 能量本征值 函数

统一在一起表示

能量本征值 $E=\frac{n^2\hbar^2\pi^2}{8ma^2}$

能量本征函数 $\phi(x)=C\sin\left[\frac{n\pi(x+a)}{2a}\right]$

归一化条件 $\int_{-a}^{a}|\phi(x)|^2dx=1$

$\int_{-a}^{a}\left|C\sin\left(\frac{n\pi x}{2a}+\frac{n\pi}{2}\right)\right|^2dx=1 \qquad C=\sqrt{\frac{1}{a}}$

例：已知一个电子束缚在一组盒子中，其基态能量为 34eV 求第一激发态能量

解： 能量 $E\sim n^2$ $\quad E=\frac{n^2\hbar^2\pi^2}{8ma^2}$

基态 $E_1=34\,eV$ $\quad (n=1)$

第一激发态 $E_2=136\,eV$ $\quad (n=2)$

Example：一个质量为 m 的电子被束缚在一维盒子中 $(0\le x\le a)$ 已知在初始时刻，该电子的波函数为 $\psi(x,t=0)=\sqrt{\frac{8}{5a}}\left(1+\cos\frac{\pi x}{a}\right)\sin\frac{\pi x}{a}$ 试问

(1) 后来某个时刻 t 波函数是多少

(2) t 时刻 该电子的能量可能是多少

(3) 在 t 时刻 在盒子左半部找到该电子的几率

已知 能量本征值 $E=\frac{n^2\hbar^2\pi^2}{8ma^2}$ 能量本征函数 $\phi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$

解：

$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \hat{H}\psi$　　　能量本征值　$E_n=\frac{n^2\hbar^2\pi^2}{8ma^2}$

$\hat{H}\phi = E\phi$　　　能量本征函数　$\phi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$

(1) 初始时刻　$\psi(x,t=0)=\sqrt{\frac{8}{5a}}\left(1+\cos\frac{\pi x}{a}\right)\sin\frac{\pi x}{a}$

$$=\sqrt{\frac{4}{5}}\cdot\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{\pi x}{a}+\sqrt{\frac{1}{5}}\cdot\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{2\pi x}{a}$$

$$=\sqrt{\frac{4}{a}}\,\phi_1(x)+\sqrt{\frac{1}{5}}\,\phi_2(x)$$

t时刻　$\psi(x,t)=\sqrt{\frac{4}{5}}e^{-\frac{iE_1t}{\hbar}}\cdot\phi_1(x)+\sqrt{\frac{1}{5}}e^{-\frac{iE_2t}{\hbar}}\phi_2(x)$

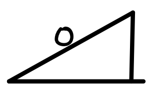
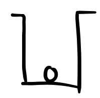
(2)　可能处在第一波函数 ϕ_1　能量为 E_1

可能处在第二波函数 ϕ_2　能量为 E_2

(3)　$P=\int_0^{\frac{a}{2}}|\psi(x,t)|^2dx=\int_0^{\frac{a}{2}}\left|\sqrt{\frac{4}{5}}e^{-\frac{iE_1t}{\hbar}}\phi_1(x)+\sqrt{\frac{1}{5}}e^{-\frac{iE_2t}{\hbar}}\phi_2(x)\right|^2dx$

$$=\frac{1}{2}+\frac{16}{15\pi}\cos\left(\frac{3\pi^2\hbar}{2ma^2}t\right)$$

小结 (1)

	牛顿力学	量子物理
典型例子		
解题思路	第1步 受力分析	第1步 分区域写下定态薛定谔方程 $\hat{H}\phi=E\phi$
	第2步 分方向 写下 $F=ma$	第2步 写下通解
	第3步 求出 a 代入初始条件	第3步 根据边界条件定未知常数
	→ r → 求出其他物理量	→ ϕ_n 本征函数 → 波函数 $\psi=\sum_n C_n\phi_n\cdot f_n$
		→ 其他物理量

(2) 求解　$\hat{H}\phi=E\phi$　　能量本征方程

结果　E_n　　能量本征值　$E_n=\frac{n^2\hbar^2\pi^2}{8ma^2}$

ϕ_n　　能量本征函数　$\sqrt{}\ \sin\frac{n\pi(x+a)}{}$

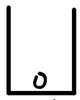
$\phi_n(x)=\sqrt{\frac{1}{a}}\sin[\frac{\cdots}{2a}]$

n 能量量子数

Dirac记号 $|n\rangle$ 代表能量本征函数/本征态

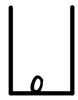
(3) 能量本征值 $E_n=\frac{n^2\hbar^2\pi^2}{8ma^2}\propto n^2$, $(n=1,2,\cdots)$

经典



E可取任意连续值

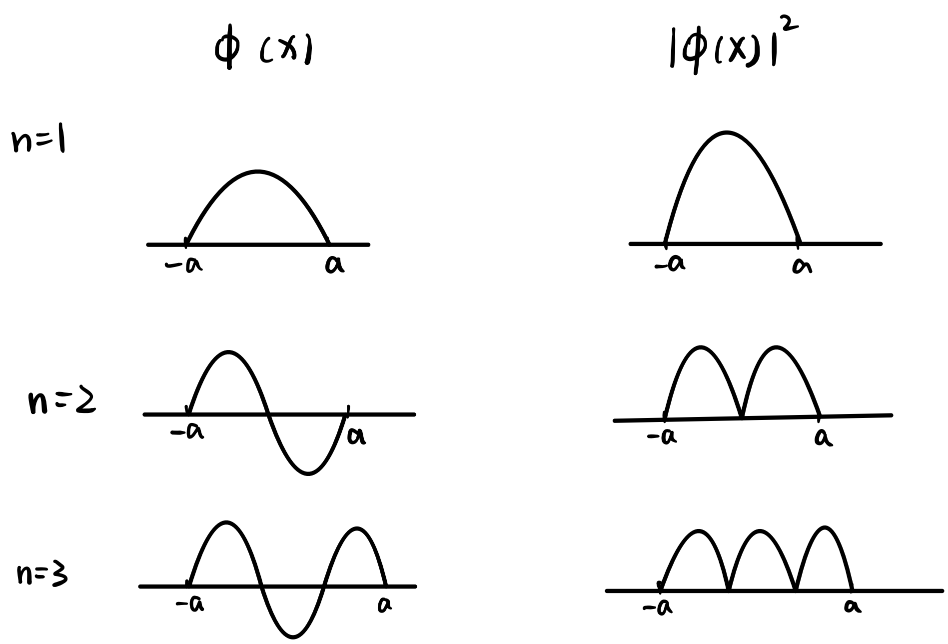
量子



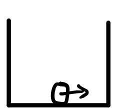
E只能取分立值 E_n $E_n\propto\frac{1}{a^2}$

当 $a\to\infty$ $E\to$连续值 回到经典情况

(4) 能量本征函数 $\phi_n(x)=\sqrt{\frac{1}{a}}\sin[\frac{n\pi(x+a)}{2a}]$



经典

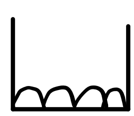


来回往复运动

在阱内每一点出现几率相同

量子

$|n\rangle$



几率有n个峰

在这些峰处出现几率大，在其他各处出现几率小

当 $n\to\infty$ 时 峰密集 几率在各处都一样且连续 回到经典情况

(5) 薛定谔方程 $i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=\hat{H}\psi$

$\downarrow$

定态薛定谔方程 $\hat{H}\phi=E\phi$

(能量本征方程)

$$\psi = f\cdot\phi = e^{-\frac{iEt}{\hbar}}\phi$$

由叠加原理可得：任意波函数 $\psi = \sum_n C_n \phi_n f_n$

任意时间波函数 $\psi = \sum_n C_n e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}} \phi_n$

(6) 实际体系

二维势阱

第1步 分区域 $\hat{H}\phi = E\phi$

$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\phi = E\phi$ 阱内 $U=0$

$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U\right]\phi = E\phi$ 阱外 $U=\infty$

第2步 写出通解 (简单三角函数)

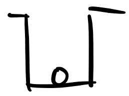
第3步 根据边界条件定未知系数

§ 3.2 量子隧穿问题

(1)

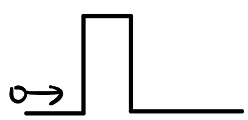
牛顿力学	量子物理	
斜面	势阱	束缚态问题
碰撞	势垒	散射态问题

将粒子束缚在一个区域内 势阱

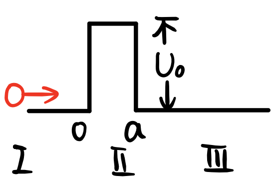


粒子如何通过一个区域 势垒

被一个势垒散射



(2)



情况1. $E>U_0$ 情况

情况2. $E<U_0$ 情况

Condition 1 $E>U_0$

Step 1 分区域写下定态薛定谔方程

$$
\begin{cases}
-\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{d^2}{dx^2}\phi = E\phi & x<0 \quad \cdots \langle 1\rangle \\
\left(-\dfrac{\hbar^2}{2m}\cdot\dfrac{d^2}{dx^2}+U_0\right)\phi = E\phi & 0<x<a \quad \cdots \langle 2\rangle \\
-\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{d^2}{dx^2}\phi = E\phi & x>a \quad \cdots \langle 3\rangle
\end{cases}
$$

方程 $\langle 1\rangle$ $\dfrac{d^2\phi}{dx^2}+\dfrac{2mE}{\hbar^2}\phi=0$ $\qquad \dfrac{d^2\phi}{dx^2}+k_1\phi=0$

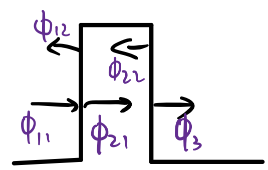
方程 $\langle 2\rangle$ $\dfrac{d^2\phi}{dx^2}+\dfrac{2m(E-U_0)}{\hbar^2}\phi=0$ $\qquad \dfrac{d^2\phi}{dx^2}+k_2\phi=0$ (二阶常微分方程)

方程 $\langle 3\rangle$ $\dfrac{d^2\phi}{dx^2}+\dfrac{2mE}{\hbar^2}\phi=0$ $\qquad \dfrac{d^2\phi}{dx^2}+k_1\phi=0$

令 $k_1=\sqrt{\dfrac{2mE}{\hbar^2}}$ $\quad k_2=\sqrt{\dfrac{2m(E-U_0)}{\hbar^2}}$

Step 2 写下方程通解

区域 I $\quad \phi_I(x)=\underset{\text{入射波}}{A_1}e^{ik_1x}+\underset{\text{反射波}}{A_1'}e^{-ik_1x}$



区域 II $\quad \phi_{II}(x)=\underset{\text{入射波}}{B}e^{ik_2x}+\underset{\text{反射波}}{B'}e^{-ik_2x}$

区域 III $\quad \phi_{III}(x)=\underset{\text{透射波}}{C}e^{ik_1x}+\underset{=0}{C'}e^{-ik_1x}$

Step 3 根据边界条件确定未知常数

$$
\begin{cases}
\phi_I(0)=\phi_{II}(0) \\
\Phi_I'(0)=\Phi_{II}'(0)
\end{cases}
\quad 且 \quad
\begin{cases}
\phi_{II}(a)=\phi_{III}(a) \\
\phi_{II}'(a)=\phi_{III}'(a)
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
A+A'=B+B' \\
ik_1A-ik_1A'=Bik_2-B'ik_2
\end{cases}
\quad
\begin{cases}
Be^{ik_2a}+B'e^{-ik_2a}=Ce^{ik_1a} \\
ik_2Be^{ik_2a}-ik_2B'e^{-ik_2a}=ik_1Ce^{ik_1a}
\end{cases}
$$

解得:

$$C=\frac{4k_1k_2e^{-ik_1a}}{(k_1+k_2)^2e^{-ik_2a}-(k_1-k_2)^2e^{ik_2a}}A$$

$$A'=\frac{2i(k_1^2-k_2^2)\sin k_2a}{(k_1-k_2)^2e^{ik_2a}-(k_1+k_2)^2e^{-ik_2a}}A$$

概率守恒 $\frac{\partial \rho}{\partial t}+\nabla\vec{J}=0$ $\vec{J}=\frac{i\hbar}{2m}(\psi\nabla\psi^*-\psi^*\nabla\psi)$

入射波 Ae^{ik_1x}

$$J_{入射}=\frac{i\hbar}{2m}\left(\psi\frac{d}{dx}\psi^*-\psi^*\frac{d\psi}{dx}\right)$$

$$=\frac{i\hbar}{2m}\left(Ae^{ik_1x}\frac{d}{dx}(A^*e^{-ik_1x})-A^*e^{-ik_1x}\frac{d}{dx}(Ae^{ik_1x})\right)$$

$$=\frac{i\hbar}{2m}AA^*\left(-ik_1e^{ik_1x}\cdot e^{-ik_1x}-ik_1e^{-ik_1x}e^{ik_1x}\right)$$

$$=\frac{i\hbar}{2m}|A|^2(-2ik_1)=\frac{k_1\hbar}{m}|A|^2$$ 入射概率流与入射振幅有关

同理:对于反射波 $A'e^{-ik_1x}$ $J_{反射}=\frac{-k_1\hbar}{m}|A'|^2$ 反射概率流与反射振幅有关

对于透射波 Ce^{ik_1x} $J_{透射}=\frac{k_1\hbar}{m}|C|^2$ 透射概率流与透射振幅有关

定义 反射系数 $R=\frac{J_{反射}}{J_{入射}}=\frac{|A'|^2}{|A|^2}$ 透射系数 $T=\frac{J_{透射}}{J_{入射}}=\frac{\frac{\hbar k_1}{m}|C|^2}{\frac{\hbar k_1}{m}|A|^2}=\frac{|C|^2}{|A|^2}$

验证: $R+T=1$ (即: $|A|^2=|A'|^2+|C|^2$)

代入 $C(A)$ 与 $A'(A)$ 表达式 可得 $|A|^2=|A'|^2+|C|^2$ $\therefore 1=R+T$

Condition 2 $E<U_0$

Step 1 分区域写下定态薛定谔方程 $k_1=\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$ $k_3=\sqrt{\frac{2m(U_0-E)}{\hbar^2}}$ $(k_1<k_2)$

区域I $x<0$ $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\phi=E\phi$ $\frac{d^2\phi}{dx^2}+k_1^2\phi=0$

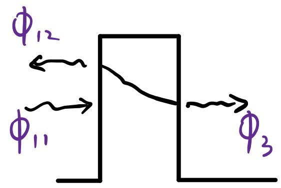
区域II $0<x<a$ $\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+U_0\right]\phi=E\phi$ $\frac{d^2\phi}{dx^2}-k_3^2\phi=0$

区域III $x>a$ $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\phi=E\phi$ $\frac{d^2\phi}{dx^2}+k_1^2\phi=0$

Step 2 写下方程通解

$$\phi_{I}(x) = Ae^{ik_1x} + A'e^{-ik_1x}$$

入射波　　反射波



$$\phi_{II}(x) = Be^{k_3x} + B'e^{-k_3x}$$ 能量衰减

$$\phi_{III}(x) = Ce^{ik_1x}$$

透射波

Step3 根据边界条件定积常数

$$\begin{cases} \phi_{I}(0) = \phi_{II}(0) \\ \phi_{I}'(0) = \phi_{II}'(0) \end{cases} \quad 且 \quad \begin{cases} \phi_{II}(a) = \phi_{III}(a) \\ \phi_{II}'(a) = \phi_{III}'(a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} A + A' = B + B' \\ ik_1A - ik_1A' = k_3B - k_3B' \end{cases} \quad \begin{cases} Be^{k_3a} + B'e^{-k_3a} = Ce^{ik_1a} \\ k_3Be^{k_3a} - k_3B'e^{-k_3a} = ik_1Ce^{ik_1a} \end{cases}$$

联立解得：

$$C = \frac{2ik_1k_3e^{-ik_1a}}{(k_1^2-k_3^2)sh(k_3a) + 2ik_1k_3ch(k_3a)}A$$

入射系数 $R = 1 - T$

因此关注 透射系数 $T = \frac{|C|^2}{|A|^2} = \frac{4k_1^2k_3^2}{(k_1^2+k_3^2)sh^2(k_3a) + 4k_1^2k_3^2} = \frac{1}{1+\frac{1}{4}(\frac{1}{k_1^2}+\frac{1}{k_3^2})sh^2(k_3a)}$

$$sh(k_3a) = \frac{e^{k_3a} - e^{-k_3a}}{2} \qquad k_3 = \sqrt{\frac{2m(U_0-E)}{\hbar}}$$

当$E \ll U_0$时 $k_3a \gg 1$ $\therefore e^{k_3a} \gg e^{-k_3a}$

$$\therefore T \approx \frac{1}{e^{2k_3a}} = \exp\left\{-2\sqrt{\frac{2m(U_0-E)}{\hbar}}a\right\}$$

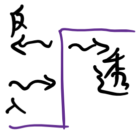
Example：如图所示，一个半无限长势垒 高度为U_0，当粒子能量为E，从左向右入射，试求其反射系数和透射系数 (MIT)

$\hat{H}\phi = E\phi$

其中 $k_1 = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$ 　 $k_2 = \sqrt{\frac{2m(E-U_0)}{\hbar^2}}$

当 $E>U_0$ 时 $\quad \phi_{I}(x)=Ae^{ik_1x}+A'e^{-ik_1x} \qquad (x<0)$

$\phi_{II}(x)=Be^{ik_2x} \qquad (x\geq 0)$



$$\begin{cases} A+A'=B \\ ik_1A-ik_1A'=ik_2B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=\dfrac{2k_1}{k_1+k_2}A \\ A'=\dfrac{i(k_1-k_2)A}{i(k_1+k_2)}=\dfrac{k_1-k_2}{k_1+k_2}A \end{cases}$$

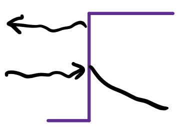
$$\therefore R=\frac{|A'|^2}{|A|^2}=\left|\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}\right|^2=\frac{U_0^2}{(\sqrt{E}+\sqrt{E-U_0})^4}$$

$$T=\frac{|B|^2}{|A|^2}=\left|\frac{2k_1}{k_1+k_2}\right|^2=1-R$$

当 $E<U_0$ 时 $\quad \phi_{I}(x)=Ae^{ik_1x}+A'e^{-ik_1x} \qquad (x<0)$

$\phi_{II}=\cancel{Be^{k_3x}}+\underbrace{\overset{反}{B'}e^{-k_3x}}_{透} \qquad (x\geq 0)$ $\qquad$ 其中 $k_3=\sqrt{\dfrac{2m(U_0-E)}{\hbar}}$

对于透射波 $x\to\infty$ $Be^{k_3x}\to\infty$ $\quad B=0$



$$\begin{cases} A+A'=B' \\ ik_1A-ik_1A'=-k_3B' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A'=\dfrac{k_3+ik_1}{-k_3+ik_1}A \\ B'=\dfrac{2ik_1}{-k_3+ik_1}A \end{cases}$$

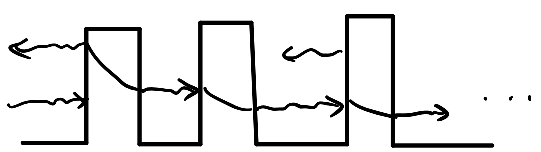
法1： $R=\dfrac{|A'|^2}{|A|^2}=\left|\dfrac{ik_1+k_3}{ik_1-k_3}\right|^2=\left|\dfrac{(k_3+ik_1)^2}{k_3^2+k_1^2}\right|^2=1 \qquad T=1-R=0$

法2： $J_{透}=\dfrac{i\hbar}{2m}\left[\psi\dfrac{d\psi^*}{dx}-\psi^*\dfrac{d\psi}{dx}\right]=\dfrac{i\hbar}{2m}\left[B'e^{-k_3x}(-k_3)B'^*e^{-k_3x}-B'^*e^{-k_3x}(-k_3)e^{-k_3x}\cdot B'\right]$

$$=\frac{i\hbar}{2m}\left[|B'|^2-|B'|^2\right]\cdot e^{-k_3x}(-k_3)e^{-k_3x}=0$$

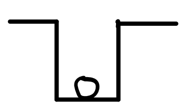
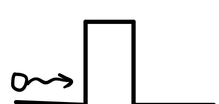
$\therefore T=0 \quad R=1-T=1$

法3：



$T_1\propto e^{-a} \quad T_2\propto e^{-a} \quad \cdots \qquad \therefore T\propto\prod_{k=1}^{n}T_k \quad$ 当 $n\to\infty$ 时 $T\to 0$

小结： 束缚态问题 $\qquad$ 散射态问题

图象  

步骤

(1) 分区域写下定态薛定谔方程

$$\hat{H}\phi = E\phi$$

(2) 写下通解

(3) 根据边界条件定积分常数

↓ ↓

结果

能量本征函数 ϕ_n

能量本征值 E_n

↓

推出各种物理量

反射系数 R

透射系数 T

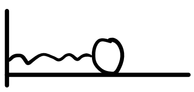
↓

推出各种物理量

§3.3 谐振子问题

(1) 物理体系

经典力学



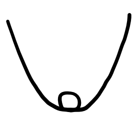
弹簧振子

定义

$F = kx$

$U = \frac{1}{2}kx^2$

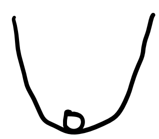
图象



量子物理

粒子在一个抛物势中运动

$U(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$



第1步 写下定态薛定谔方程 $\hat{H}\phi = E\phi$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + U(x)\right]\phi = E\phi$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\right]\phi = E\phi$$

第2步 写下方程通解

一、变量代换 令 $\xi = \alpha x$ $\alpha = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$ $\lambda = \frac{2E}{\hbar\omega}$

代入原方程：$\frac{d^2\phi}{dx^2}+(\lambda-\xi^2)\phi=0$

当ξ很大时 $\frac{d^2\phi}{dx^2}-\xi^2\phi=0$ $\phi(\xi)=e^{-\frac{1}{2}\xi^2}$

当ξ很小时 $\phi(\xi)=H(\xi)$

待定系数法：$\underset{\text{通解}}{\phi}=\underset{\xi\text{很大}}{e^{-\frac{1}{2}\xi^2}}\underset{\xi\text{很小}}{H(\xi)}$

将通解代入原方程：$\underset{2\text{阶}}{\frac{d^2H}{d\xi^2}}-2\xi\underset{1\text{阶}}{\frac{dH}{d\xi}}+\underset{0\text{阶}}{(\lambda-1)H}=0$ 厄米方程

级数展开方法求解（特殊方程）

第3步 根据边界条件求积分常数

上述厄米方程在全空间有解的充要条件：$\lambda=2n+1$

其解为 $H_n=(-1)^n e^{\xi^2}\frac{d^n}{d\xi^n}e^{-\xi^2}$ （厄米函数、特殊函数）

因此 $\hat{H}\phi=E\phi$ 在 $\hat{H}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2$ 条件下有解

能量本征值 $E_n=(n+\frac{1}{2})\hbar\omega$

能量本征函数 $\phi_n=e^{-\frac{1}{2}\xi^2}H_n(\xi)=(-1)^n e^{\frac{1}{2}\xi^2}\frac{d^n}{d\xi^n}e^{-\xi^2}$

Example：一个一维谐振子，已知其处在基态，相应的波函数为

$\psi_0=\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}}e^{-\frac{1}{2}\alpha x^2}$ $\alpha=\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$，$m$ ω 是谐振子的粒子质量和特征参数，求该粒子在经典区域以外出现的几率大小

解：基态能量 $E_0=\frac{1}{2}\hbar\omega$

基态波函数 ψ_0

经典状态

$$\begin{cases}E=E_0=\frac{1}{2}\hbar\omega\\ \frac{1}{2}m\omega^2x_M^2=\frac{1}{2}\hbar\omega\end{cases}$$

$$P=\int_{x_M}^{+\infty}|\psi_0|^2dx+\int_{-\infty}^{-x_M}|\psi_0|^2dx$$

$$=2\int^{+\infty}|\psi_0|^2dx$$

$\Rightarrow x_M=\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$

$\int_{x_M}$

$$= 2\cdot\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\int_{x_M}^{+\infty} e^{-\alpha x^2}\,dx$$

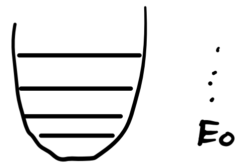
$$= 1-\int_{-\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}}^{\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}}\left|\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{2}\alpha x^2}\right|^2 dx \approx 0.16$$

小结：(1) 思路：第1步 写下定态薛定谔方程 $\hat{H}\phi=E\phi$

第2步 写下通解

第3步 边界条件确定常数 → 波函数 ϕ

(2) 能量本征值 $E_n=(n+\frac{1}{2})\hbar\omega$



(3) 能量本征函数 $\phi_n = e^{-\frac{1}{2}\xi^2} H_n(\xi)$

能量量子数：n