2022 春信息论 B 课程数学基础复习题目

考察范围：概率论基础　　课程助教：高源

1. 设随机变量 $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, 而对任一实数 x, 在 $X=x$ 条件下, $Y \sim \mathcal{N}(x,1)$.

(1) 试求随机变量 Y 的密度函数 $f_Y(y)$, 并指出 Y 服从何种分布.

(2) 试求条件期望 $\mathrm{E}[XY \mid X=x]$.

(3) 试求 X 和 Y 的相关系数.

(4) 试求常数 a, 使得随机变量 $aX+Y$ 和 $aX-Y$ 相互独立.

解析：

(1) 由

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}, \quad f_{Y|X}(y \mid x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(y-x)^2}{2}}$$

可知随机向量 (X,Y) 的联合密度为

$$f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y \mid x)=\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{x^2+(y-x)^2}{2}}$$

从而, 随机变量 Y 的密度函数为

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{4}}$$

即 Y 服从正态分布 $\mathcal{N}(0,2)$.

(2) 由题目条件, $\mathrm{E}[XY \mid X=x]=x\mathrm{E}[Y \mid X=x]=x^2$.

(3) 由 (1) 知 $\mathrm{Var}(Y)=2$, 而由 (2) 知 $\mathrm{E}[XY]=\mathrm{E}[\mathrm{E}(XY \mid X)]=\mathrm{E}\left[X^2\right]=1$. 从而, $\rho_{X,Y}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\cdot\mathrm{Var}(Y)}}=\frac{\mathrm{E}[XY]}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(4) 易知, $(aX+Y, aX-Y)$ 服从二维正态分布, 且 $\mathrm{Cov}(aX+Y, aX-Y)=a^2-2$. 由于二维正态随机向量的不相关性和独立性等价, 故所求常数 $a=\pm\sqrt{2}$.

思考：

(1) 考察条件概率密度函数定义及其相关计算.

(2) 考察条件期望相关计算. 全期望公式如何应用?

(3) 考察相关系数的定义及其相关计算.

(4) 考察正态分布的性质.

2. 设随机变量 X_1, X_2, X_3 相互独立且都服从区间 $(0,1)$ 上的均匀分布.

(1) 若随机变量 $Y = -a\ln X_1$, 其中 $a>0$ 为一给定常数, 试求 Y 的概率密度函数.

(2) 试求随机变量 $Z = X_2/X_1$ 的分布函数.

(3) 试求随机变量 $U = 1/\left(X_1X_2X_3\right)$ 的概率密度函数.

解析：

(1) 对任一 $y>0$, 由于

$$\mathrm{P}(Y \leqslant y) = \mathrm{P}\left(-a\ln X_1 \leqslant y\right) = \mathrm{P}\left(X_1 \geq \mathrm{e}^{-y/a}\right) = 1-\mathrm{e}^{-y/a}$$

故 Y 服从参数为 $1/a$ 的指数分布, 从而其概率密度函数为

$$f_Y(y) = \frac{1}{a}\mathrm{e}^{-\frac{y}{a}}, \quad y>0$$

(2) 将 (X_1, X_2) 视为单位正方形上的均匀分布, 利用几何概型可知, 当 $0 \leqslant z < 1$ 时,

$$\mathrm{P}(Z \leqslant z) = \mathrm{P}\left(X_2 \leqslant zX_1\right) = z/2$$

而当 $z \geqslant 1$ 时,

$$\mathrm{P}(Z \leqslant z) = \mathrm{P}\left(X_2 \leqslant zX_1\right) = 1 - /(2z)$$

故 Z 的分布函数为

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z<0 \\ z/2, & 0 \leqslant z < 1 \\ 1-1/(2z), & z \geqslant 1 \end{cases}$$

(3) 由 $V := \ln U = -\sum_{i=1}^{3} \ln X_i$ 及 (1) 可知, V 为 3 个独立 $\mathrm{Exp}(1)$ 随机变量之和, 故（利用随机变量函数的概率密度求解方法可得）V 服从 $\Gamma(1,3)$ 分布, 即其概率密度函数为

$$f_V(v) = \frac{1}{2}v^2\mathrm{e}^{-v}, \quad v>0.$$

再由 $U = \mathrm{e}^V$ 及密度函数变换公式可知, U 的概率密度函数为

$$f_U(u) = \frac{\ln^2 u}{2u^2}, \quad u>1$$

思考：

(1) 本题考察随机变量函数的概率密度函数求解, 主要有两种方法，分别是什么?

3. 设二维随机向量 (X,Y) 服从二元正态分布 $\mathcal{N}(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$, 其中 $\mu_1=\mu_2=1$, $\sigma_1^2=\sigma_2^2=0.5, \rho=0.5$. 记 $Z=|X-Y|$. 求 Z 的密度函数 $f_Z(z)$.

解析：首先根据题目及正态分布的性质可以判断出，$X-Y$ 服从正态分布。欲求解其概率密度函数，只需求解其均值和方差即可（进而可以直接获得 Z 的概率密度函数）。由题知 $\mathrm{E}(X-Y)=0$,

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}(X-Y)&=\operatorname{Var}(X)+\operatorname{Var}(Y)-2\operatorname{Cov}(X,Y)\\&=0.5+0.5-2\times 0.25=0.5\end{aligned}$$

所以有

$$X-Y\sim\mathcal{N}(0,0.5)$$

因此 Z 的密度函数

$$f_Z(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-z^2},\quad z>0$$

思考：

(1) 本题考察随机变量函数的概率密度函数求解, 由于正态分布的特殊性，本题使用了一种和上一题不同的求解方法，并且更简便. 通过这道题，你收获了什么?

4. 设随机向量 (X,Y,Z) 的概率密度函数为

$$f(x,y,z)=\begin{cases}\frac{1}{8\pi}(1-\sin x\sin y\sin z), & 0\leqslant x,y,z\leqslant 2\pi\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

证明 X,Y,Z 两两独立但不相互独立.

解析：概率论问题中涉及“独立”的概念，都需要严格按照定义来验证。求解边缘概率密度函数

$$f_X(x)=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{8\pi^3}(1-\sin x\sin y\sin z)dydz=\frac{1}{2\pi}\mathrm{I}_{[0,2\pi]}(x)$$

同理 $f_Y(y)=\frac{1}{2\pi}\mathrm{I}_{[0,2\pi]}(y), f_Y(z)=\frac{1}{2\pi}\mathrm{I}_{[0,2\pi]}(z)$.

$$f_{XY}(x,y)=\int_0^{2\pi}\frac{1}{8\pi^3}(1-\sin x\sin y\sin z)dz=\frac{1}{4\pi^2}\mathbf{I}_{[0,2\pi]}(x)\mathbf{I}_{[0,2\pi]}(y)$$

可得 $f_{XY}(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$, 其他同理. 因此可得，X,Y,Z 两两独立. 但 $f(x,y,z)\neq f_X(x)f_Y(y)f_Z(z)$, 所以 X,Y,Z 不相互独立.

思考：

(1) 本题考察随机变量独立的概念. 通过这道题，你收获了什么?

5. 设 (X, Y) 的概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}(x+y)e^{-(x+y)}, & x>0, y>0\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(1) X 与 Y 是否独立?

(2) 求 $Z = X + Y$ 的概率密度函数.

解析：

(1) 利用定义验证可以发现，不独立.

(2) 构造随机变量变换. 令 $Z = X + Y, W = X$. 则 $X = W, Y = Z - W$. 计算雅可比行列式绝对值 $||J||$=1. 求解联合概率密度函数

$$g(z,w)=\frac{1}{2}ze^{-z}|J|\mathbf{I}_{(z>0,0<w<z)}(z,w)=\frac{1}{2}ze^{-z}\mathbf{I}_{(z>0,0<w<z)}(z,w)$$

求解边缘密度函数可得结果

$$g_Z(z)=\int_0^z\frac{1}{2}ze^{-z}\mathbf{I}_{(z>0)}(z)dw=\frac{1}{2}z^2e^{-z}\mathbf{I}_{(z>0)}(z)$$