2022 春信息论 B 数学基础复习

复习内容：　概率论基础　　课程助教：　高源

1. 全概率公式

2. 贝叶斯公式

3. 一维正态分布的概率密度函数

4. 指数分布的概率密度函数（并举例说明常见的服从指数分布的例子）

5. 二维正态的概率密度函数

   记作 $(X,Y) \sim \mathcal{N}\left(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho\right)$。其中 _____ 为相关系数，其取值为_____ 时 X 和 Y 独立。

6. 多元正态分布的概率密度函数

7. 边缘分布。设 $X=\left(X_1, \cdots, X_n\right)$ 有概率密度函数 $f\left(x_1, \cdots, x_n\right)$，其中分量 X_1 的概率密度函数为（其余分量类似）

8. 二维正态的边缘分布是正态分布。若 $\left(X_1, X_2\right)$ 有二维正态分布 $N\left(a, b, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho\right)$, X_1, X_2 的边缘分布分别是______________________________ .

9. 条件概率密度函数。设二维随机向量 $X=\left(X_1, X_2\right)$ 有概率密度函数 $f\left(x_1, x_2\right)$，有

$$f\left(x_1, x_2\right)=f_1\left(x_1\right) f_2\left(x_2 \mid x_1\right)$$

10. 二维正态的条件概率分布是正态分布。设 $\left(X_1, X_2\right)$ 服从二维正态分布 $\mathcal{N}\left(a, b, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho\right)$，有 $X_2 \mid X_1 \sim$______________________________ 。

11. 连续随机变量的独立性。若连续型随机向量 $(X_1, \cdots, X_n)$ 的概率密度函数 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 可表为 n 个函数 $g_1, \cdots, g_n$ 之积，其中 g_i 只依赖于 x_i，即

$$f(x_1, \cdots, x_n) = g_1(x_1) \cdots g_n(x_n)$$

则 $X_1, \cdots, X_n$ 相互独立，且 X_i 的边缘密度函数 $f_i(x_i)$ 与 $g_i(x_i)$ 只相差一个常数因子。

12. 离散随机变量的独立性。设 $X_1, \cdots, X_n$ 都是离散型随机变量，若对任何常数 $a_1, \cdots, a_n$，都有

$$P(X_1 = a_1, \cdots, X_n = a_n) = P(X_1 = a_1) \cdots P(X_n = a_n)$$

则称 $X_1, \cdots, X_n$ 相互独立。

13. 离散随机变量的函数的概率分布求解。

14. 连续随机变量的函数的概率密度求解。一般来讲有两种常用方法

15. 随机变量和的概率密度函数公式（卷积公式）。设 (X_1, X_2) 的联合密度函数为 $f(x_1, x_2)$，则 $Y = X_1 + X_2$ 的概率密度函数为

16. 正态分布变量和仍为正态分布。$X_1, X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$，则 $Y = X_1 + X_2 \sim$ ______________ .

17. 若干个随机变量之和的期望等于各变量的期望之和, 即

$$E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)$$

注意，这里并不要求随机变量之间独立（和概率加法公式区别）。

18. 若干个独立随机变量之积的期望等于各变量的期望之积

$$E(X_1 X_2 \cdots X_n) = E(X_1) E(X_2) \cdots E(X_n)$$

19. 随机变量函数的期望。设随机变量 X 为离散型，有分布 $P\left(X=a_i\right)=p_i, i=1,2, \cdots$，或者为连续型，有概率密度函数 $f(x)$。则 $E[g(X)]=$ 这个结论的意义在于：为了计

算 X 的某一函数 $g(X)$ 的期望，并不需要先算出 $g(X)$ 的密度函数，而可以就从 X 的分布出发，这大大方便了计算。因为在 g 较为复杂时 $g(X)$ 的密度很难求。

20. 条件期望。

$$E(Y \mid x)=\int_{-\infty}^{\infty} y f(y \mid x) \mathrm{d} y$$

21. 全期望公式。

22. 独立随机变量之和的方差等于各变量的方差之和

$$\operatorname{Var}\left(X_1+\cdots+X_n\right)=\operatorname{Var}\left(X_1\right)+\cdots+\operatorname{Var}\left(X_n\right)$$

23. 指数分布的均值为 λ^{-1}，方差为 λ^{-2}。

24. 协方差。称 $E\left[\left(X-m_1\right)\left(Y-m_2\right)\right]$ 为 X, Y 的协方差，并记为 $\operatorname{Cov}(X, Y)$。若 X, Y 独立, 则 $\operatorname{Cov}(X, Y)=0$。$[\operatorname{Cov}(X, Y)]^2 \leqslant \sigma_1^2 \sigma_2^2$. 等号当且仅当 X, Y 之间有严格线性关系时成立。

25. 相关系数。称 $\operatorname{Cov}(X, Y) /\left(\sigma_1 \sigma_2\right)$ 为 X, Y 的相关系数, 并记为 $\operatorname{Corr}(X, Y)$。注意，由独立可以得到相关系数为 0（不相关），但是相关系数为 0 并不一定独立。二维正态的参数 ρ 即为随机向量两个分量之间的相关系数。