1 第一章

问题(七). 一根长为l具有绝缘的侧表面的均匀细杆，左端为$x=0$，右端$x=l$，它的初始温度为$\varphi(t)$，两端满足下列边界条件之一：

(1) 左端绝热，右端保持常温u_0;

(2) 左右两端分别有热流密度q_1和q_2进入;

(3) 左端温度$\mu(t)$，右端与温度为$\theta(t)$的介质接触，热交换系数为h。

解. *(1)*

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, 0 \le x \le l, 0 \le t < +\infty \\ u(0,x) = \varphi(t), 0 \le x \le l \\ u_x(t,0) = 0, u(t,l) = u_0, 0 \le t < +\infty. \end{cases}$$

(2)

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, 0 \le x \le l, 0 \le t < +\infty \\ u(0,x) = \varphi(t), 0 \le x \le l \\ u_x(t,0) = -\frac{q_1}{k}, u_x(t,l) = \frac{q_2}{k}, 0 \le t < +\infty. \end{cases}$$

(3)

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, 0 \le x \le l, 0 \le t < +\infty \\ u(0,x) = \varphi(t), 0 \le x \le l \\ u(t,0) = \mu(t), u(t,l) + \frac{k}{h} u_x(t,l) = \theta(t), 0 \le t < +\infty. \end{cases}$$

问题(八). 一根长为l两端固定的弦，用手把它的中点朝u轴正向拨开h距离，然后放手任其自由振动，写出定解问题。

解.

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, 0 \le x \le l, 0 \le t < +\infty \\ u(0,x) = \frac{2xh}{l}, 0 \le x \le l/2 \\ u(0,x) = 2h - \frac{2xh}{l}, l < x \le l \\ u_t(0,x) = 0, 0 \le x \le l \\ u(t,0) = u(t,l) = 0, 0 \le t < +\infty \end{cases}$$

问题. 设有一个均匀圆柱体，半径为a，高为h，侧面再温度为0 得空气中自由冷却，上底绝热，下底温度为$g(t,x,y)$，初始温度为$\varphi(x,y,z)$，试写出定解问题。

解.

$$\begin{cases} u_t = b^2 \Delta u + f(t,x,y,z), x^2+y^2 < a^2, t > 0, 0 < z < h \\ u(t,x,y,0) = g(t,x,y), u_z(t,x,y,0) = 0, x^2+y^2 < a^2, t > 0, \\ (u + \frac{k}{h} u_r)|_{r=a} = 0, t > 0, 0 < z < h \\ u(0,x,y,z) = \varphi(x,y,z), x^2+y^2 < a^2, 0 < z < h. \end{cases}$$

问题(十). 利用叠加原理和齐次化原理求解

$$\begin{cases} u_t + au_x = f(t,x), -\infty \le x \le +\infty, 0 \le t < +\infty \\ u(0,x) = \varphi(x), -\infty \le x \le +\infty \end{cases}$$

$a \neq 0$ 为常数。

解. 将定解问题分解为

$$(I) \qquad \begin{cases} v_t + av_x = 0, -\infty \le x \le +\infty, 0 \le t < +\infty \\ v(0,x) = \varphi(x), -\infty \le x \le +\infty \end{cases}$$

和

$$(II) \qquad \begin{cases} w_t + aw_x = f(t,x), -\infty \le x \le +\infty, 0 \le t < +\infty \\ w(0,x) = 0, -\infty \le x \le +\infty \end{cases}$$

对于*(I)*，做变量替换$\xi = x - at, \eta = x$ 得

$$v_t = v_\xi \xi_t + v_\eta \eta_t = -av_\xi, v_x = v_\xi \xi_x + v_\eta \eta_x = v_\xi + v_\eta.$$

带入*(I)* 的泛定方程，得到

$$v_\eta = 0$$

从而$v = h(\xi) = h(x - at), h$ 为任意函数。带入初始条件得$h(x) = \varphi(x)$，所以$v(t,x) = \varphi(x - at)$。

对于*(II)*，应用书上的齐次化原理（冲量原理），只需求解

$$(II) \qquad \begin{cases} \tilde{w}_t + a\tilde{w}_x = 0, -\infty \le x \le +\infty, \tau \le t < +\infty \\ \tilde{w}(\tau,x) = f(\tau,x), -\infty \le x \le +\infty \end{cases}$$

泛定方程得通解为$\tilde{w}(t,x;\tau) = h(x - at)$，带入$\tau$ 时刻条件得

$$\tilde{w}(\tau,x;\tau) = h(x - a\tau) = f(\tau,x).$$

得到$h(x) = f(\tau, x + a\tau)$。从而

$$\tilde{w}(t,x;\tau) = f(\tau, x + a\tau - at).$$

定解问题*(II)* 的解为

$$w(t,x) = \int_0^t f(\tau, x + a\tau - at)d\tau.$$

所以$u = v + w = \varphi(x - at) + \int_0^t f(\tau, x + a\tau - at)d\tau$。

问题(十二). 求一端固定的半无界弦振动问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, 0 \le x \le +\infty, 0 \le t < +\infty \\ u(0,x) = \sin x, u_t(0,x) = kx, 0 \le x \le +\infty \\ u(t,0) = 0, t \ge 0. \end{cases}$$

解. 端点固定（$u(t,0)=0$）做奇延拓，端点自由运动（$u_x(t,0)=0$）做偶延拓，这里0 点固定，因而奇延拓。新的定解问题为

$$\begin{cases} v_{tt}=a^2v_{xx}, -\infty<x<+\infty, 0\le t<+\infty \\ v(0,x)=\sin x, v_t(0,x)=kx, -\infty<x<+\infty \\ v(t,0)=0, t\ge 0. \end{cases}$$

由达朗贝尔公式

$$u(t,x)=v(t,x)|_{x\ge 0}=\frac{\sin(x+at)+\sin(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}ksds=\sin(x)\cos(at)+2kxt.$$

问题. 求解一维弦得振动问题：

$$\begin{cases} u_{tt}=u_{xx}-4t+2x, -\infty<x<+\infty, 0\le t<+\infty \\ u(0,x)=x^2, u_t(0,x)=\sin(3x), -\infty<x<+\infty. \end{cases}$$

解. 达朗贝尔公式要求方程齐次，取泛定方程得一个特解$v(t,x)=-\frac{2t^3}{3}+xt^2$。设$w=u-v$，得

$$\begin{cases} w_{tt}=w_{xx}, -\infty<x<+\infty, 0\le t<+\infty \\ w(0,x)=x^2, w_t(0,x)=\sin(3x), -\infty<x<+\infty. \end{cases}$$

由达朗贝尔公式

$$w=\frac{(x-t)^2+(x+t)^2}{2}+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\sin(3s)ds=x^2+t^2+\frac{1}{3}\sin(3x)\sin(3t).$$

所以

$$u(t,x)=w+v=x^2+t^2-\frac{2t^3}{3}+xt^2+\frac{1}{3}\sin(3x)\sin(3t)$$

2 第二章

3. 一条均匀的弦固定于$x=0$ 及$x=l$，在开始的一瞬间，它的形状是一条以$(\frac{l}{2},h)$ 为顶点的抛物线，初速度为零，且没有外力作用，求弦的位移函数。

   解. 定解问题为：

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}, 0\le x\le l, 0\le t<+\infty \\ u(0,x)=\frac{4h}{l^2}x(l-x), u_t(0,x)=0, 0\le x\le l \\ u(t,0)=0, u(t,l)=0, 0\le t<+\infty. \end{cases}$$

   分离变量，假设

$$u(t,x)=T(t)X(x).$$

   带入泛定方程可得

$$\frac{T''}{a^2T}=\frac{X''}{X}.$$

   上式左边为t的函数，右边为x的函数，因而肯定为常值，设为$-\lambda$。从而我们得到以下固有值问题：

$$\begin{cases} X''+\lambda X=0, 0\le x\le l \\ X(0)=0, X(l)=0. \end{cases}$$

以及

$$T''(t)+\lambda a^2 T=0.$$

分情况讨论：

(1) $\lambda<0$时，$X=C_1e^{\sqrt{-\lambda}x}+C_2e^{-\sqrt{-\lambda}x}$。带入边界条件得到$C_1=C_2=0$。舍去。

(2) $\lambda=0$时，$X=C_1x+C_2$。带入边界条件得到$C_1=C_2=0$。舍去。

(3) $\lambda>0$时，$X=C_1\cos(\sqrt{\lambda}x)+C_2\sin(\sqrt{\lambda}x)$。带入边界条件带入边界条件

$$\begin{cases} C_1=0, \\ C_1\cos(\sqrt{\lambda}l)+C_2\sin(\sqrt{\lambda}l)=0. \end{cases}$$

得到$C_1=0$ 以及

$$\sqrt{\lambda}l=n\pi, n=1,2,3\cdots.$$

固有值和固有函数为：

$$\text{固有值:}\lambda_n=(\frac{n\pi}{l})^2\text{对应固有函数:}X_n=\sin(\frac{n\pi x}{l}), n=1,2,3\cdots.$$

固定λ_n，则可以得到对应T_n的常微分方程：

$$T_n''=-\lambda_n a^2T_n=-(\frac{n\pi a}{l})^2T_n.$$

解得

$$T_n(t)=A_n\cos(\frac{n\pi at}{l})+B_n\sin(\frac{n\pi at}{l}), n=1,2\cdots.$$

整理得原定解问题的解为

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos(\frac{n\pi at}{l})+B_n\sin(\frac{n\pi at}{l})\right)\sin(\frac{n\pi x}{l}).$$

由初始条件

$$u_t(0,x)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n n\pi a\sin(\frac{n\pi x}{l})=0.$$

所以$B_n=0$。展开$u(0,x)$

$$\frac{4h}{l^2}x(l-x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_nX_n=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\sin(\frac{n\pi x}{l}).$$

其中

$$c_n=\frac{\langle\varphi,X_n\rangle}{\langle X_n,X_n\rangle}=\frac{2}{l}\int_0^l\frac{4h}{l^2}s(l-s)\sin(\frac{n\pi s}{l})ds=\frac{16h((-1)^n-1)}{(n\pi)^3}.$$

当n 为奇数得时候$c_n=\frac{32h}{(n\pi)^3}$，当n 为偶数时，$c_n=0$。所以

$$u(t,x)=\ \textstyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{32h}{(2n+1)^3\pi^3}\cos(\frac{(2n+1)\pi at}{l})\sin(\frac{(2n+1)\pi x}{l})$$

5.(3)

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} - 2hu_t, (0 \le x \le l, t \ge 0, 0 < h < \frac{\pi a}{l}, h \text{ 为常数}), \\ u(t,0) = u(t,l) = 0, \\ u(0,x) = \varphi(x), u_t(0,x) = \psi(x). \end{cases}$$

解. 分离变量，假设$u(t,x) = T(t)X(x)$. 带入泛定方程可得

$$\frac{T'' + 2hT'}{a^2 T} = \frac{X''}{X}.$$

上式左边为t的函数，右边为x的函数，因而肯定为常值，设为$-\lambda$。从而我们得到以下固有值问题：

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, 0 \le x \le l \\ X(0) = 0, X(l) = 0. \end{cases}$$

以及

$$T''(t) + 2hT' + \lambda a^2 T = 0.$$

解固有值问题得到固有值和固有函数为：

$$\text{固有值:}\lambda_n = (\frac{n\pi}{l})^2 \text{对应固有函数:} X_n = \sin(\frac{n\pi x}{l}).$$

固定λ_n，则可以得到对应T_n的常微分方程：

$$T_n''(t) + 2hT_n' + (\frac{n\pi}{l})^2 a^2 T_n = 0.$$

解得

$$T_n(t) = e^{-ht}\left(A_n \cos(\sqrt{(\frac{n\pi a}{l})^2 - h^2}t) + B_n \sin(\sqrt{(\frac{n\pi a}{l})^2 - h^2}t)\right), n = 1, 2 \cdots.$$

整理得原定解问题的解为

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-ht}\left(A_n \cos(\sqrt{(\frac{n\pi a}{l})^2 - h^2}t) + B_n \sin(\sqrt{(\frac{n\pi a}{l})^2 - h^2}t)\right)\sin(\frac{n\pi x}{l}).$$

其中

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(s)\sin(\frac{n\pi s}{l})ds,$$

$$B_n = \frac{1}{\sqrt{(\frac{n\pi a}{l})^2 - h^2}}\left(ha_n + \frac{2}{l}\int_0^l \psi(s)\sin(\frac{n\pi s}{l})ds\right).$$

5.(6) 环域内的狄利克莱问题：

$$\begin{cases} \Delta_2 u = 0, (a \le r \le b), \\ u(a,\theta) = 1, u(b,\theta) = 0. \end{cases}$$

解. 容易看出u 与θ 无关，不妨设$u=u(r)$，所以

$$\Delta_2 u = u_{rr} + \frac{u_r}{r} = u'' + \frac{u'}{r} = 0.$$

做变量替换$r=e^t$ 得到

$$\frac{d^2u}{dt^2} = 0.$$

所以$u = A + Bt = A + B\ln r$。带入边界条件得

$$A + B\ln a = 1, A + B\ln b = 0.$$

解得：$A = -\frac{\ln b}{\ln a - \ln b}, B = \frac{1}{\ln a - \ln b}$。所以

$$u = \frac{\ln r - \ln b}{\ln a - \ln b}.$$

8. 一个半径为a 的半圆形平板，其圆周边界上的温度保持$u(a,\theta) = T\theta(\pi-\theta)$, 而直径边界上的温度为零度，板的上下侧面绝热，试求板内的温度分布。

解. 写出定解问题

$$\begin{cases} \Delta_2 u = u_{rr} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_{\theta\theta}}{r^2} = 0, 0 \le r \le a, 0 \le \theta \le \pi \\ u(a,\theta) = T\theta(\pi-\theta), 0 \le \theta \le \pi \\ u(r,0) = u(r,\pi) = 0, 0 \le r \le a. \end{cases}$$

分离变量，设$u(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$，则有

$$-\frac{r^2R'' + rR'}{R} = \frac{\Theta''}{\Theta}$$

为常数，设为$-\lambda$，得到固有值问题

$$\begin{cases} \Theta'' + \lambda\Theta = 0, 0 \le \theta \le \pi \\ \Theta(0) = \Theta(\pi) = 0. \end{cases}$$

解得固有值及对应固有函数：$\lambda_n = n^2, \Theta_n = \sin(n\theta), n = 1,2,3\cdots$. 将固有值带入$R$ 得微分方程

$$r^2R_n'' + rR_n' - n^2R_n = 0,$$

做变量替换$r=e^t$，得

$$\frac{d^2R}{dt^2} - n^2R = 0.$$

解之，得

$$R_n = C_{n,1}e^{nt} + C_{n,2}e^{-nt} = C_{n,1}r^n + C_{n,2}r^{-n}, n = 1,2,3\cdots.$$

注意到$|R(0)| < \infty$ 得

$$R_n = C_n r^n, n = 1,2,3\cdots.$$

从而

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(n\theta) r^n.$$

求系数，将$T\theta(\pi-\theta)$ 按正弦函数分解：

$$T\theta(\pi-\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{8T_0}{(2n+1)^3\pi}\sin((2n+1)\theta).$$

对照得$C_{2n}=0, C_{2n+1}=\frac{8T_0}{(2n+1)^3\pi a^{2n+1}}$。所以

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{8T_0}{(2n+1)^3\pi}\left(\frac{r}{a}\right)^{2n+1}\sin((2n+1)\theta).$$

1. 解下列固有值问题

(1).

$$\begin{cases} y''-2ay'+\lambda y=0, 0<x<l, a=constant,\\ y(0)=y(l)=0.\end{cases}$$

解. 化为

$$\begin{cases} [e^{-ax}y']'+e^{-ax}\lambda y=0, 0<x<l, a=constant,\\ y(0)=y(l)=0.\end{cases}$$

由SL 理论，零不是固有值，且固有值大于零。解方程$t^2-2at+\lambda=0$，得$t=a\pm\sqrt{a^2-\lambda}$。如果$\lambda<a$，解之，舍去。如果$\lambda=a$，解之，舍去。如果$\lambda>a$，$y=C_1e^{ax}\cos(\sqrt{\lambda-a^2}x)+C_2e^{-ax}\sin(\sqrt{\lambda-a^2}x)$。代入边界条件，得$C_1=0$，$\sin(\sqrt{\lambda-a^2}l)=0$。得

$$\sqrt{\lambda-a^2}l=n\pi, n=1,2,\cdots.$$

固有值$\lambda_n=a^2+\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$，固有函数$y_n=e^{ax}\sin(\frac{n\pi x}{l}), n=1,2,\cdots.$

问题. 求固有值问题：

$$\begin{cases} y''+2y'+\lambda y=0, 0<x<9,\\ y(0)=y(9)=0.\end{cases}$$

解. 化为

$$\begin{cases} [e^{x}y']'+e^{x}\lambda y=0, 0<x<9,\\ y(0)=y(9)=0.\end{cases}$$

由SL 理论，零不是固有值，且固有值大于零。解方程$t^2+2t+\lambda=0$，$\lambda\le 1$ 讨论可以舍去，$\lambda>1$ 时得$t=-1\pm\sqrt{\lambda-1}i$。所以$y=C_1e^{-x}\cos(\sqrt{\lambda-1}x)+C_2e^{-x}\sin(\sqrt{\lambda-1}x)$。代入边界条件，得$C_1=0$，$\sin(9\sqrt{\lambda-1})=0$。得

$$9\sqrt{\lambda-1}=n\pi, n=1,2,\cdots.$$

固有值$\lambda_n=1+\left(\frac{n\pi}{9}\right)^2$，固有函数$y_n=e^{-x}\sin(\frac{n\pi}{9}x), n=1,2,\cdots.$

(2).

$$\begin{cases} [r^2R']'+\lambda r^2R=0, 0<r<a,\\ |R(0)|<\infty, R(a)=0;[\text{ 提示：}y=rR]\end{cases}$$

解. 由提示做因变量替换$y = rR$，则$R = y/r$。

$$[r^2R']' + \lambda r^2 R = [r^2(y/r)']' + \lambda yr = ry'' + \lambda ry = 0.$$

即

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, 0 < r < a, \\ |y(0)| = 0, y(a) = 0. \end{cases}$$

固有值和对应固有函数为$\lambda_n = (\frac{n\pi}{a})^2$，$R_n = y_n/r = \frac{1}{r}\sin(\frac{n\pi r}{a}), n = 1, 2, \cdots$.

(3).

$$\begin{cases} y^{(4)} + \lambda y = 0, 0 < x < l, \\ y(0) = y(l) = y''(0) = y''(l) = 0. \end{cases}$$

解. 解特征方程：$\mu^4 + \lambda = 0$。分情况讨论：

如果$\lambda = 0$，有四重根0，解为$y = C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3$，带入边界条件得$C_0 = C_1 = C_2 = C_3 = 0$，舍去。

如果$\lambda < 0$，有根$\mu_1 = |\lambda|^{1/4}$，$\mu_2 = -|\lambda|^{1/4}$，$\mu_3 = |\lambda|^{1/4}i$，$\mu_4 = -|\lambda|^{1/4}i$。微分方程得解为

$$y = C_0 exp(|\lambda|^{1/4}x) + C_1 exp(-|\lambda|^{1/4}x) + C_2\cos(|\lambda|^{1/4}x) + C_3\sin(|\lambda|^{1/4}x).$$

带入边界条件

$$\begin{cases} C_0 + C_1 + C_2 = 0 \\ C_0 exp(|\lambda|^{1/4}l) + C_1 exp(-|\lambda|^{1/4}l) + C_2\cos(|\lambda|^{1/4}l) + C_3\sin(|\lambda|^{1/4}l) = 0 \\ C_0|\lambda|^{1/2} + C_1|\lambda|^{1/2} - C_2|\lambda|^{1/2} = 0 \\ C_0|\lambda|^{1/2}exp(|\lambda|^{1/4}l) + C_1|\lambda|^{1/2}exp(-|\lambda|^{1/4}l) - C_2|\lambda|^{1/2}\cos(|\lambda|^{1/4}l) - C_3|\lambda|^{1/2}\sin(|\lambda|^{1/4}l) = 0 \end{cases}$$

解之，$C_0 = C_1 = C_2 = 0$，$C_2\sin(|\lambda|^{1/4}l) = 0$。当

$$|\lambda|^{1/4}l = n\pi, n = 1, 2, 3, \cdots$$

有非零解。固有值$\lambda_n = -(\frac{n\pi}{l})^4$，固有函数$y_n = \sin(\frac{n\pi x}{l}), n \geq 1$.

如果$\lambda > 0$，有根$\mu_1 = |\lambda|^{1/4}exp(\frac{\pi i}{4})$，$\mu_2 = |\lambda|^{1/4}exp(\frac{3\pi i}{4})$，$\mu_3 = |\lambda|^{1/4}exp(\frac{5\pi i}{4})$，$\mu_4 = |\lambda|^{1/4}exp(\frac{7\pi i}{4})$。微分方程得解为

$$y = exp(\frac{\sqrt{2}|\lambda|^{1/4}}{2}x)(C_0\cos(\frac{\sqrt{2}|\lambda|^{1/4}}{2}x) + C_1(\frac{\sqrt{2}|\lambda|^{1/4}}{2}x)) + exp(-\frac{\sqrt{2}|\lambda|^{1/4}}{2}x)(C_2\cos(\frac{\sqrt{2}|\lambda|^{1/4}}{2}x) + C_3(\frac{\sqrt{2}|\lambda|^{1/4}}{2}x$$

解之$C_0 = C_1 = C_2 = C_3 = 0$，略去。

10. 解下列非齐次固有值问题：

(2)

$$\begin{cases} u_t = a^2u_{xx}, 0 < x < l, a = constant > 0, \\ u(t, 0) = 0, u_x(t, l) = -\frac{q}{k} \\ u(0, x) = u_0. \end{cases}$$

并求$\lim_{t\to+\infty} u(t, x)$。

解. 定解问题非齐次，首先齐次化：取$v(t,x) = -\frac{q}{k}x$，设$w = u - v$ 得到

$$\begin{cases} w_t = a^2 w_{xx}, 0 < x < l, a = constant > 0, \\ w(t,0) = 0, w_x(t,l) = 0 \\ w(0,x) = u_0 + \frac{q}{k}x. \end{cases}$$

分离变量，设$w = T(t)X(x)$，得

$$\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X}.$$

设上式为$-\lambda$ 得固有值问题

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = 0, X'(0) = 0. \end{cases}$$

解之，固有值为$\lambda_n = (\frac{(2n-1)\pi}{2l})^2$，固有函数为$X_n = \sin(\frac{(2n-1)\pi x}{2l}), n \geq 1$。解常微分方程

$$T_n' + \lambda_n a^2 T_n = 0$$

得$T_n = exp(-(\frac{(2n-1)\pi a}{2l})^2 t)$。所以

$$w(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n exp(-(\frac{(2n-1)\pi a}{2l})^2 t) \sin(\frac{(2n-1)\pi x}{2l}).$$

将$w(0,x) = u_0 + \frac{q}{k}x$ 分解得：

$$u_0 + \frac{q}{k}x = \left(\frac{4u_0}{(2n-1)\pi} - \frac{(-1)^n 8ql}{k[(2n-1)\pi]^2}\right) \sin(\frac{(2n-1)\pi x}{2l}).$$

对照得

$$w(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4u_0}{(2n-1)\pi} - \frac{(-1)^n 8ql}{k[(2n-1)\pi]^2}\right) exp(-(\frac{(2n-1)\pi a}{2l})^2 t) \sin(\frac{(2n-1)\pi x}{2l}).$$

最终

$$u = v+w = -\frac{q}{k}x + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4u_0}{(2n-1)\pi} - \frac{(-1)^n 8ql}{k[(2n-1)\pi]^2}\right) exp(-(\frac{(2n-1)\pi a}{2l})^2 t) \sin(\frac{(2n-1)\pi x}{2l}).$$

$$\lim_{t \to +\infty} u(t,x) = -\frac{q}{k}x.$$

(5)

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + g, \text{g 为常数}, \\ u(t,0) = 0, u_x(t,l) = E \\ u(0,x) = Ex, u_t(0,x) = 0. \end{cases}$$

解. 取$\tilde{u}(t,x) = xE$ 及$w = u - \tilde{u}$。得到定解问题

$$\begin{cases} w_{tt} = w_{xx} + g, \\ w(t,0) = 0, w_x(t,l) = 0 \\ w(0,x) = 0, w_t(0,x) = 0. \end{cases}$$

令$\tilde{w}=\frac{g}{2}x(2l-x)$ 及$v=w-\tilde{w}$ 得：

$$\begin{cases} v_{tt}=v_{xx}, \\ v(t,0)=0, v_x(t,l)=0 \\ v(0,x)=-\frac{g}{2}x(2l-x), v_t(0,x)=0. \end{cases}$$

分离变量，我们假设

$$v(t,x)=T(t)X(x).$$

带入泛定方程可得

$$\frac{T''}{T}=\frac{X''}{X}.$$

上式左边为t的函数，右边为x的函数，因而肯定为常值，设为$-\lambda$。从而我们得到以下固有值问题：

$$\begin{cases} X''+\lambda X=0, 0\le x\le l \\ X(0)=0, X'(l)=0. \end{cases}$$

以及

$$T''(t)+\lambda a^2 T=0.$$

解得固有值和固有函数为：

$$\text{固有值:}\lambda_n=\left(\frac{(2n-1)\pi}{2l}\right)^2 \text{对应固有函数:}X_n=\sin(\frac{(2n-1)\pi x}{2l}), n\ge 1.$$

固定λ_n，则可以得到对应T_n的常微分方程：

$$T_n''=-\lambda_n T_n=-\left(\frac{(2n-1)\pi}{2l}\right)^2 T_n.$$

解得

$$T_n(t)=A_n\cos(\frac{(2n-1)\pi t}{2l})+B_n\sin(\frac{(2n-1)\pi t}{2l}), n=0,1,2\cdots.$$

整理得

$$v(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos(\frac{(2n-1)\pi t}{2l})+B_n\sin(\frac{(2n-1)\pi t}{2l})\right)\sin(\frac{(2n-1)\pi x}{2l}).$$

最后一步，确定A_n和B_n的取值。对$\varphi(x)$做展开

$$-\frac{g}{2}x(2l-x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n X_n=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\sin(\frac{(2n-1)\pi x}{2l}).$$

其中

$$c_n=\frac{\langle -\frac{g}{2}x(2l-x), X_n\rangle}{\langle X_n, X_n\rangle}=-\frac{g}{l}\int_0^l x(2l-x)\sin(\frac{(2n-1)\pi s}{2l})ds=-\frac{16gl^2}{(2n-1)^3\pi^3}.$$

令$t=0$并对照，我们可以得到：

$$\begin{cases} A_n=-\frac{16gl^2}{(2n-1)^3\pi^3} \\ B_n=0. \end{cases}$$

所以

$$v(t,x) = -\frac{16gl^2}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}cos(\frac{(2n-1)\pi t}{2l})\sin(\frac{(2n-1)\pi x}{2l}).$$

定解问题的解为

$$u = \tilde{u}+\tilde{w}+v = Ex+\frac{g}{2}x(2l-x)-\frac{16gl^2}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}cos(\frac{(2n-1)\pi t}{2l})\sin(\frac{(2n-1)\pi x}{2l}).$$

问题. 求解一维有界弦振动问题

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, t>0, 0<x<1, \\ u(t,0) = u_x(t,1) = 1, t>0, \\ u(0,x) = 0, u_t(0,x) = 0, 0<x<1. \end{cases}$$

解. 首先将边界条件齐次化，设$v = 1+x$，及$w = u-v$ 则

$$\begin{cases} w_{tt} = w_{xx}, t>0, 0<x<1, \\ w(t,0) = w_x(t,1) = 0, t>0, \\ w(0,x) = -1-x, w_t(0,x) = 0, 0<x<1. \end{cases}$$

分离变量，设$w = T(t)X(x)$，得

$$\frac{T''}{T} = \frac{X''}{X}.$$

设上式为$-\lambda$ 得固有值问题

$$\begin{cases} X''+\lambda X = 0 \\ X(0) = 0, X'(0) = 0. \end{cases}$$

解之，固有值为$\lambda_n = (\frac{(2n-1)\pi}{2})^2$，固有函数为$X_n = \sin(\frac{(2n-1)\pi x}{2}), n\geq 1$。解常微分方程

$$T_n''+\lambda_n T_n = 0$$

得$T_n = A_n\cos(\frac{(2n-1)\pi}{2})^2 t)+B_n\sin(\frac{(2n-1)\pi}{2})^2 t)$。所以

$$w(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos(\frac{(2n-1)\pi}{2}t)+B_n\sin(\frac{(2n-1)\pi}{2}t)\right)\sin(\frac{(2n-1)\pi x}{2}).$$

将$w(0,x) = -1-x$ 分解得：

$$-1-x = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{4}{(2n-1)\pi}+\frac{(-1)^n 8}{[(2n-1)\pi]^2}\right)\sin(\frac{(2n-1)\pi x}{2}).$$

令$t = 0$ 对照得

$$A_n = -\frac{4}{(2n-1)\pi}+\frac{(-1)^n 8}{[(2n-1)\pi]^2}, B_n = 0.$$

所以

$$w(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{4}{(2n-1)\pi}+\frac{(-1)^n 8}{[(2n-1)\pi]^2}\right)\cos(\frac{(2n-1)\pi}{2}t)\sin(\frac{(2n-1)\pi x}{2}).$$

最终

$$u = v+w = 1+x+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{4}{(2n-1)\pi}+\frac{(-1)^n 8}{[(2n-1)\pi]^2}\right)\cos(\frac{(2n-1)\pi}{2}t)\sin(\frac{(2n-1)\pi x}{2}).$$