$P(A)=P(B)=\frac{1}{2}$,

一、(1). $P(AC|AB\cup C)=\frac{1}{4}$

$$\Rightarrow \frac{P(AC, AB\cup C)}{P(AB\cup C)} = \frac{P(AC)}{P(AB)+P(C)} = \frac{P(A)P(C)}{\cancel{P(AB)+P(C)}\ P(A)P(B)+P(C)} = \frac{1}{4}$$

代入 $P(A)$. $P(B)$

解出: $\boxed{P(C)=\frac{1}{4}}$

2) 求 $P(知|对)$

$$= \frac{P(知,对)}{P(对)} = \frac{P(知,对)}{P(知且对)+P(不知,且对)} = \frac{p}{p+(1-p)\frac{1}{4}}$$

3). 答: 连续型: 存在 R 上非负 Lebesgue 可积函数 $p(x)$

$S.t\ F(x)=\int_{-\infty}^{x} p(u)du,\ x\in R$ 不满足

B: 奇异型处处连续, $P_i\geq 9$, 但不存在这样 $p(u)$ (a.e 为 0)

C: 混合型

A: R.

(4). $P(X=n)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{n}}{n!} \Rightarrow \lambda=2 \quad \Rightarrow P(X=3)=\frac{e^{-2}2^{3}}{3!}$

(5) $F(1)=F(1^-)=0 \Rightarrow b=-1$

$1=F(e^+)=F(e^-) \Rightarrow a+b=0 \Rightarrow a=1$

$ab=-1$

(6). 非负 ✓

D: $\int_{-\infty}^{+\infty} p_1(x)F_2(x)+p_2(x)F_1(x)\,dx$

$= F_1F_2\Big|_{-\infty}^{+\infty}-\int_{-\infty}^{+\infty}F_1\,dF_2+\int_{-\infty}^{+\infty}p_2F_1\,dx$

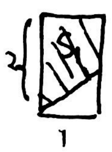
$=1$ $\boxed{\checkmark}$

A: ~~不满足 可积~~、

令 $p_1(x)=\lambda e^{-\lambda x}=\cancel{p_2(x)}$ $p_2(x)=2\lambda e^{-2\lambda x}$ $\Rightarrow$ A, B, C 不满足规范性

(7). $P(X>4\mid 已修2小时)=P(X>2)=e^{-2}$

(8). 利用 $F(\frac{x-\mu}{\sigma})=\Phi(x)$ $\Rightarrow$ A

(9).  $\frac{S_1}{S}=\frac{2-\frac{1}{2}}{2\times 1}=\frac{3}{4}$ 

$p=\frac{3}{4}$、

(10).

Y \ X	0	1
1		0.1
0	0.4	

$P(X=0,Y=1)=P(X=0,X+Y=1)$

$\underline{\underline{独立}}\ P(X=0)P(X+Y=1)$

$=\cancel{P(X=0)(}\,(P(X=0,Y=0)+P(X=0,Y=1))\,0.5$

$\Rightarrow P(X=0,Y=1)=(0.4+P(X=0,Y=1))\frac{1}{2}$

$\Rightarrow P(X=0,Y=1)=0.4$

2.

一般考虑简单的方法，全概率公式+取条件于第一次或最后一次.
解不出，再考虑其他方法.

记 甲最……为X

$\boxed{\text{取条件于第一次的结果}}$

$P(X) = P(X|第一甲赢)P(一回合甲赢) + P(X|"……乙赢")P(一回合乙赢)$

$P(X|第一回合甲赢) = P(X|\overset{初始}{甲}领先1分)$

$\underline{取条件于"第一局"}$ $P(X|\overset{初始}{甲}领先1分,甲一回合赢)P(甲……赢)$

$+ P(X|甲初始领先1,乙一回合赢)P(乙赢)$

$= 1\cdot p + P(X)\cdot(1-p)$

同理 $P(X|一回合乙赢) = (1-p)\cdot 0 + p\cdot P(X)$

$\Rightarrow P(X) = [p + P(X)(1-p)]p + (1-p)[(1-p)\cdot 0 + p\cdot P(X)]$

$\Rightarrow P(X) = \frac{p^2}{1-2p+2p^2}$ （草稿上验证，$p=\frac{1}{2}$，$P(X)=?$ $\Rightarrow P(X)=\frac{1}{2}$ 较为合理）
$p=0$，$P(X)=0$；$p=1$，$P(X)=1$

Scanned with CamScanner

首先分析可知在奇数回合不产生胜负关系，只有在偶数回合，才会有其中一人比另外一人多2分情况.

(我们说这里"获胜"指代赢2分)

互不相交

$$P(X)=\sum_{i=1}^{\infty}P(\text{在第}2i\text{回合甲获胜})$$

$$\overset{\text{取前一次条件}}{=}\sum_{i=1}^{\infty}\left[P(\text{第}2i\text{--甲-胜}\mid\text{前一回合甲赢})\cdot p+0\cdot(1-p)\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}P(\text{第}2i-1\text{甲领先1分})p$$

同理，再取前一次

$$=\sum_{i=1}^{\infty}P(\text{第}2i-2\text{平局})p^2$$

收敛 $\Rightarrow \lim_{i\to\infty}P(2i-2\text{平局})=0.$

$\therefore$ 由 $P(\text{最终甲获胜})+P(\text{一直平局下去})+P(\text{最终乙胜})=1$

$$\Rightarrow P(\text{最终甲胜})+P(\text{最终乙获胜})=1$$

(注：这里获胜是领先2分结束比赛)

由 $P(X)$ 构造知 $P(\text{最终乙获胜})=\sum_{i=1}^{\infty}P(\text{第}2i-2\text{平局})(1-p)^2$

$$\therefore\ \sum_{i=1}^{\infty}P(2i-2\text{平局})\left(p^2+(1-p)^2\right)=1$$

$$\Rightarrow\sum_{i=1}^{\infty}P(2i-2\text{平局})=\frac{1}{2p^2-2p+1}\Rightarrow P(X)=\frac{p^2}{2p^2-2p+1}$$

注：冯老师/徐助教说有人用Σ什么的做出的，也是一种方法。

3.

(1). $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

$\Rightarrow \int_0^3 \frac{1}{a}x^2\,dx = 1$

$\Rightarrow \quad a = 9$

(2). $Y = \begin{cases} 2, & X \le 1 \\ X, & 1 < X < 2 \\ 1, & X > 2 \end{cases}$ $\underline{\underline{\in [1, 2]}}$ (便于分析, debug 以防算错).

$P(Y=1) = P(X>2) = \int_2^3 \frac{x^2}{9}\,dx = \frac{19}{27}$

$P(Y=2) = P(X\le 1) = \int_0^1 \frac{x^2}{9}\,dx = \frac{1}{27}$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} e^{-\frac{(x-a)^2}{\sigma^2}}$$

$$\frac{1}{2\pi\rho_1\rho_2(1-\rho^2)} e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left(\frac{(x-a)^2}{\sigma^2} - 2r\frac{(x-a)(y-a)}{\sigma_1\sigma_2}\right)}$$

$$F_Y(y) = P(Y\le y) = \begin{cases} 0, & y<1 \\ P(Y=1)+P(1<Y\le y), & 1\le y<2 \\ 1, & y\ge 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & y<1 \\ \frac{19}{27} + \int_1^y \frac{x^2}{9}dx, & 1\le y<2 \\ 1, & y\ge 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & y<1 \\ \frac{18}{27} + \frac{y^3}{27}, & 1\le y<2 \\ 1, & y\ge 2 \end{cases}$$

(3).

$$P(X\le Y) = P(X=Y) + P(Y=2)$$

$$= P(Y\ne 1) = 1-P(Y=1) = \frac{8}{27}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \quad -\frac{1}{2(1-r^2)}\left(\frac{(x-a)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2r(x\ )(\ )}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-a_2)^2}{\sigma_2^2}\right)$$

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}\,\rho_1\rho_1} e \qquad -\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}$$

$$\sqrt{2\pi} \qquad -\frac{1}{2(1-r^2)} \qquad \frac{1}{2\pi\sigma} \qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e$$

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} e$$

(6)

法一：利用二元正态表达式.

$$p(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}\,\sigma_1\sigma_2} e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left(\frac{(x-a_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2r(x-a_1)(y-a_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-a_2)^2}{\sigma_2^2}\right)}$$

显然，$a_1=0$，$a_2=0$

$$p(x,y) = A e^{-\frac{x^2}{2(1-r^2)\sigma_1^2} + \frac{r x y}{(1-r^2)\sigma_1\sigma_2} - \frac{y^2}{2(1-r^2)\sigma_2^2}}$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{2(1-r^2)\sigma_1^2} = -2 & ① \\ \frac{r}{(1-r^2)\sigma_1\sigma_2} = 2 & ② \\ -\frac{1}{2(1-r^2)\sigma_2^2} = -1 & ③ \end{cases}$$

~~①/③：$\sigma_2^2/\sigma_1^2 = 2$，$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \sqrt{2}$~~

$\sqrt{①③}$：$\frac{1}{2(1-r^2)\sigma_1\sigma_2} = \sqrt{2}$ ④

②/④ $\Rightarrow$ $r = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

①：$-\frac{1}{\sigma_1^2} = -2$，$\sigma_1^2 = \frac{1}{2}$

③：$-\frac{1}{\sigma_2^2} = -1$，$\sigma_2^2 = 1$

$\therefore A = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}\,\sigma_1\sigma_2} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot 1} = \frac{1}{\pi}$. ✓

(2). $p_{Y|X}(y|x) = \frac{p(x,y)}{p(x)}$

$p(x,y)$ 题目给了

$p(x) \sim N(0, \sigma_1^2)$

$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{x^2}{2\cdot\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$

$\therefore p_{Y|X}(y|x) = \frac{\frac{1}{\pi} e^{-2x^2+2xy-y^2}}{\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2+2xy-y^2}$ ($y \in R$ ~~[illegible]~~).

法二: $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)\,dx\,dy = 1$

$\Rightarrow$ ~~$A\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\int$~~

观察到先对y积分在配方上更简单.

$A\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(y-x)^2+x^2}\,dy\,dx$)

$e^{-(y-x)^2} = e^{-\frac{(y-x)^2}{2\cdot\frac{1}{2}}}$ 对比 $e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} \Rightarrow \mu = x,\ \sigma^2 = \frac{1}{2}$

添加系数 $\sqrt{2\pi}\sigma \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \Rightarrow$ 积分为 $\sqrt{2\pi}\sigma$

~~$= A\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \ldots e^{\ldots}\,dx$~~

$= A\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x^2+x^2}\cdot\sqrt{\pi}\,dx = A\sqrt{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2\cdot\frac{1}{2}}}\,dx = A\sqrt{\pi}\cdot\sqrt{\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot 2} = A\pi = 1$

$\Rightarrow A = \frac{1}{\pi}$

怎么算 $P(X)$ 呢?

$$P(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} A e^{-2x^2+2xy-y^2} dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} A e^{-x^2+(y-x)^2} dy$$

$$\propto e^{-x^2} = e^{-\frac{x^2}{2\cdot\frac{1}{2}}}$$

$$\Rightarrow X \sim N(0, \tfrac{1}{2})$$

$$\Rightarrow P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\frac{1}{2}}} e^{-\frac{x^2}{2\cdot\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$$

同理 $\Rightarrow P_{Y|X}(y|x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2+2xy-y^2} \quad (y \in R)$.

5. $X, Y \overset{iid}{\sim} Exp(\lambda)$, $U = \min\{X, Y\}$, $V = \max\{X, Y\}$

(1) # 很多人都复习到了，但题目说求密度函数，很多人只求了分布函数.

$$P(U \le u) = 1 - P(\min\{X, Y\} > u)$$
$$\overset{独立}{=} 1 - P(X>u)P(Y>u)$$
$$\overset{iid}{=} 1 - e^{-\lambda u} e^{-\lambda u}$$
$$= 1 - e^{-2\lambda u}$$

$$\Rightarrow f_U(u) = 2\lambda e^{-2\lambda u} \quad (u>0)$$ (没写扣1分，反复强调了).

$$P(V \le x) = P(\max\{X, Y\})$$
$$\overset{独立}{=} P(X \le x)P(Y \le x)$$
$$\overset{iid}{=} (1-e^{-\lambda x})(1-e^{-\lambda x})$$

$$f_V(x) = \lambda e^{-\lambda x}(1-e^{-\lambda x}) \quad (x>0)$$

有人求导求错了，再好好算算.

(2) #这题对于没复习到~~次序统计~~最大、最小值联合分布的同学来说可能会有点
心,,冯老师说他好像讲过。

不过没关系,,这题可用Jacobi. ~~对称~~分类讨论法,

(法一) 先讲群文件里"习题3"提到的证次序统计量联合分布的方法.

$X_{(i)}, X_{(j)}$ 求联合密度 $f_{X_{(i)},X_{(j)}}(x,y)$

设 $X_1 \cdots X_n \overset{iid}{\sim} F(x)$

布局

(i-1个)	x (1个)	(j-i-1个)	y (1个)	(n-j个)
	$X_{(i)}$		$X_{(j)}$	

首先有~~i-1个~~ $X_1, \cdots X_n$ 中有 i-1个处在 $(-\infty, x)$

∴从n中选i-1个 $\binom{n}{i-1}\cdot(F(x))^{i-1}$

剩下n-(i-1)个中选1个处在x位置 $\binom{n-(i-1)}{1} f(x)$

n-i个中选 j-i-1个处在 (x,y): $\binom{n-i}{j-i-1}(F(y)-F(x))^{j-i-1}$

n-i-(j-i-1)中选1个处在y: $\binom{n-j+1}{1} f(y)$

n-j个中选n-j个处在 $(y,+\infty)$: $\binom{n-j}{n-j}(1-F(y))^{n-j}$

(4)

$\because X_1, \cdots X_n$ 独立

$\therefore f_{X_{(i)}, X_{(j)}}(x, y) = \binom{n}{i-1}(F(x))^{i-1} \cdot \binom{n-(i-1)}{1} f(x) \cdot \binom{n-i}{j-i-1}(F(y)-F(x))^{j-i-1} \cdot \binom{n-j+1}{1} f(y)$

$\binom{n-j}{n-j}(1-F(y))^{n-j}$

$= \frac{n!}{(i-1)!\,1!\,(j-i-1)!\,1!\,(n-j)!} F^{i-1}(x) f(x) (F(y)-F(x))^{j-i-1} f(y) (1-F(y))^{n-j}$

那么这题 $i=1$, $j=n=2$

$f_{X_{(1)}, X_{(2)}}(x, y) = \frac{2!}{\cancel{0}} F(x)^0 f(x) (F(y)-F(x))^0 f(y) (1-F(y))^0$

$= 2 \cdot f(x) f(y) = 2\lambda^2 e^{-\lambda(x+y)} \quad (y > x)$ 注意..

设 $Z_1 = U \quad > 0$

$Z_2 = V - U \quad > 0$

$V = Z_1 + Z_2$

$U = Z_1$

$|J| = \left|\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\right| = 1$

$f_{Z_1, Z_2}(z_1, z_2) = 1 \cdot f_{U,V}(z_1, z_1+z_2) = 2\lambda^2 e^{-\lambda(2z_1+z_2)} \quad (z_1 > 0, z_2)$.

$\Rightarrow Z_1, Z_2$ 独立.

法二：对X, Y大小分情况讨论.

① 当 $X=Y$, $P(X=Y) \xlongequal{\text{降维}} 0$ 不考虑.

② 当 $X<Y$, $f_{X,Y}(x,y|X<Y) = \dfrac{f_{X,Y}(x,y)\,I[X<Y]}{P(X<Y)} = 2\lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}$ $(y>x>0)$

$P(X<Y)$ ← 对称性看出为½

$U=X$
$V=Y$

$Z_1=U=X$ ~~$Z_1=X$~~ $=U$
$Z_2=V-U=Y-X$ ~~$Z_2=X+Y$~~, $|J|=1$

$X=Z_1$
$Y=Z_1+Z_2$

$\Rightarrow f_{Z_1,Z_2}(z_1,z_2)=|J|f_{X,Y}(z_1,z_1+z_2|X<Y)$
$= 2\lambda^2 e^{-\lambda(2z_1+z_2)}$ $(z_1>0, z_2>0)$

$\Rightarrow Z_1, Z_2$ 独立

② 当 $Y>X$, 对称性, 同理 Z_1, Z_2 独立

Z_1, Z_2 独立性与X, Y之间大小无关 $\Rightarrow Z_1, Z_2$ 独立

说明

法三：Jacobi 对应两段 $X<Y$, $X>Y$, ($X=Y$ 降维去掉)

两种情况 $|J|=1$ 同上

$f_{X_{(1)},X_{(2)}}(z_1,z_2)= \lambda^2 e^{-\lambda(z_1+z_2)} + \lambda^2 e^{-\lambda(2z_1+z_2)}$ (注 z_1, z_2 为 $X_{(1)}, X_{(2)}$ 的取值)
$= 2\lambda^2 e^{-\lambda(2z_1+z_2)}$ $(z_2>z_1>0)$

同理 … …

六、(1) 考前一天，我发在群里一张检查复习情况的图片里，结果只有一两个人用了，就提到对于这种多维的，首先考虑归纳法。
好多人算那个Jacobi，~~由~~没有人算出来，写出来的，我知道在套结论，不过都给分了。

$\int_{-\infty}^{}\int_{-\infty}^{} f_{X,Y}(x,y)\,dy\,dx$

⑧

$$f_{X+Y}(C)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(C-x)\,dx$$

设 $X\sim N(0,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(0,\sigma_2^2)$ 证 $X+Y\sim N(0,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$

X,Y 独立

$$f_{X+Y}(C)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma_1^2}}e^{-\frac{(C-x)^2}{2\sigma_2^2}}dx$$

$$-\frac{x^2}{2\sigma_1^2}-\frac{(C-x)^2}{2\sigma_2^2}=-\Big(\underbrace{\frac{1}{2\sigma_1^2}+\frac{1}{2\sigma_2^2}}_{A}\Big)x^2+\underbrace{\frac{C}{\sigma_2^2}}_{B}x-\frac{C^2}{2\sigma_2^2}$$

①

$$=-A\left(x-\frac{B}{2A}\right)^2+\frac{B^2}{4A}-\frac{C^2}{2\sigma_2^2}$$

$$\frac{B^2}{4A}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sigma_1^2\sigma_2^2\cdot\frac{C^2}{\sigma_2^4}}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}=\frac{C^2\sigma_1^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)\sigma_2^2}$$

$$\therefore\frac{B^2}{4A}-\frac{C^2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}{2\sigma_2^2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}=-\frac{\sigma_2^2C^2}{2\sigma_2^2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}=-\frac{C^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}$$

$$\therefore f_{X+Y}(C)=\int_{-\infty}^{+\infty}C'e^{-A(x-\frac{B}{2A})^2-\frac{C^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}dx$$

$$\propto e^{-\frac{C^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}\Rightarrow X+Y\sim N(0,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$$

$X\sim N(0,1)$

由 $F(x)=\Phi(x)\Rightarrow F_{a_1X_1}(x)=F_{X_1}\left(\frac{x}{a_1}\right)=\Phi\left(\frac{x}{a_1}\right)$

~~$X_1\sim N(0,1)$~~

$\Rightarrow a_1X_1\sim N(0,a_1^2)$

~~已证~~

$$\therefore a_1X_1+\cdots a_nX_n\sim N(0,a_1^2+\cdots a_n^2)$$

如果复习了老师证过了的结论的话，直接用也给分

$\boxed{10}$

(2)、 $n=6$.

求 $Y=\dfrac{X_1X_2+X_3X_4+X_5X_6}{\sqrt{X_2^2+X_4^2+X_6^2}}$ 分布

我~~算~~以前尝试过求这种，但没求出来。

想了一下 Jacobi，但做不到.

但想看了一下第一题，又联想了一下取条件，好像就是那样

那么，$Y \mid X_2, X_4, X_6 \overset{\text{由(1)结论}}{\sim} N\left(0, \left(\frac{X_2}{\sqrt{X_2^2+\cdots X_6^2}}\right)^2+\left(\frac{X_4}{\sqrt{X_2^2+\cdots}}\right)^2+\left(\frac{X_6}{\sqrt{X_2^2+X_4^2+X_6^2}}\right)^2\right)$

$\sim N(0,1)$ 与 X_2, X_4, X_6 无关

说明不管 X_2, X_4, X_6 取什么值，Y的分布都无关

$\therefore Y \sim N(0,1)$

实际上也易证：
$$f_Y=\iiint \underbrace{f_{Y|X_2,X_4,X_6}}_{\text{独立}} f_{X_2} f_{X_4} f_{X_6} \, dx_2 dx_4 dx_6$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \underbrace{\iiint f_{X_2} f_{X_4} f_{X_6} \, dx_2 dx_4 dx_6}_{1}$$

$\sim N(0,1)$

还可以把 $f_{Y|X_2,X_4,X_6}$ 看成 X_2, X_4, X_6 的函数 $f_Y=E^{X_2,X_4,X_6}\left(f_{Y|X_2,X_4,X_6}\right)=f_{Y|X_2\cdots X_6}\sim N(0$

对 X_2, X_4, X_6 为常数

2017—2018学年《概率论》期中考试试卷

学生所在系________ 姓 名________ 学 号________ 得 分________

一. (30分, 每小题3分) 填空题或单选题, 答案可以直接写在试卷上.

(1) 设随机事件A和B相互独立, A和C相互独立, 且B和C互斥. 若$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B) = 1/2$, $\mathrm{P}(AC|AB \cup C) = 1/4$, 则$\mathrm{P}(C) =$ ________.

(2) 试卷中的某选择题有四个答案, 其中只有一个是正确的. 某考生可能知道哪个是正确的, 也可能是乱猜一个. 假设此考生知道正确答案的概率为$p(0 < p < 1)$, 而在不知答案的情况时会随机地选择一个答案. 若已知该考生答对了这道题, 问其确实知道正确答案的概率是________.

(3) 对任一随机变量X, 下列说法正确的是( ).

A. 若其所有可能的取值范围是区间$(0,1)$, 则它为一个连续型的随机变量

B. 若其分布函数在$(-\infty,\infty)$上处处连续, 则它为一个连续型的随机变量

C. 若其分布函数在$(-\infty,\infty)$上不连续, 则它为一个离散型的随机变量

D. 若X的密度函数$p(x)$存在, 则它的表达式可以不唯一

(4) 设随机变量X服从参数为λ的Poisson分布, 且已知$\mathrm{P}(X=1) = \mathrm{P}(X=2)$, 则$\mathrm{P}(X=3) =$ ________.

(5) 设连续型随机变量 X 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1; \\ ax^2 \ln x + bx^2 + 1, & 1 \le x \le \mathrm{c}; \\ 1, & x > \mathrm{e}, \end{cases}$$

其中a, b为常数, 则它们的积 $ab =$ ________.

(6) 设 $F_1(x), F_2(x)$ 为两个分布函数, 其相应的密度 $p_1(x), p_2(x)$ 是连续函数, 则下列中必为密度函数的是( ).

A. $p_1(x)p_2(x)$ B. $2p_2(x)F_1(x)$

C. $p_1(x)F_2(x)$ D. $p_1(x)F_2(x) + p_2(x)F_1(x)$

(7) 假定一机器的检修时间服从参数为 $\lambda = 1$ 的指数分布(单位: 小时). 若已经检修了 2 小时, 则总检修时间会超过 4 小时的概率为________.

(8) 设X_1, X_2, X_3均服从正态分布, 且$X_1 \sim N(0,1), X_2 \sim N(0,2^2), X_3 \sim N(5,3^2)$, $P_i = \mathrm{P}(-2 \le X_i \le 2)$ $(i = 1,2,3)$, 则( ).

A. $P_1 > P_2 > P_3$ B. $P_2 > P_1 > P_3$

C. $P_3 > P_1 > P_2$ D. $P_1 > P_3 > P_2$

(9) 设$X \sim U(0,1), Y \sim U(0,2)$且它们相互独立, 则$\mathrm{P}(X < Y) =$ ________.

(10) 设X和Y均为Bernoulli随机变量, 若已知

$$\mathrm{P}(X = Y = 0) = 0.4, \quad \mathrm{P}(X = Y = 1) = 0.1,$$

且事件$\{X = 0\}$和$\{X + Y = 1\}$相互独立, 则$\mathrm{P}(X = 0, Y = 1) =$ ________.

二. (10分) 甲乙二人进行网球比赛, 每回合胜者得 1 分, 且每回合甲胜的概率为 $p(0 < p < 1)$, 乙胜的概率为 $1-p$, 比赛进行到有一人比另外一个人多 2 分就终止, 多 2 分者最终获胜, 试求甲最终获胜的概率.

三. (15分) 设随机变量X的密度函数为$p(x) = \frac{1}{a}x^2, 0 < x < 3$, 令随机变量

$$Y = \begin{cases} 2, & X \le 1, \\ X, & 1 < X < 2, \\ 1, & X > 2. \end{cases}$$

(1) 求常数a的值;

(2) 求随机变量 Y 的分布函数$F(y)$;

(3) 求概率 $\mathrm{P}(X \le Y)$.

四. (15分)设二维随机向量(X,Y)的联合密度函数为

$$p(x,y) = A\mathrm{e}^{-2x^2+2xy-y^2}, \quad -\infty < x, y < \infty.$$

(1) 求常数A的值;

(2) 在已知$X = x$的条件下, 求Y的条件密度函数$p_{Y|X}(y|x)$.

五. (20分) 设随机变量X和Y相互独立且均服从参数为$\lambda > 0$的指数分布. 记

$$U = \min\{X,Y\}, \quad V = \max\{X,Y\}.$$

(1) 分别求 U 和 V 的密度函数;

(2) 问 U 和 $V - U$ 是否相互独立? 证明你的结论.

六. (10分) 设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是一列独立同分布的标准正态随机变量, 且$a_1, a_2, \cdots, a_n$是一组不全为0的实常数.

(1) 试求$a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n$的分布;

(2) (附加题, 10分)当 $n = 6$ 时, 试求随机变量

$$Y = \frac{X_1X_2 + X_3X_4 + X_5X_6}{\sqrt{X_2^2 + X_4^2 + X_6^2}}$$

的分布.