装订线 答题时不要超过此线

中国科学技术大学

2023--2024学年第一学期考试试卷

考试科目: 概率论　　　　得分:

学生所在系:______　姓名:　　　学号:______

一、(12 分) 设随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)=3(x-1)^2$, $1<x<2$, 而随机变量 Y 与 X 相互独立且其分布律为

$$Y \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1/6 & 1/3 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

令 $Z=X+Y$. 问 Z 是否为连续型随机变量? 若是, 请计算其密度函数; 若否, 请说明理由.

二、(14 分) 甲乙两人拿两颗骰子做抛掷游戏, 规则如下: 若抛出的点数之和为 3 的倍数, 则下一次原抛掷者继续抛掷; 若抛出的点数之和不是 3 的倍数, 则下一次由另外一位抛掷. 假设第一次由甲抛掷, 求第 n 次仍由甲抛掷的概率 P_n.

三、(24 分) 设随机向量 (X,Y) 服从二维正态分布 $N(0,0;1,1;\rho)$, 即其密度函数为

$$p(x,y)=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2-2\rho xy+y^2)\right\},\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2,$$

其中参数 $\rho\in(-1,0)\cup(0,1)$. 现记 $Z=(Y-\rho X)/\sqrt{1-\rho^2}$.

1. 试求随机向量 (X,Z) 的密度函数;
2. 问 X 与 Z 是否相互独立? Y 与 Z 是否相互独立? 请说明理由.
3. 利用上述结论证明:

$$\mathrm{P}(X>0,Y>0)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2\pi}\arcsin\rho.$$

四、 (14 分) 设随机向量 (X,Y) 服从二维正态分布 $N(0,0;1,1;\rho)$. 给定常数 $r>0$, 定义另外一个随机向量

$$(U,V)=\begin{cases}(X,-Y), & (X,Y)\in B_r,\\ (-X,Y), & (X,Y)\in B_r^c,\end{cases}$$

其中 $B_r=\{(x,y):x^2+y^2\le r^2\}$. 求 (U,V) 的联合分布.

五、 (18 分) 设随机向量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$p(x,y)=kx^2\exp\{-xy^2-y^2+2y-4x\},\quad x>0,\ y\in\mathbb{R},$$

1. 对任意 $y\in\mathbb{R}$, 试证明 X 在给定 $Y=y$ 时服从参数为 3 和 y^2+4 的 Gamma 分布.
2. 对任意 $x>0$, 在给定 $X=x$ 条件下, 试求 Y 的条件分布.

六、 (18 分) 设 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 独立同分布, 共同的分布为参数 $\lambda>0$ 的指数分布 $\mathrm{Exp}(\lambda)$. 记 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 的次序统计量为 $X_{(1)}\le X_{(2)}\le\cdots\le X_{(n)}$, 且记

$$V_i=(n-i+1)[X_{(i)}-X_{(i-1)}],\quad i=1,2,\ldots,n,$$

其中约定$X_{(0)}=0$.

1. 求 $(X_{(1)},X_{(2)},\ldots,X_{(n)})$ 的联合概率密度函数;
2. 证明 $V_1,V_2,\ldots,V_n$ 相互独立;
3. 求 V_i 的概率分布, $i=1,\ldots,n$.