一. (1). $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x} dx = \int (-1)\cdot \frac{1-\cos^2 x}{\cos x} d(\cos x)$ ---2分

$= \int (\cos x - \frac{1}{\cos x}) d(\cos x)$ ---4分 $= \frac{1}{2}\cos^2 x - \ln|\cos x| + C.$ ---6分

---

(2). $\int_0^1 \ln x\, dx = x\cdot \ln x \Big|_{0^+}^1 - \int_0^1 x\, d(\ln x)$ ---2分

$= 0 - 0 - \int_0^1 x\cdot \frac{1}{x} dx$ ---4分 $= -\int_0^1 1\, dx = -1.$ ---6分

---

(3). 由 L'Hospital 法则、变限积分求导公式得：

题中极限 $= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\tan^2 x)\cdot \sec^2 x}{3x^2}$ ---2分

$= \frac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin(\tan^2 x)}{\tan^2 x}\cdot\frac{\tan x}{x}\cdot\frac{\tan x}{x}\right)$ ---4分 $= \frac{1}{3}.$ ---6分

---

(4). 其通解为 $y = e^{\int \frac{2}{x}dx}\cdot\left(\int e^{-\int\frac{2}{x}dx}\cdot 2x^2 dx + C\right)$ ---2分

$= x^2\cdot\left(\int \frac{1}{x^2}\cdot 2x^2 dx + C\right)$ ---4分 $= x^2(C+2x).$ ---6分

---

(5). $L = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$，其收敛半径

$R = \frac{1}{L} = \frac{1}{1} = 1$。易见其收敛点集为区间 $(-1,1)$. ---2分

当 $|x|<1$ 时，和函数 $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n x^n = x\cdot\sum\limits_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$

$= x\cdot\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x^n)' = x\cdot\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n\right)' = x\cdot\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n\right)'$ ---4分

$= x\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{x}{(1-x)^2}.$ ---6分

(其它解法，大致平行对应给分；上述分数段仅供参考)

解答及参考评分标准（其它解法，大致平行对应给分）

二．解：题中旋转体侧面经线为 $r=1+\cos\theta$，$0\le\theta\le\pi$。经线上的弧长微元为 $dl=\sqrt{r^2+r'^2}\cdot d\theta$

$=\sqrt{(1+\cos\theta)^2+\sin^2\theta}\cdot d\theta=\sqrt{2}\cdot\sqrt{1+\cos\theta}\cdot d\theta$. ---2分

故题中旋转体侧面积为

$$S=2\pi\int_\alpha^\beta |y|\,dl=2\pi\int_0^\pi(1+\cos\theta)\cdot\sin\theta\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{1+\cos\theta}\cdot d\theta$$

---4分

$$=2\pi\sqrt{2}\int_0^\pi(1+\cos\theta)^{3/2}\cdot(-1)\,d(1+\cos\theta)\ \xlongequal{1+\cos\theta=t}$$

---6分

$$=2\pi\sqrt{2}\int_0^2 t^{3/2}\,dt=\frac{32}{5}\pi.$$

---8分 ---10分

三．解：（题中方程的特征根为 $\pm2i$）题中方程是如右辅助方程（亦称合成方程）$y''+4y=9x\cdot e^{ix}$ 的虚部。---1分

变量代换 $y=z\cdot e^{ix}$ 将辅助方程转化为方程

$$z''+2iz'+3z=9x \quad \text{------}(*)。$$ ---2分

用待定系数法算得方程(*)的一个特解 $\tilde{z}=ax+b=3x-2i$，因而辅助方程有特解 ------4分

$\tilde{y}_0=\tilde{z}\cdot e^{ix}=(3x-2i)(\cos x+i\sin x)$。分离出 $\tilde{y}_0$ 的虚部，就得到题中方程的一个特解 $\tilde{y}=3x\sin x-2\cos x$。

---6分

对应齐次方程的一个基本解组为 $\{\cos2x,\ \sin2x\}$。

---8分

综合前述，题中二阶常系数线性方程的通解为

$$y=C_1\cos2x+C_2\sin2x+3x\sin x-2\cos x.$$

---10分

(下述分数段仅供参考；其它解法，大致平行对应给分)

四. 解：利用变量代换 $x=\pi-t$，得到

$$I=\int_0^{\pi}\frac{x\cdot\sin x}{\sin x+|\cos x|}dx=\int_0^{\pi}\frac{(\pi-t)\cdot\sin(\pi-t)}{\sin(\pi-t)+|\cos(\pi-t)|}dt$$

$$=\int_0^{\pi}\frac{(\pi-x)\sin x}{\sin x+|\cos x|}dx \quad \cdots 2\text{分}$$，因而 $I=\frac{1}{2}(I+I)=$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{(x+(\pi-x))\cdot\sin x}{\sin x+|\cos x|}dx=\frac{\pi}{2}\cdot\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{\sin x+|\cos x|}dx \quad \cdots 4\text{分}$$

$$\xlongequal[\text{代换 } x=\pi-t]{\text{对右半段积分行}}\pi\cdot\int_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx \ \cdots 6\text{分} \ \xlongequal[x=\frac{\pi}{2}-t]{}\pi\cdot\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x}{\cos x+\sin x}dx, \quad \cdots 8\text{分}$$

故 $I=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}\right)dx=\frac{1}{4}\pi^2$ $\cdots 10$分

五. 解：我们有 $\frac{1}{1-t}=\sum_{n=0}^{\infty}t^n$, $\cdots 2$分 $-1<t<1$，

$$f(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}=\frac{1}{(x+4)-3}-\frac{1}{(x+4)-2}$$

$$=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{x+4}{3}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x+4}{2}} \quad \cdots 4\text{分}$$

$$=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+4}{3}\right)^n+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+4}{2}\right)^n \quad \cdots 6\text{分}$$，即得 $f(x)$

在点 $x_0=-4$ 处的 Taylor 幂级数

$$f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)\cdot(x+4)^n. \quad \cdots 8\text{分}$$

使上述展式成立的 x 的变化范围是：开区间 $(-6,-2)$ $\cdots 10$分

(来自 $\left|\frac{x+4}{3}\right|<1$ 且 $\left|\frac{x+4}{2}\right|<1$)。

六. 解 1). 当 $x>0$ 时, $0<q=\frac{1}{2^x}<1$, 因而级数
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{2^{nx}}=\frac{x}{2^x}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}q^{n-1}$ 收敛, 即题中函数项级数在区间 $I=(0,+\infty)$ 中逐点收敛, 其和 $S(x)=\frac{x}{2^x-1}$.
···2分

2). 如果 $\sum_{n=1}^{\infty}x\cdot 2^{-nx}$ 在区间 $I=(0,+\infty)$ 中一致收敛, 我们将推得矛盾. 实际上, 题中级数在 $x=0$ 处显然是收敛的, ···4分 若它在 I 中一致收敛, 便推知它在区间 $[0,+\infty)$ 中一致 ···6分 收敛, 结合通项皆在 $[0,+\infty)$ 中是连续的, 进而推知和函数 $S(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 中连续 (显见 $S(0)=0$), 这 ······8分 便推得如右矛盾: $\frac{1}{\ln 2}=\lim_{x\to 0^+}S(x)=S(0)=0$.

综上, $\sum_{n=1}^{\infty}x\cdot 2^{-nx}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 中不一致收敛 ····10分

六. 2) 的注释: 也可去证明余和 $r_n(x)=\sum_{k=n+1}^{\infty}u_k(x)=S(x)-S_n(x)=\frac{1}{2^{nx}}\cdot\frac{x}{2^x-1}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 中不一致趋近于零, 当 $n\to\infty$ 时; 利用 $\lim_{x\to 0^+}r_n(x)=\frac{1}{\ln 2}$.

七. 解 1). 显见 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是严格单调递减的正数列. ···2分

任给 $\varepsilon\in(0,1)$, 由于 $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{8}\varepsilon^3)^{-2n}=0$, 因而存在正整数 N_ε 满足: 当 $n>N_\varepsilon$ 时, $(1+\frac{1}{8}\varepsilon^3)^{-2n}<\frac{\varepsilon}{2}$. 故当 $n>N_\varepsilon$ 时有
$$0<a_n=\int_0^{\frac{\varepsilon}{2}}\frac{dt}{(1+t^3)^{2n}}+\int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{1}\text{〃}<\frac{\varepsilon}{2}+(1-\frac{\varepsilon}{2})(1+\frac{1}{8}\varepsilon^3)^{-2n}$$
$<\frac{\varepsilon}{2}+(1+\frac{1}{8}\varepsilon^3)^{-2n}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$, 即得 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$,
$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 是一个 Leibniz 级数, 因而它是收敛的. ···4分

2). $a_n=\int_0^1(1+t^3)^{-2n}dt>\int_0^1(1+t)^{-2n}dt=\frac{1}{2n-1}(1-\frac{1}{2^{2n-1}})$, ···6分

$b_n\overset{\text{记}}{=}\frac{1}{2n-1}(1-\frac{1}{2^{2n-1}})\sim\frac{1}{2n}\ (n\to\infty)$, 故由正项级数比较判别法推知: $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ 一同发散, 进而得知 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散。 ···8分

结合 1) 中结论, 推知 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 是条件收敛的. ···10分

(上述累进分数段仅供参考; 其它解法, 大致平行对应给分)

八．证明　令 x_0 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个最大值点，并用 C，D 分别表示 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值与最大值，则从条件知最大值 $M=f(x_0)>0$，以及 $0<C<D$。

1）由 Stolz 定理推得：若 $x_n>0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l > 0$，则有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdots x_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\exp\left(\frac{\ln x_1+\ln x_2+\cdots+\ln x_n}{n}\right) = e^{\ln l} = l$.

$\cdots$2分

2）显见 $I_n>0$．　由 Schwarz 不等式推得

$$I_n=\int_a^b (f(x))^n\cdot g(x)\,dx \overset{\text{简记}}{=\!=} \int_a^b (f^n\cdot g) = \int_a^b \left(f^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{g}\cdot f^{\frac{n+1}{2}}\sqrt{g}\right)$$

$$\le \left(\int_a^b f^{n-1} g\right)^{1/2}\cdot\left(\int_a^b f^{n+1} g\right)^{1/2} = I_{n-1}^{1/2}\cdot I_{n+1}^{1/2},$$

即 $I_n^2\le I_{n-1}\cdot I_{n+1}$，或 $\frac{I_n}{I_{n-1}}\le\frac{I_{n+1}}{I_n}$，自然数 $n\ge 2$.

故数列 $\left\{\frac{I_{n+1}}{I_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ 是单调递增的．又 $I_{n+1} \overset{\text{简记}}{=\!=} \int_a^b (f^{n+1} g)$ $\cdots$4分

$=\int_a^b (f\cdot f^n g)\le\int_a^b (M f^n g) = M I_n$，即 $\frac{I_{n+1}}{I_n}\le M$，因而数列 $\left\{\frac{I_{n+1}}{I_n}\right\}$ 递增有上界，它是收敛的．　利用1)，我们有 $\cdots\cdots$6分

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{I_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{I_1\cdot\frac{I_2}{I_1}\cdot\frac{I_3}{I_2}\cdots\frac{I_n}{I_{n-1}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{I_{n+1}}{I_n}.$$

3）用 M_n 表示函数 $f(x)$ 在交区间 $[a,b]\cap\left[x_0-\frac{b-a}{n},\ x_0+\frac{b-a}{n}\right] \overset{\text{记}}{=\!=} U_n$ 上的最小值，$n\in\mathbb{N}^+$，则由 f 的连续性知 $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = M$．　注意到，区间 U_n 的长度总是大于或等于 $\frac{b-a}{n}$，利用定积分的保序性推得：$I_n=\int_a^b (f(x))^n\cdot g(x)\,dx$ 满足

$$M_n\cdot\left(\frac{b-a}{n}\right)^{\frac{1}{n}}\cdot C^{\frac{1}{n}} = \left(\int_{U_n} M_n^n\cdot C\cdot dx\right)^{\frac{1}{n}} \le \sqrt[n]{I_n} \le \left(\int_a^b M^n\cdot D\cdot dx\right)^{\frac{1}{n}} = M\cdot(b-a)^{\frac{1}{n}}\cdot D^{\frac{1}{n}},$$

上式中令 $n\to\infty$，并利用夹逼原理得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{I_n}=M$.

$\cdots$8分

综合上述 1), 2), 3) 得到——数列 $\left\{\frac{I_{n+1}}{I_n}\right\}$ 递增有上界，它是收敛的，并且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{I_{n+1}}{I_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{I_n} = \max_{a\le x\le b} f(x).$$

$\cdots$10分

（上述累进分数段仅供参考；其它解法，大致平行对应给分）