迭代法相关证明

Question I:证明定理：若线性方程组的系数矩阵$Ax=b$满足下列条件之一：

（a） A为行严格对角占优阵，即$|a_{ii}|>\sum_{i\neq j}|a_{ij}|, i=1,2,...,n.$

（b） A为列严格对角占优阵，即$|a_{ii}|>\sum_{i\neq j}|a_{ji}|, i=1,2,...,n.$

（c） A为正定对称矩阵

则Gauss-Seidel迭代收敛.

Proof:

(a)、(b):由迭代收敛的充要条件，只需证$\rho(M)<1$，其中$M=-(D+L)^{-1}U$。这里L、D、U分别是A的下三角、对角、上三角部分，满足$L+D+U=A$，并设$Q=D+L$。

由A严格对角占优，则对每个i，有$|a_{ii}|>0$，因此Q可逆。现假设M存在特征值λ，满足$|\lambda|\geq 1$。由λ为M的特征值应有

$$det(\lambda I-M)=0$$

考察$\lambda I-M$

$$\lambda I-M=\lambda I+Q^{-1}U=Q^{-1}(\lambda Q+U)$$

所以

$$det(\lambda I-M)=det(Q^{-1})det(\lambda Q+U)$$

考察$\lambda Q+U$，由于$|\lambda|\geq 1$，显然$(\lambda Q+U)$也是严格对角占优的，因此$(\lambda Q+U)$非奇异。$det(\lambda I-M)\neq 0$，矛盾。所以任取M的特征值有$|\lambda|<1$，即$\rho(M)<1$，证毕。

(c):由下面SOR的收敛性定理可直接推出，取$\omega=1$。 ■

Question II:证明定理：

(a) $0<\omega<2$，是SOR迭代收敛的必要条件

(b) 若A为对称正定矩阵，则当$0<\omega<2$时，SOR迭代恒收敛.

Proof:

(a):设$M_\omega=(D+\omega L)^{-1}[(1-\omega)D-\omega U]$。这里$L$、$D$、$U$分别是$A$的下三角、对角、上三角部分，满足$L+D+U=A$。

因为SOR收敛，所以$\rho(M_\omega)<1$，由所有特征值的模长小于1,可得

$$|det(M_\omega)|<1$$

考察$det(M_\omega)$,由$D+\omega L$可逆可得D可逆，M_ω有如下表示

$$M_\omega=(D+\omega L)^{-1}[(1-\omega)D-\omega U]=(I+\omega D^{-1}L)^{-1}[(1-\omega)I-\omega D^{-1}U]$$

考察行列式

$$det((I+\omega D^{-1}L)^{-1})=1$$

$$det[(1-\omega)I-\omega D^{-1}U]=(1-\omega)^n$$

$$|det(M_\omega)|=|(1-\omega)^n|<1$$

所以$|1-\omega|<1$，即$0<\omega<2$。证毕。

(b):只需证$\rho(M_\omega)<1$.

A对称正定，有$U=L^T$。设λ为M_ω的特征值，x为对应的特征向量。则有

$$(D+\omega L)^{-1}[(1-\omega)D-\omega U]x=\lambda x$$

$$[(1-\omega)D-\omega L^T]x=\lambda(D+\omega L)x$$

考察x^*左乘上式，这里x^*为x的共轭转置。

由于D是正定矩阵的对角元构成的矩阵，可设$x^*Dx=\delta>0$，设$x^*Lx=\alpha+\mathbf{i}\beta$，则$x^*L^Tx=(x^*Lx)^*=\alpha-\mathbf{i}\beta$。再由$A$对称正定，有$x^*Ax=x^*(L+D+L^T)x=\delta+2\alpha>0$,所以有

$$[(1-\omega)\delta-\omega(\alpha-\mathbf{i}\beta)]=\lambda(\delta+\omega(\alpha+\mathbf{i}\beta))$$

两边取模长平方有

$$|\lambda|^2=\frac{[(1-\omega)\delta-\omega\alpha]^2+\omega^2\beta^2}{(\delta+\omega\alpha)^2+\omega^2\beta^2}$$

分子减分母

$$[(1-\omega)\delta-\omega\alpha]^2+\omega^2\beta^2-(\delta+\omega\alpha)^2-\omega^2\beta^2=-\omega\delta(\delta+2\alpha)(2-\omega)<0$$

所以$|\lambda|<1$。证毕。 ■