已修订
21-11-24，13:00

第 4 章　对称性与守恒量

对称性在物理学中有重要作用，不仅可以用来在求解运动方程时简化计算，还可以指导我们构建理论模型。

一、　对称变换与守恒量

通过拉格朗日函数的表达式，我们可以发现一些显见的守恒量，比如广义动量或广义能量。数学家诺特给出了一般性的结论[1]，可以简单叙述为

对拉格朗日系统的任何一个可微对称性，都存在对应的守恒量。

先从坐标变换和对称变换开始讨论。

Emmy Amalie Noether

1882-1935，德国数学家

1.　时空坐标的连续变换

设变换前后的时空坐标之间的关系为

$$t' = \xi_0(t, q, \lambda), \qquad q'_\alpha(t') = \xi_\alpha(t, q, \lambda).$$

其中λ是一组实参数。约定$\lambda = \lambda_0$为恒等变换。

坐标变换的 Jacobi 行列式不为零。

例 四维时空的平移

$$t' = t + a_0$$

$$x'_i = x_i + a_i, \qquad i = 1,2,3.$$

平移参数为零时为恒等变换。

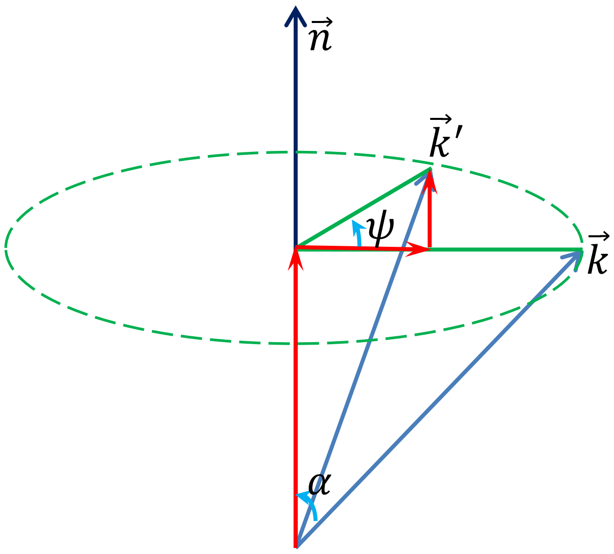
例　三维欧氏空间的转动

如图，绕轴$\vec{n}$旋转ψ角，矢量$\vec{k}$成为$\vec{k}'$。记矢量$\vec{k}$和单位矢量$\vec{n}$的夹角为α。

---

[1] Emmy Noether; Mort Tavel (translator) (1971). "Invariant Variation Problems". Transport Theory and Statistical Physics 1 (3): 186–207. doi:10.1080/00411457108231446. (Original in Gott. Nachr. 1918:235–257)

两条绿色线均垂直于$\vec{n}$,长度为$|\vec{k}-(\vec{k}\cdot\vec{n})\vec{n}|=|\vec{k}|\sin\alpha$，夹角为$\psi$。



矢量$\vec{k}'$可以分解为三个矢量（红色线段）的叠加：

第一个矢量的方向为$\vec{n}$，长度为$k\cos\alpha$；

第二个矢量的方向为$\vec{k}-(\vec{k}\cdot\vec{n})\vec{n}$，长度为$k\sin\alpha\cos\psi$；

第三个矢量的方向为$\vec{n}\times\vec{k}$，长度为$k\sin\alpha\sin\psi$。总之，

$$\vec{k}'=(\vec{k}\cdot\vec{n})\vec{n}+k\sin\alpha\cos\psi\frac{\vec{k}-(\vec{k}\cdot\vec{n})\vec{n}}{k\sin\alpha}+k\sin\alpha\sin\psi\frac{\vec{n}\times\vec{k}}{k\sin\alpha}$$

$$\boxed{\vec{k}'=(\vec{k}\cdot\vec{n})\vec{n}+[\vec{k}-(\vec{k}\cdot\vec{n})\vec{n}]\cos\psi+(\vec{n}\times\vec{k})\sin\psi}$$

上式称为转动公式或罗德里格斯（Rodrigues）公式，

$$\vec{\psi}\stackrel{\text{def}}{=}\psi\vec{n}$$

称为角位移或罗德里格斯参数。

对无穷小的转动$\vec{\psi}=\vec{\epsilon}$，准确到领头项（线性项），

$$\vec{r}'=\vec{r}+\epsilon\vec{n}\times\vec{r}$$

例 伽利略推动（Galilei boost）

伽利略协变是牛顿力学的时空对称性，

$$\begin{cases}t'=t\\x_i'=x_i+v_it\end{cases}$$

其中v_i是两个参考系的速度差。

可见，完整的伽利略需要用 10 个参数描述。

2. 对称变换和准对称变换

定义 在变换前后，作用量不变的（无穷小）时空坐标变换称为**对称变换**，

$$t' = \xi_0(t, q, \lambda), \qquad q'_\alpha = \xi_\alpha(t, q, \lambda).$$

$$\forall q_\alpha(t) \in C^2[t_1, t_2], \lambda \in (\lambda_0 - 0, \lambda_0 + 0), \qquad S(\lambda) = S(\lambda_0)$$

其中

$$S(\lambda_0) = \int_{t=t_1}^{t=t_2} L(t, q, \dot{q}) dt, \qquad S(\lambda) = \int_{t'=t'_1}^{t'=t'_2} L\left(t', q', \frac{dq'(t')}{dt'}\right) dt'$$

等式需要对所有$t_1, t_2 \in \mathbf{R}$成立。

推论：

①对称变换的等价条件是

$$L'(t, q, \dot{q}) \overset{\text{def}}{=} L\left(t', q', \frac{dq'}{dt'}\right)\frac{dt'}{dt} = L(t, q, \dot{q})$$

②对称变换$\Leftrightarrow$ Ldt不变；

③进一步地，如果没有时间膨胀，$dt' = dt$，则拉氏量的保持不变，

$$L(t, q, \dot{q}) = L\left(t, q', \frac{dq'}{dt}\right).$$

证明：①把变换后的泛函积分变量t'代换回t，

$$S(\lambda) = \int_{t'=t'_1}^{t'=t'_2} L\left(t', q', \frac{dq'}{dt'}\right) dt' = \int_{t'=t'_1}^{t'=t'_2} L\left(t', q', \frac{dq'}{dt'}\right)\frac{dt'}{dt} dt = \int_{t=t_1}^{t=t_1} L\left(t', q', \frac{dq'}{dt'}\right)\frac{dt'}{dt} dt$$

定义新的拉格朗日函数为

$$L'(t, q, \dot{q}) \overset{\text{def}}{=} L\left(t', q', \frac{dq'}{dt'}\right)\frac{dt'}{dt}$$

即坐标的变换，可以等价地看成是——坐标不变但 Lagrangian 发生了变化。

取无穷小的积分区间，

$$t_1 \to t, \qquad t_2 \to t + dt$$

作用量不变的要求等价于

$$S(\lambda) = S(\lambda_0)$$

$$\Leftrightarrow L\left(t', q', \frac{dq'}{dt'}\right)\frac{dt'}{dt}dt = L(t, q, \dot{q})dt$$
$$\Leftrightarrow L'(t, q, \dot{q}) = L(t, q, \dot{q})$$

反之，若

$$L'(t, q, \dot{q}) = L(t, q, \dot{q})$$

显然有$S(\lambda) = S(\lambda_0)$，是对称变换。

② 对①两边乘以dt可得。

③ 对①的结论取$dt'/dt = 1$即得。

定义 要保持运动方程不变，只需作用量的变分不变，把前文定义对称变换的条件改成

$$\delta S(\lambda) \equiv \delta S(\lambda_0)$$

满足此条件的时空变换，称之为（无穷小）**准对称变换**。

推论：判断一个坐标变换是否为准对称变换的等价条件是，存在时空变量的函数$\varphi(t, q)$，满足

$$L'(t, q, \dot{q}) \overset{\text{def}}{=} L(t', q', \dot{q}')\frac{dt'}{dt} \equiv L(t, q, \dot{q}) + \frac{d\varphi(t, q)}{dt}$$

证明：坐标变换后的作用量为

$$S(\lambda) = \int_{t'=t_1'}^{t'=t_2'} L\left(t', q'(t'), \frac{dq'(t')}{dt'}\right)dt' = \int_{t=t_1}^{t=t_2} L'(t, q, \dot{q})dt$$

而

$$S(\lambda_0) = \int_{t=t_1}^{t=t_2} L(t, q, \dot{q})dt$$

所以$\delta S(\lambda) \equiv \delta S(\lambda_0)$即（证明列于第二章附录）

$$L'(t, q, \dot{q}) \equiv L(t, q, \dot{q}) + \frac{d\varphi(t, q, \lambda)}{dt}, \qquad \text{（约定}\varphi(t, q, \lambda_0) = 0\text{）}$$

也可以写成

$$L'dt - d\varphi(t, q, \lambda) = Ldt - \varphi(t, q, \lambda_0)$$

坐标变换前后，作用量之差

$$S(\lambda)-S(\lambda_0)=\int_{t_1}^{t_2}L'(t,q,\dot{q})dt-\int_{t_1}^{t_2}L(t,q,\dot{q})dt=\int_{t_1}^{t_2}\frac{d\varphi(t,q,\lambda)}{dt}dt=\varphi(t,q,\lambda)|_{t_1}^{t_2}$$

在哈密顿原理中变分为零。

例 抛物运动，取抛物线所在的平面直角坐标系，向上为正y-轴，

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-mgy$$

则x-方向的平移

$$t'=t,\qquad x'(t')=x(t)+a,\qquad y'(t')=y(t)$$

是对称变换，

$$L(t',x',y',\dot{x}',\dot{y}')dt'=\left\{\frac{1}{2}m\left(\frac{d(x+a)}{dt}\right)^2+\frac{1}{2}m\dot{y}^2-mgy\right\}dt=\left\{\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-mgy\right\}dt$$
$$=L(t,x,y,\dot{x},\dot{y})dt$$

但y-方向的平移

$$t'=t,\qquad x'(t')=x(t),\qquad y'(t')=y(t)+b$$

不是对称变换，而是准对称变换，

$$L(t',x',y',\dot{x}',\dot{y}')dt'=\left\{\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}m\left(\frac{d(y+b)}{dt}\right)^2-mg(y+b)y\right\}dt$$
$$=\left\{\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-mg(y+b)\right\}dt=L(t,x,y,\dot{x},\dot{y})dt-mgbdt$$

3. NOETHER 定理

考虑无穷小的准对称变换

$$\lambda_l=\lambda_{0,l}+\epsilon_l,\qquad \epsilon_l\to 0$$

其中下标l代表多个独立参数。

在单位变换附近展开，

$$t'=\xi_0(t,q,\dot{q},\lambda)=t+\epsilon_l\frac{\partial\xi_0}{\partial\lambda_l}=t+\Delta t\Rightarrow\boxed{\Delta t=\left(\epsilon_l\frac{\partial\xi_0}{\partial\lambda_l}\right)\Big|_{\lambda=\lambda_0}}$$

$$q'_\alpha(t') = \xi_\alpha(t,q,\dot{q},\lambda) = q_\alpha(t) + \epsilon_l \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial \lambda_l} = q_\alpha(t) + \Delta q_\alpha(t) \Rightarrow \boxed{\Delta q_\alpha(t) = \left(\epsilon_l \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial \lambda_l}\right)\Bigg|_{\lambda=\lambda_0}}$$

$$\boxed{\Delta\varphi(t,q) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(t,q,\lambda_0+\epsilon) - \varphi(t,q,\lambda_0) = \left(\epsilon_l \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_l}\right)\Bigg|_{\lambda=\lambda_0}}$$（记号 $\Delta\varphi$不是全变分）

泛函的积分变量t和宗量曲线的形状$q_\alpha(t)$都发生了改变，因此我们用了全变分符号。

按准对称变换的定义，

$$\Delta\varphi(t,q)|_{t_1}^{t_2} = S(\lambda) - S(\lambda_0) = \Delta S$$

而积分型泛函的全变分等于可动边界的变分，

$$\Delta S = \Delta \int_{t=t_1}^{t=t_2} L(t,q,\dot{q})dt = (L\Delta t)|_{t_1}^{t_2} + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\delta q_\alpha\right)\Bigg|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)\delta q_\alpha dt$$
$$= (-H\Delta t + p_\alpha \Delta q_\alpha)|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)\delta q_\alpha dt$$

把拉格朗日方程代入上式，得

$$(-H\Delta t + p_\alpha \Delta q_\alpha - \Delta\varphi)|_{t_1}^{t_2} = 0$$

再由t_1, t_2的任意性，知

$$-H\Delta t + p_\alpha \Delta q_\alpha - \Delta\varphi = \text{constant}$$

不随时间变化。

把$\Delta t, \Delta q_\alpha, \Delta\varphi$代入上式，再由无穷小量$\epsilon_l$的任意性，得

$$\boxed{-H\frac{\partial \xi_0}{\partial \lambda_l} + p_\alpha\left(\frac{\partial \xi_\alpha}{\partial \lambda_l}\right) - \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_l} = \text{constant}}$$

是守恒量。

例 广义动量积分和广义能量积分

如果拉氏量不依赖于某个广义坐标q_α，则空间平移$q'_\alpha = q_\alpha + \lambda_a$是对称变换，

$$L(t,q,\dot{q}) \equiv L(t,q',\dot{q}')$$

由 Noether 定理得

$$p_\alpha = \text{constant}$$

广义动量是守恒量。

若拉氏函数不依赖于时间t，时间平移$t' = t + \lambda$是对称变换，则由 Noether 定理，

$$-H = \text{constant} = -E$$

即广义能量守恒。

例 均匀引力场中的直线运动

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + mgx$$

考虑空间平移，

$$t' = t, \qquad x' = x + \lambda$$

此时

$$L'(x, \dot{x}) = L(x', \dot{x}') = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + mgx + \lambda mg$$

虽然拉氏函数显含坐标x，但平移仍是准对称变换（因为运动方程平移不变）。规范项为

$$\varphi = \lambda mgt + c_0$$

一阶导数为

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda} = mgt$$

由 Noether 定理，有守恒量

$$m\dot{x} - mgt = \text{constant}$$

例 粒子在势场中运动，作用势是坐标的齐次函数，

$$V(\alpha\vec{r}) = \alpha^{-2}V(\vec{r}), \qquad L = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 - V(\vec{r})$$

考虑尺度变换

$$\vec{r}'(t') = \lambda\vec{r}(t), \qquad t' = \lambda^2 t$$

有

$$L\left(t',\vec{r}'(t'),\frac{d\vec{r}'(t')}{dt'}\right)dt'=\left\{\frac{1}{2}m\left(\frac{d\vec{r}'(t')}{dt'}\right)^2-V\big(\vec{r}'(t')\big)\right\}dt'$$

$$=\left\{\frac{1}{2}m\left(\frac{\lambda d\vec{r}(t)}{\lambda^2 dt}\right)^2-\lambda^{-2}V\big(\vec{r}(t)\big)\right\}\lambda^2 dt=\left\{\frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2-V(\vec{r})\right\}dt=Ldt$$

是对称变换。

无穷小变换为

$$\lambda=1+\epsilon$$

$$t'=(1+\epsilon)^2 t=t+2\epsilon t+O(\epsilon^2),\qquad \Delta t=2\epsilon t$$

$$\vec{r}'(t')=(1+\epsilon)\vec{r}(t),\qquad \Delta\vec{r}=\epsilon\vec{r}$$

所以有

$$-H\Delta t+\vec{p}\cdot\Delta\vec{r}=-\left(\frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2+V(\vec{r})\right)\cdot 2\epsilon t+m\dot{\vec{r}}\cdot\epsilon\vec{r}=\epsilon\left\{m\dot{\vec{r}}\cdot\vec{r}-m\dot{\vec{r}}^2 t-2V(\vec{r})t\right\}$$

Noether 守恒量为$m\dot{\vec{r}}\cdot\vec{r}-m\dot{\vec{r}}^2 t-2V(\vec{r})t$。

经典力学中的 Noether 守恒量，在量子力学中一般仍然守恒。

但是如果路径积分的测度在对称变换下改变了，则经典守恒量不是量子力学守恒量（反常 Anomaly）。

4. 质点组的伽利略协变性

设质点组的拉氏函数为

$$L=\sum_i\frac{1}{2}m_i\dot{\vec{r}}_i^2-V(t,\vec{r}_1,\cdots,\vec{r}_N)$$

（1）时间平移

$$\Delta t=\epsilon,\qquad \Delta\vec{r}_i=\vec{0}\Longrightarrow\Delta\dot{\vec{r}}_i=\vec{0}$$

$$L\left(t',\vec{r}'(t'),\frac{d\vec{r}_i'(t')}{dt'}\right)dt'-L\left(t,\vec{r}_i(t),\dot{\vec{r}}_i(t)\right)dt=-\epsilon\frac{\partial V}{\partial t}dt$$

如果是对称变换，即要求

$$\frac{\partial V}{\partial t}=0\Longrightarrow\frac{\partial L}{\partial t}=0$$

从而广义能量守恒。

更一般的，我们只要求时间平移是准对称，这要求$\partial V/\partial t$可积，1-形式$(\partial V/\partial t)dt$的外微分为零，

$$d\left(\frac{\partial V}{\partial t}dt\right)=\frac{\partial^2 V}{\partial t\partial (r_i)_j}d(r_i)_j\wedge dt=0$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial t\partial (r_i)_j}=0,\qquad i=1,2,\cdots,N;j=1,2,3.$$

积分得

$$\frac{\partial V}{\partial t}=f(t)\Longrightarrow V=E(t)+V_0(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\cdots,\vec{r}_N)$$

时间平移是准对称变换。

由诺特定理，

$$-H\Delta t+\vec{p}_i\cdot\Delta\vec{r}_i+\int\epsilon f(t)dt=-\epsilon H+\epsilon E(t)$$

守恒量为

$$H-E(t)=T+V_0(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\cdots,\vec{r}_N)$$

当势能V不依赖于时间t时，时间平移是对称变换，机械能守恒。

（2）空间平移

$$\Delta t=0,\qquad \Delta\vec{r}_i=\vec{\epsilon}\Longrightarrow\Delta\dot{\vec{r}}_i=\vec{0}$$

$$L\left(t',\vec{r}'(t'),\frac{d\vec{r}_i'(t')}{dt'}\right)dt'-L\left(t,\vec{r}_i(t),\dot{\vec{r}}_i(t)\right)dt=-\sum_i\frac{\partial V}{\partial\vec{r}_i}\cdot\vec{\epsilon}\,dt\overset{\text{def}}{=}\vec{\epsilon}\cdot\vec{F}dt$$

其中$\vec{F}$是合力。可积的条件是

$$d\left(\vec{\epsilon}\cdot\vec{F}dt\right)=\epsilon_i\frac{\partial F_i}{\partial\left(r_j\right)_k}d\left(r_j\right)_k\wedge dt=0\Longrightarrow\frac{\partial\vec{F}}{\partial\vec{r}_j}=\mathbf{0}\Longrightarrow\vec{F}=\vec{F}(t)$$

空间平移是准对称变换。

这时由诺特定理，

$$-H\Delta t+\vec{p}_i\cdot\Delta\vec{r}_i-\int\vec{\epsilon}\cdot\vec{F}(t)dt=\vec{\epsilon}\cdot\sum_i\vec{p}_i-\vec{\epsilon}\cdot\int\vec{F}(t)dt$$

守恒量为

$$\sum_i \vec{p}_i - \int \vec{F}(t)dt$$

对时间取微商得动量定理

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}(t)$$

其中$\vec{P}$是质点组的总动量，

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i$$

当合力为零时，空间平移是对称变换，总动量守恒。

（3）空间的无穷小转动

$$\Delta t = 0, \qquad \Delta\vec{r}_i = \epsilon\vec{n} \times \vec{r}_i(t)$$

$$\Longrightarrow \Delta\dot{\vec{r}}_i = \epsilon\vec{n} \times \dot{\vec{r}}_i, \qquad \Delta\dot{\vec{r}}_i^2 = 0 + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

$$L\left(t', \vec{r}_i'(t'), \frac{d\vec{r}_i'(t')}{dt'}\right)dt' - L\left(t, \vec{r}_i(t), \dot{\vec{r}}_i(t)\right)dt = -\sum_i \frac{\partial V}{\partial \vec{r}_i} \cdot \epsilon(\vec{n} \times \vec{r}_i)dt = \epsilon\vec{n} \cdot \sum_i \left(\vec{r}_i \times \vec{F}_i\right)dt$$
$$\stackrel{\text{def}}{=} \epsilon M_{\vec{n}} dt$$

其中$M_{\vec{n}}$是合力矩。可积的条件是

$$\frac{\partial M_{\vec{n}}}{\partial (r_i)_j} = 0, \qquad i = 1,2,\cdots,N; j = 1,2,3.$$

$$M_{\vec{n}} = M_{\vec{n}}(t)$$

这时无穷小转动是准对称变换。

由 Noether 定理，

$$-H\Delta t + \vec{p}_i \cdot \Delta\vec{r}_i - \int \epsilon M_{\vec{n}}(t)dt = \epsilon\vec{n} \cdot \sum_i \left(\vec{r}_i \times m_i\dot{\vec{r}}_i\right) - \epsilon \int M_{\vec{n}}(t)dt$$

第一项是角动量在方向$\vec{n}$的分量，

$$J_{\vec{n}} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{n} \cdot \sum_i \left(\vec{r}_i \times m_i\dot{\vec{r}}_i\right)$$

守恒量为

$$J_{\vec{n}} - \int M_{\vec{n}}(t)\, dt = c$$

上式对时间微商，

$$\frac{dJ_{\vec{n}}}{dt}=M_{\vec{n}}(t),\qquad \frac{d\vec{J}}{dt}=\vec{M}$$

此为角动量定理。当外力矩$\vec{M}=\vec{0}$时，角动量守恒。

（4）伽利略推动

$$\Delta t=0,\qquad \Delta\vec{r}_i=\vec{\epsilon}t$$

$$\begin{aligned}
L'=\sum_i\frac{1}{2}m_i\left(\dot{\vec{r}}_i+\vec{\epsilon}\right)^2-V(t,\vec{r}_1+\vec{\epsilon}t,\cdots,\vec{r}_N+\vec{\epsilon}t)\\
=\sum_i\frac{1}{2}m_i\dot{\vec{r}}_I^2+\vec{\epsilon}\cdot\sum_{\rm i}m_i\dot{\vec{r}}_i+\frac{1}{2}\vec{\epsilon}^2\sum_i m_i-V(t,\vec{r}_1,\cdots,\vec{r}_N)-t\vec{\epsilon}\cdot\sum_i\frac{\partial V}{\partial\vec{r}_i}\\
=L+\vec{\epsilon}\cdot\frac{d}{dt}\sum_{\rm i}m_i\vec{r}_i-t\vec{\epsilon}\cdot\sum_i\frac{\partial V}{\partial\vec{r}_i}+\mathcal{O}(\vec{\epsilon})^2
\end{aligned}$$

$$L'dt-Ldt=\vec{\epsilon}\cdot\sum_i m_i d\vec{r}_i-t\vec{\epsilon}\cdot\sum_i\frac{\partial V}{\partial\vec{r}_i}dt$$

取外积

$$d\left(\vec{\epsilon}\cdot\sum_i m_i d\vec{r}_i-t\vec{\epsilon}\cdot\sum_i\frac{\partial V}{\partial\vec{r}_i}dt\right)=\vec{\epsilon}\cdot\left(-t\sum_i\frac{\partial^2V}{\partial\vec{r}_i\partial\left(r_j\right)_k}d\left(r_j\right)_k\wedge dt\right)=\vec{\epsilon}\cdot\left(t\frac{\partial\vec{F}}{\partial\left(r_j\right)_k}d\left(r_j\right)_k\wedge dt\right)$$

可积的条件是

$$\frac{\partial\vec{F}}{\partial\vec{r}_j}=\vec{0},\qquad j=1,2,\cdots,N$$

当合力与质点的坐标无关时，

$$\vec{F}=-\sum_i\frac{\partial V}{\partial\vec{r}_i}=\vec{F}(t)$$

推动为准对称变换。

此时有

$$-H\Delta t+\vec{p}_i\cdot\Delta\vec{r}_i-\Delta\varphi=\vec{\epsilon}\cdot\left(t\sum_i\vec{p}_i-\sum_i m_i\vec{r}_i-\int t\vec{F}(t)dt\right)=\vec{\epsilon}\cdot\left(\vec{P}t-M\vec{r}_c-\int t\vec{F}(t)dt\right)$$

守恒量为

$$\vec{P}t-M\vec{r}_c-\int t\vec{F}(t)dt$$

其中$\vec{P},M,\vec{r}_C$分别是质心动量、总质量和质心坐标。

定义满足

$$\vec{F}(t) = \vec{0}, \qquad \vec{M}(t) = \vec{0}$$

的参考系为**惯性系**。

惯性系是存在的：通过加速和转动，我们总能从一个坐标系变换到惯性系。

在惯性系，合力为零，推动是对称变换，可以把守恒量改写为

$$\vec{P}t - M\vec{r}_C = \vec{c} \Leftrightarrow \vec{r}_C = -\frac{\vec{c}}{M} + \frac{\vec{P}}{M}t$$

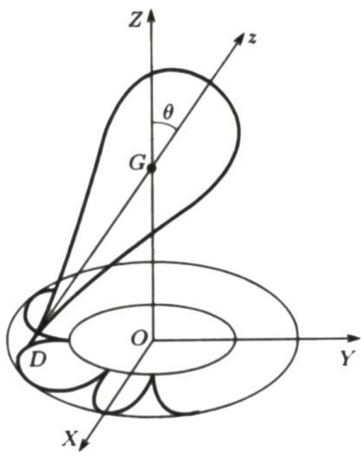
如果$\vec{P}$也是常数（空间平移不变），上式是说质心作匀速直线运动。

前面为了证明刚体的约束是理想约束，我们曾经用到，“封闭体系满足伽利略协变性，而伽利略协变性要求空间转动不变，即角动量守恒，合力矩为零；空间平移不变要求动量守恒，合力为零”。至此我们完成了证明。

有电磁作用的质点组，可以类似地证明。

二、 从模型中寻找对称变换

对称变换对应守恒量。一个给定的拉氏函数，怎么寻找有哪些对称变换？



有些对称性是我们在构建模型时已知的，写出的拉氏量必然允许这些对称变换。例如对称陀螺绕对称轴转动不变，可知角动量在轴向的投影是守恒量。

还有一些对称性可以从拉氏函数的协变性得到。只要Ldt是标量（零阶张量），必然在相应的基矢变换下不变。例如当拉氏量是三维笛卡尔标量时，系统旋转对称。Ldt是洛伦兹标量时，齐次洛伦兹变换必然时对称变换。

如果只有一个（可能）不协变的拉氏函数，没有循环坐标或其它先验知识，想要找到一般对称性，就只能利用对称变换的定义。

无穷小时空坐标变换

$$t' = \xi_0(t, q, \epsilon), \qquad q'_\alpha(t') = \xi_\alpha(t, q, \epsilon)$$

是准对称变换的等价条件为

$$L\left(t', q', \frac{dq'}{dt'}\right)\frac{dt'}{dt} - L(t, q, \dot{q}) = 0$$

$$L\frac{d\eta_0}{dt} + \eta_0\frac{\partial L}{\partial t} + \eta_\alpha\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} + \left(\frac{d\eta_\alpha}{dt} - \dot{q}_\alpha\frac{d\eta_0}{dt}\right)\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = 0$$

其中可微变换的无穷小生成元

$$\eta_0(t, q) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial \xi_0(t, q, \lambda)}{\partial \lambda}\right)\Bigg|_{\lambda=0}, \qquad \eta_\alpha(t, q) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial \xi_\alpha(t, q, \lambda)}{\partial \lambda}\right)\Bigg|_{\lambda=0}$$

求解偏微分方程得出$\eta_0(t, q)$和$\eta_\alpha(t, q)$，可能比直接求解运动方程还要复杂。

三、 伽利略-牛顿时空的物理模型

从前面的例子看到，要求作用量满足特定的对称性（比如推动不变），对拉格朗日函数的形式有很强的限制。这种限制能到什么程度？下面我们导出满足伽利略相对性的单粒子拉格朗日函数（在朗道的《力学》中有简略论述）。

1. 伽利略变换（GALILEI TRANSFORMATION）

伽利略相对性是牛顿时空的对称性，

$$\begin{cases} t' = t + t_0 \\ x_i' = x_i + x_{i0} + R_{ij}x_j + v_i t \end{cases}$$

其中R_{ij}是转动矩阵。

伽利略变换共有 10 个参数：4 个平移参数，3 个转动参数（角位移），3 个相对速度。

2. 伽利略相对性和单粒子模型

（1） 作用量是在时间轴上是定域（local）的，即形式为积分型泛函

$$S[\vec{r}] = \int_{t_1}^{t_2} L\left(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}}\right)dt$$

（2） 拉氏函数可分解成速度线性项与其余项之和，

$$L\left(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}}\right) \equiv L_0\left(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}}\right) + \phi(t, \vec{r}) + A_i(t, \vec{r})\dot{r}_i$$

其中L_0满足

$$L_0\left(t,\vec{r},\vec{0}\right)=0,\qquad \left.\frac{\partial L_0\left(t,\vec{r},\dot{\vec{r}}\right)}{\partial \dot{r}_i}\right|_{\dot{\vec{r}}=\vec{0}}=0$$

并且记

$$\left(A_\mu\right)=\left(\phi,\vec{A}\right),\qquad \mu=0,1,2,3,4$$

（3）　　时间平移不变要求

$$\partial_0 F_{\mu\nu}=0,\qquad \partial_0 L_0=0$$

其中

$$F_{\mu\nu}\overset{\text{def}}{=}\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu,\qquad \partial_0\overset{\text{def}}{=}\frac{\partial}{\partial t}$$

所以拉氏函数的形式为

$$L=\phi(t,\vec{r})+A_i(t,\vec{r})\dot{r}_i+L_0\left(\vec{r},\dot{\vec{r}}\right)$$

（4）　　空间平移不变

$$\partial_i F_{\mu\nu}=0,\qquad \mathrm{i}=1,2,3;\mu,\nu=0,1,2,3$$

$$L=\phi(t,\vec{r})+A_i(t,\vec{r})\dot{r}_i+L_0\left(\dot{\vec{r}}\right)$$

（5）　　空间转动不变

$$\phi=\frac{\partial f(t,\vec{r})}{\partial t},\qquad A_i=\frac{\partial f(t,\vec{r})}{\partial r_i}$$

$$L=L_0\left(\dot{\vec{r}}^2\right)+\frac{df(t,\vec{r})}{dt}$$

（6）　　伽利略推动

$$\begin{cases} t'=t \\ \vec{r}'(t')=\vec{r}+\vec{\epsilon}t \\ \dfrac{d\vec{r}'(t')}{dt'}=\dot{\vec{r}}+\vec{\epsilon} \end{cases}$$

准对称性要求

$$\Delta L=\epsilon_i\left(t\frac{\partial\phi}{\partial r_i}+A_i\right)+\epsilon_i t\frac{\partial A_j}{\partial r_i}\dot{r}_j+\frac{\partial L_0\left(\dot{\vec{r}}^2\right)}{\partial \dot{\vec{r}}^2}2\vec{\epsilon}\cdot\dot{\vec{r}}\equiv\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial r_i}\dot{r}_i$$

比较两边$\dot{\vec{r}}$的系数得

$$
\begin{cases}
\epsilon_i \left(t \dfrac{\partial \phi}{\partial r_i} + A_i \right) = \dfrac{\partial f}{\partial t} \\
\epsilon_i t \dfrac{\partial A_j}{\partial r_i} + \dfrac{\partial L_0(\dot{\vec{r}}^2)}{\partial \dot{\vec{r}}^2} 2\epsilon_j = \dfrac{\partial f}{\partial r_j}
\end{cases}
$$

由第二式知

$$
\frac{\partial L_0(\dot{\vec{r}}^2)}{\partial \dot{\vec{r}}^2} = \text{constant} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}m
$$

总之拉氏函数的形式为

$$
L = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 + \frac{df(t,\vec{r})}{dt}
$$

规范项对运动方程没有贡献，所以拉氏函数规范等价于

$$
L = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2
$$

（7） 物理系统的稳定性要求能量必须有底，

$$
\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = m\dot{\vec{r}}, \qquad H = \vec{p} \cdot \dot{\vec{r}} - L = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 \geq 0
$$

质量m必须为正。

四、 闵氏时空的物理模型

下面我们来寻找满足相对论协变性的单粒子拉格朗日函数。

1. 狭义相对论与 Minkowski 时空

A. Einstein (1905), On the Electrodynamics of Moving Bodies, Annalen der Physik, 17. Translated in Einstein, Lorentz, Minkowski and Weyl (1923).

1. The Principle of Relativity: The laws by which the states of physical systems undergo change are not affected, whether these changes of state be referred to the one or the other of two systems of coordinates in uniform translatory motion.

2. The Principle of the Constancy of the Velocity of Light: Any ray of light moves in the "stationary" system of coordinates with the determined velocity c, whether the ray be emitted by a stationary or a moving body.

时空坐标是矢量[2]

$$x = (x^{\mu}) = (t, x, y, z), \qquad \mu = 0,1,2,3$$

度规张量为

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (g^{\mu\nu})$$

逆变矢量

$$x_{\mu} = g_{\mu\nu} x^{\nu}, \qquad (x_{\mu}) = (t, x, y, z)$$

两个四矢量的内积

$$a \cdot b = g_{\mu\nu} a^{\mu} b^{\nu} = a^0 b^0 - a^1 b^1 - a^2 b^2 - a^3 b^3 = a^0 b^0 - \vec{a} \cdot \vec{b}$$

时空间隔（平方）

$$(x-y)^2 = (x^0 - y^0)^2 - (x^1 - y^1)^2 - (x^2 - y^2)^2 - (x^3 - y^3)^2$$

元时（固有时）的平方

$$(d\tau)^2 = (dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2$$

2. 庞加莱变换

相对论时空中，保持任意两点的时空间隔都不变的变换，必为非齐次线性变换

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu}$$

称为非齐次洛伦兹变换，又称为庞加莱（Poincaré）变换。

共有 10 个参数。a^{μ}是平移参数，$\Lambda = (\Lambda^{\mu}{}_{\nu})$是洛伦兹变换矩阵，并且

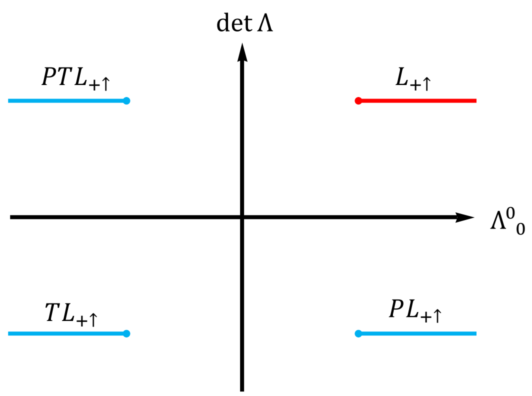
$$\Lambda^{\mathrm{T}} g \Lambda = g$$

称为非齐次洛伦兹变换或庞加莱（Poincaré）变换。

其中满足

$$\det \Lambda = +1, \qquad \Lambda^0{}_0 > 0$$

的齐次线性变换称为恰当顺时洛伦兹变换（proper orthochronous Lorentz transformation，$L_{+\uparrow}$）。



[2] 也称四矢量 four-vector。这里使用自然单位制$c = 1$。

恰当顺时洛伦兹变换包括了恒等变换，并且不改变坐标系的手征，是能够通过连续运动实现的变换。有六个参数，空间转动三个，洛伦兹推动三个。

纯推动 Lorentz pure boost(active)，

$$L_x(v) = \begin{pmatrix} \cosh\eta & \sinh\eta & 0 & 0 \\ \sinh\eta & \cosh\eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma v & 0 & 0 \\ \gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_y(v) = \begin{pmatrix} \cosh\eta & 0 & \sinh\eta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sinh\eta & 0 & \cosh\eta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & \gamma v & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \gamma v & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_z(v) = \begin{pmatrix} \cosh\eta & 0 & 0 & \sinh\eta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh\eta & 0 & 0 & \cosh\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \gamma v \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \gamma v & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

其中η是变换的参数（快度），γ是相对论因子（Lorentz 因子），

$$\eta \in \boldsymbol{R}, \qquad \tanh\eta = v \in (-1,1), \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$$

这里采用的是“主动变换”——原坐标系静止在$(t,\vec{0})$的点，变换到新坐标系后速度为v。

转动

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$R_y(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. 相对论单粒子模型

（1） 设单粒子运动的时空轨迹（世界线 world line）为

$$x^\mu(\lambda), \qquad \mu = 0,1,2,3$$

（2） 作用量是局域的，

$$S[x] = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} L(\lambda, x, \dot{x})\, d\lambda, \qquad \delta S = 0$$

其中

$$\dot{x}^{\mu} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dx^{\mu}}{d\lambda}$$

（3）　令

$$L(\lambda, x, \dot{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(\lambda, x) + A_{\mu}(\lambda, x)\dot{x}^{\mu} + L_0(\lambda, x, \dot{x})$$

其中L_0满足

$$L_0|_{\dot{x}=0} = 0, \qquad \left.\frac{\partial L_0}{\partial \dot{x}^{\mu}}\right|_{\dot{x}=0} = 0$$

（4）　形式参数可以自由定义，不产生实际影响。λ的平移不变性要求

$$\frac{\partial L(\lambda, x, \dot{x})}{\partial \lambda} \equiv \frac{\partial f}{\partial \lambda} + \frac{\partial f}{\partial x^{\mu}}\dot{x}^{\mu}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} + \frac{\partial A_{\mu}}{\partial \lambda}\dot{x}^{\mu} + \frac{\partial L_0}{\partial \lambda} \equiv \frac{\partial f}{\partial \lambda} + \frac{\partial f}{\partial x^{\mu}}\dot{x}^{\mu}$$

对上式取$L|_{\dot{x}=0}$和$\left.\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{\mu}}\right|_{\dot{x}=0}$给出

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} = \frac{\partial f}{\partial \lambda}, \qquad \frac{\partial A_{\mu}}{\partial \lambda} = \frac{\partial f}{\partial x^{\mu}}$$

总之

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} + \frac{\partial A_{\mu}}{\partial \lambda}\dot{x}^{\mu} = \frac{\partial f}{\partial \lambda} + \frac{\partial f}{\partial x^{\mu}}\dot{x}^{\mu}, \qquad \frac{\partial L_0}{\partial \lambda} = 0$$

所以

$$L_0 = L_0(x, \dot{x})$$

（5）　时空平移不变性要求

$$L_0 = L_0(\dot{x})$$

（6）　洛伦兹不变性要求L_0为 Lorentz 标量，

$$L_0 = L_0(\dot{x}^2)$$

（7）　模型与形式参数λ的选取无关，具有参数不变性。

对任意单调函数$\lambda = \lambda(\tau)$，

$$\int_{\lambda=\lambda_1}^{\lambda=\lambda_2} L\left(\lambda, x, \frac{dx}{d\lambda}\right) d\lambda \equiv \int_{\tau=\tau_1}^{\tau=\tau_2} L\left(\tau, x, \frac{dx}{d\tau}\right) d\tau$$

即

$$\int_{\tau=\tau_1}^{\tau=\tau_2} L\left(\lambda(\tau), x, \frac{dx}{d\tau}\frac{d\tau}{d\lambda}\right) \frac{d\lambda}{d\tau} d\tau = \int_{\tau=\tau_1}^{\tau=\tau_2} L\left(\tau, x, \frac{dx}{d\tau}\right) d\tau$$

这相当于要求

$$\int_{\tau=\tau_1}^{\tau=\tau_2} L_0\left(\left(\frac{dx}{d\tau}\frac{d\tau}{d\lambda}\right)^2\right) \frac{d\lambda}{d\tau} d\tau = \int_{\tau=\tau_1}^{\tau=\tau_2} L_0\left(\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2\right) d\tau$$

由积分限的任意性，

$$L_0\left(\left(\frac{dx}{d\tau}\frac{d\tau}{d\lambda}\right)^2\right) \frac{d\lambda}{d\tau} = L_0\left(\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2\right)$$

即

$$\frac{1}{\alpha} L_0(\alpha^2 \dot{x}^2) = L_0(\dot{x}^2), \qquad \forall \alpha \neq 0$$

$$L_0(\alpha^2 \dot{x}^2) = \alpha L_0(\dot{x}^2)$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} (1)\dot{x}^2 > 0, \text{取}\dot{x}^2 = 1 \Longrightarrow L_0(\alpha^2) = \alpha L_0(1) \Longrightarrow L_0(\beta) = \pm L_0(1)\sqrt{\beta}, \qquad (\beta > 0) \\ (2)\dot{x}^2 < 0, \text{取}\dot{x}^2 = -1 \Longrightarrow L_0(-\alpha^2) = \alpha L_0(-1) \Longrightarrow L_0(\beta) = \pm L_0(-1)\sqrt{-\beta}, \qquad (\beta < 0) \\ (3)\dot{x}^2 = 0 \Longrightarrow L_0(0) = \alpha L_0(0) \Longrightarrow L_0(0) = 0 \end{cases}$$

记$m_1 = \pm L_0(1), m_2 = \pm L_0(-1)$因此有拉格朗日函数

$$L_0(\dot{x}^2) = \begin{cases} m_1\sqrt{\dot{x}^2}, & \dot{x}^2 > 0; \\ m_2\sqrt{-\dot{x}^2}, & \dot{x}^2 < 0. \end{cases}$$

其中$m_1, m_2 \in \boldsymbol{R}$。这是两种不同的粒子。

（8） 亚光速粒子

固有时的平方可写成

$$\dot{x}^2(d\lambda)^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = (dt)^2 - (d\vec{r})^2 = (d\tau)^2 = (1 - \vec{v}^2)(dt)^2$$

当$|\vec{v}| < c$时（亚光速粒子，慢子，tardyon，bradyon），记

$$m_1 \to -m$$

作用量为（规范项对运动方程没有贡献，取为零）

$$S[x] = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} L d\lambda = -m\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sqrt{\dot{x}^2} d\lambda$$

$$= -m\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau$$

$$= -m\int_{t=t_1}^{t=t_2} \sqrt{1-\vec{v}^2}dt$$

在以元时为参数时，作用量就是弧长。没有外力时，粒子走短程线。

以时间t为参量的拉氏量为（国际单位制）

$$L(t,\vec{r},\dot{\vec{r}}) = -mc^2\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}$$

于是动量和能量为

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}}, \qquad H = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}}$$

$$H > 0 \Longrightarrow m > 0$$

满足爱因斯坦质能关系（自然单位制，$H \to E$）

$$E^2 - \vec{p}^2 = m^2, \qquad E \stackrel{\text{def}}{=} \gamma m$$

定义四动量（four-momenta）

$$(p^\mu) \stackrel{\text{def}}{=} (E/c\,,\vec{p})$$

和四维速度

$$v^\mu \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dx^\mu}{d\tau} = \left(\frac{dt}{d\tau},\frac{d\vec{x}}{d\tau}\right) = (\gamma,\gamma\vec{v})$$

那么有

$$p^\mu = mv^\mu = (\gamma m, \gamma m\vec{v})$$

其四动量的模长是质量，

$$\sqrt{q^\mu q_\mu} = \sqrt{E^2 - \vec{p}^2} = m$$

是洛伦兹标量。

在恰当顺时洛伦兹变换下，慢子的速度永远小于光速。

（9） 快子（tachyon）

当$|\vec{v}| > c$时，

$$S[x] = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} L d\lambda = mc^2 \int_{t=t_1}^{t=t_2} \sqrt{\frac{\vec{v}^2}{c^2} - 1} dt$$

$$L = mc^2 \sqrt{\frac{\vec{v}^2}{c^2} - 1}$$

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{\frac{\vec{v}^2}{c^2} - 1}}, \qquad H = \frac{mc^2}{\sqrt{\frac{\vec{v}^2}{c^2} - 1}}$$

$$H > 0 \Longrightarrow m > 0$$

满足质能关系

$$E^2 - \vec{p}^2 = -m^2, \qquad E \stackrel{\text{def}}{=} \frac{m}{\sqrt{v^2 - 1}}$$

在恰当顺时洛伦兹变换下，慢子的速度永远大于光速。

（10） 光速粒子（luxon）

在洛伦兹变换下速度永远等于光速，相当于快子和慢子$m = 0$的极限，

$$L_0(0) = 0$$

能动量关系

$$(p^\mu) = (|\vec{p}|, \vec{p})$$

$$E^2 - \vec{p}^2 = 0$$

在拉格朗日力学框架下，无法定义零质量光速质点模型。需要用场描述。

4. 电磁规范场

用形式参数λ描述粒子的运动，设亚光速粒子与外界有相互作用，且可用势能$V(\lambda, x)$描述

$$L = L_0 - V(\lambda, x) = -m\sqrt{\dot{x}^2} + \frac{df}{d\lambda} - V(\lambda, x)$$

由形式参数的平移不变性，$V = V(x)$；而参数不变性（parametrization independent）要求

$$V(x)d\lambda = V(x)\frac{d\lambda}{d\tau}d\tau \equiv V(x)d\tau \Longrightarrow V = 0$$

所以，

非平庸（non-trivial）的作用势必须包含导数$\frac{dx^\mu}{d\lambda}$作为变量。

依赖于广义速度的势能$U(t,q,\dot{q})$称为**广义势能**（Schering 势）。这时拉氏量为

$$L = T(t,q,\dot{q}) - U(t,q,\dot{q})$$

拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial U}{\partial q_\alpha}$$

式子右边为广义力

$$Q_\alpha = \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial U}{\partial q_\alpha}$$

广义力也与速度有关。

现在设粒子在广义势能中运动，拉氏量

$$L = L_0 - U(x,\dot{x}) = -m\sqrt{\dot{x}^2} - U(x,\dot{x})$$

上式已经考虑了形式参数的平移不变性。

最简单的耦合只能取为

$$U(x,\dot{x}) = qA_\mu(x)\dot{x}^\mu$$

其中$\dot{x}$零次项已由形式参数的不变性排除。

这样的广义势能与拉氏函数中的纯规范项

$$\frac{df(x)}{d\lambda} = \left(\partial_\mu f\right)\dot{x}^\mu$$

形式一致。事实上，即使我们写下的拉氏函数中不包含$\dot{x}^\mu$，在另一规范$f(x)$下，作用势仍会出现一次项。所有的规范都是等价的，没有可测的区别。相互作用的形式不变性要求必须包含速度的线性项。

同时，我们也不能先验地认为，广义势能中的线性项一定是纯规范的，

$$A_\mu(x) \neq \partial_\mu f(x)$$

四分量势函数$A_\mu(x)$称为**规范场**。$A_\mu(x)$是描述外部环境对粒子作用的物理量[3]。以时间为自变量，广义势能的形式写成[4]

$$U\left(x,\frac{dx}{d\lambda}\right)d\lambda = qA_\mu(x)\frac{dx^\mu}{d\lambda}d\lambda = qA_\mu(x)\frac{dx^\mu}{dt}dt = q\left[\phi(t,\vec{r}) - \vec{A}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}\right]dt$$

$$U(t,\vec{r},\vec{v}) = q\left[\phi(t,\vec{r}) - \vec{A}\cdot\vec{v}\right]$$

5. 规范不变性和规范条件

受规范作用的亚光速粒子拉氏函数为

$$L(t,\vec{r},\vec{v}) = L_0 - U + \frac{df}{dt} = -m\sqrt{1-\vec{v}^2} - q\left[\phi(t,\vec{r}) - \vec{A}\cdot\vec{v}\right] + q\frac{df}{dt}$$

在低速极限下，

$$L\left(t,\vec{r},\dot{\vec{r}}\right) = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 - q\left[\phi(t,\vec{r}) - \vec{A}\cdot\vec{v}\right] + q\frac{df}{dt}$$

拉氏量中的规范项

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial\vec{r}}\cdot\vec{v}$$

可以任意选取，比如选为 0，这等价于**规范变换**

$$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu f$$

四矢势A_μ的规范变换不改变运动方程，具有不确定性。我们可以通过选取规范项f，使四矢势满足 Lorenz 规范条件[5]

$$\partial_\mu A^\mu = 0$$

或者 Coulomb 规范条件

$$\nabla\cdot\vec{A} = 0$$

这称为规范固定（gauge fixing）。

6. 洛伦兹力

---

[3] 在不同规范下表达式不同，因而不能直接测量。非封闭体系，不要求相对论协变性。
[4] 这种只与电荷有关，与偶极矩、四极矩无关的相互作用，称为最小耦合（minimal coupling）。
[5] 丹麦物理学家 Ludvig Lorenz，不是提出洛伦兹变换的荷兰物理学家 H. A. Lorentz。后者是诺贝尔物理学奖获得者。

设（亚光速）粒子在规范场中运动

$$L\left(t,\vec{r},\dot{\vec{r}}\right)=-m\sqrt{1-\dot{\vec{r}}^{2}}-q\left[\phi(t,\vec{r})-\vec{A}\cdot\dot{\vec{r}}\right]$$

这里打点的负号表示对时间求微商。

广义动量为

$$\vec{p}=\frac{\partial L}{\partial\dot{\vec{r}}}=\frac{m\dot{\vec{r}}}{\sqrt{1-\dot{\vec{r}}^{2}}}+q\vec{A}$$

广义能量

$$H=\vec{p}\cdot\dot{\vec{r}}-L=\frac{m}{\sqrt{1-\dot{\vec{r}}^{2}}}+q\phi(t,\vec{r})$$

Lagrange 方程为

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{\partial L}{\partial\vec{r}}$$

计算得

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=m(1-\vec{v}^{2})^{-\frac{3}{2}}[(1-\vec{v}^{2})\vec{a}+(\vec{v}\cdot\vec{a})\vec{v}]+q\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}+q(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{A}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\vec{r}}=-\frac{\partial U}{\partial\vec{r}}=-q\nabla\phi+q\nabla\left(\vec{v}\cdot\vec{A}\right)$$

$$\begin{aligned}&m(1-\vec{v}^{2})^{-\frac{3}{2}}[(1-\vec{v}^{2})\vec{a}+(\vec{v}\cdot\vec{a})\vec{v}]=-q\nabla\phi-q\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}+q\left[\nabla\left(\vec{v}\cdot\vec{A}\right)-(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{A}\right]\\&=-q\nabla\phi-q\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}+q\vec{v}\times\left(\nabla\times\vec{A}\right)\end{aligned}$$

记电场$\vec{E}(t,\vec{r})$和磁场$\vec{B}(t,\vec{r})$[6]为

---

[6] 符合麦克斯韦方程组的第一、第四式，

$$\begin{cases}\nabla\times\vec{E}+\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}=0\\ \nabla\cdot\vec{E}=\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}\\ \nabla\times\vec{B}-\mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}=\mu_0\vec{j}\\ \nabla\cdot\vec{B}=0\end{cases}$$

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}, \qquad \vec{B} = \nabla\times\vec{A}$$

带电粒子的运动方程成为

$$m(1-\vec{v}^2)^{-\frac{3}{2}}[(1-\vec{v}^2)\vec{a} + (\vec{v}\cdot\vec{a})\vec{v}] = q\vec{E} + q\vec{v}\times\vec{B}$$

式子右边的作用力是洛伦兹力，

$$\vec{F} = q\big(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\big)$$

$$m(1-\vec{v}^2)^{-\frac{3}{2}}[(1-\vec{v}^2)\vec{a} + (\vec{v}\cdot\vec{a})\vec{v}] = \vec{F}$$

$$m[\gamma\vec{a} + \gamma^3(\vec{v}\cdot\vec{a})\vec{v}] = \vec{F}$$

利用矩阵求逆解出加速度，

$$\vec{a} = \frac{1}{\gamma m}\big[\vec{F} - \big(\vec{F}\cdot\vec{v}\big)\vec{v}\big]$$

我们换一种协变的方式来计算。如果定义四维加速度

$$a^\mu \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dv^\mu}{d\tau} = (\gamma^4\vec{v}\cdot\vec{a}, \gamma^2\vec{a} + \gamma^4(\vec{v}\cdot\vec{a})\vec{v})$$

那么

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = ma^\mu = \left(\gamma^4 m\vec{v}\cdot\vec{a}, \frac{d\vec{p}}{dt}\right)$$

把$\vec{a}$代入，得四维牛顿方程

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = F^\mu$$

其中四维力定义为

$$F^\mu \stackrel{\text{def}}{=} \big(\gamma\vec{F}\cdot\vec{v}, \gamma\vec{F}\big)$$

7. 低能极限

对亚光速粒子，动能

$$E=\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}}$$

在$v=0$时取得能量最小值mc^2。

在低能极限下，自由拉氏量

$$L=-m\sqrt{1-\vec{v}^2}=-m\left(1-\frac{1}{2}\vec{v}^2-\frac{1}{8}\vec{v}^4-\frac{1}{16}\vec{v}^6\right)+\mathcal{O}(\vec{v}^8)$$

可取领头项（舍弃无动力学效应的常数项），

$$L=\frac{1}{2}m\vec{v}^2=T$$

动量为

$$\vec{p}=m\vec{v}$$

可见牛顿力学是相对论力学的低速近似，而伽利略协变性是相对论协变性的低速近似。

例 质量为m，电荷为q的粒子在均匀电磁场$\vec{E}=E\vec{e}_y,\vec{B}=B\vec{e}_z$中运动，写出运动方程。

解：在使用库伦规范下，静 EM 场为

$$\vec{A}=\frac{1}{2}\vec{B}\times\vec{r}=\frac{1}{2}B\left(-y\vec{e}_x+x\vec{e}_y\right),\qquad \varphi=-Ey$$

得拉氏函数和运动方程，

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)+qEy+\frac{qB}{2}(x\dot{y}-y\dot{x})\Rightarrow\begin{cases}m\ddot{x}-qB\dot{y}=0\\ m\ddot{y}+qB\dot{x}=qE\\ m\ddot{z}=0\end{cases}$$

8. 电磁场的动力学和耦合*

一般认为物理模型应该是局域作用的。

两个粒子通过势能函数相互作用是一种超距作用。（举例：水面上两个小木块的“相互作用”）

如果要求多个粒子通过电磁场间接地产生相互作用，就需要电磁场能够在时空传播，而不只是拉氏量中的一个已知函数。这就是要求电磁场本身是运动的，拉格朗日函数的变量中必须有A_μ的时空偏导数。

（1）包含电磁场作为动力学自由度的局域作用量为

$$S[A]=\int \mathcal{L}\big(x,A,\partial_\mu A_\nu,\cdots\big)dx^4$$

其中泛函宗量省略了物质场和粒子。

假设拉格朗日密度函数

①只包含规范场的一阶导数；

②是$A,\partial_\mu A_\nu$的二阶多项式；

③相对论协变；

④规范不变。

（2）电磁场的一次项

满足协变性要求的形式只能是

$$\mathcal{L}_{\text{int}}=-j^\mu(x)A_\mu(x)-T^{\mu\nu}(x)\partial_\mu A_\nu(x)$$

规范不变性要求，作规范变换

$$A_\mu(x)\to A_\mu(x)+\partial_\mu f(x)$$

时作用量

$$\int \mathcal{L}_{\text{int}}dx^4$$

的变化变分为零，即只是时空的表面项。

规范变换时拉氏密度的改变为

$$\begin{aligned}
&\delta\mathcal{L}_{\text{int}}=-j^\mu\partial_\mu f-T^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu f=-\partial_\mu(fj^\mu)+f\partial_\mu j^\mu-\partial_\mu(T^{\mu\nu}\partial_\nu f)+\big(\partial_\mu T^{\mu\nu}\big)\partial_\nu f\\
&=-\partial_\mu(fj^\mu)-\partial_\mu(T^{\mu\nu}\partial_\nu f)+f\partial_\mu j^\mu+\partial_\nu\big[\big(\partial_\mu T^{\mu\nu}\big)f\big]-\big(\partial_\mu\partial_\nu T^{\mu\nu}\big)f\\
&=\partial_\alpha\big[\big(\partial_\mu T^{\mu\alpha}\big)f-fj^\alpha-T^{\alpha\nu}\partial_\nu f\big]+f\partial_\mu j^\mu-\big(\partial_\mu\partial_\nu T^{\mu\nu}\big)f\\
&\sim f\big[\partial_\mu j^\mu-\partial_\mu\partial_\nu T^{\mu\nu}\big]
\end{aligned}$$

最后一步利用了高斯散度定理，

$$\int_D\partial_\mu\psi^\mu dx^4=\int_{\partial D}\psi^\mu dS_\mu$$

dS_μ表示四维时空的三维表面面元。如果时空流形无边（指表面为空集，比如二维流形球面的一维边界为空集，有限无边），或者时空表面处的ψ^μ没有法向分量，那么散度项积分为零。

因此

$$\partial_\mu j^\mu - \partial_\mu \partial_\nu T^{\mu\nu} \equiv 0$$

高阶的张量耦合对应多极矩或自旋。可以用无内部结构粒子的最小耦合，来解释张量耦合，

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -j^\mu(x) A_\mu(x)$$

其中j^μ是物质场的守恒流，

$$\begin{gathered}\partial_\mu j^\mu(x) = 0, \qquad (j^\mu) \stackrel{\text{def}}{=} (\rho, \vec{j}) \\ \Leftrightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0\end{gathered}$$

四矢量j^μ的四个分量分别是电荷密度、电流密度。

（3）二阶动力学项

协变性要求

$$\mathcal{L}_0 = c_1 A_\mu A^\mu + c_2 (\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) + c_3 (\partial_\mu A_\nu)(\partial^\nu A^\mu)$$

在规范变换下，

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L}_0 = {} & c_1\left[(\partial_\mu f)(\partial^\mu f) + 2(\partial_\mu f)A^\mu\right] + c_2\left[(\partial_\mu \partial_\nu f)(\partial^\mu \partial^\nu f) + 2(\partial_\mu \partial_\nu f)(\partial^\mu A^\nu)\right] \\ & + c_3\left[(\partial_\mu \partial_\nu f)(\partial^\nu \partial^\mu f) + 2(\partial_\mu \partial_\nu f)(\partial^\nu A^\mu)\right] \\ \sim & c_1\left[-f \cdot (\Box f) - 2f \cdot (\partial_\mu A^\mu)\right] + c_2[f \cdot (\Box^2 f) + 2f(\partial_\nu A^\nu)] + c_3\left[f \cdot (\Box^2 f) + 2f(\partial_\mu A^\mu)\right] \\ \sim & -c_1 f \cdot (\Box f) + (c_2 + c_3)\, f \cdot (\Box^2 f)\end{aligned}$$

其中最后一步取了洛伦兹规范，

$$\delta\mathcal{L}_0 \Longrightarrow c_1 = 0, c_2 = -c_3$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0 &= c_2(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) - c_2(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\nu A^\mu) \\ &= \frac{1}{2} c_2 (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)\end{aligned}$$

定义电磁张量

$$F_{\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \qquad (F_{\mu\nu}) \equiv \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

则

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} c_2 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

（3）电磁场的拉氏密度

能量正定（有底）要求$c_2 < 0$，取

$$c_2 \overset{\text{def}}{=} -\frac{1}{2}$$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{int}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - A_\mu j^\mu$$

（4）拉格朗日方程

只看规范场的变分项，

$$\left.\begin{array}{r} \delta\mathcal{L} = -\dfrac{1}{2} F^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu} - j^\mu \delta A_\mu \\ \left.\begin{array}{r} F^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu} = F^{\mu\nu}\left(\partial_\mu \delta A_\nu - \partial_\nu \delta A_\mu\right) \\ \text{分部积分} \end{array}\right\} \Longrightarrow F^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu} \sim -\left(\partial_\mu F^{\mu\nu}\right) \delta A_\nu + \left(\partial_\nu F^{\mu\nu}\right) \delta A_\mu = -2\left(\partial_\nu F^{\nu\mu}\right) \delta A_\mu \end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow \delta\mathcal{L} \sim \left[\partial_\nu F^{\nu\mu} - j^\mu\right] \delta A_\mu$$

所以

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} = j^\mu$$

取方程$\mu = 0$分量，

$$\partial_\nu F^{\nu 0} = \partial_i F^{i0} = -\partial_i F^{0i} = \partial_1 E_1 + \partial_2 E_2 + \partial_3 E_3 = \nabla \cdot \vec{E}$$

$$\Longrightarrow \nabla \cdot \vec{E} = \rho$$

取$\mu = 1,2,3$分量，

$$\partial_\nu F^{\nu i} = \partial_0 F^{0i} + \partial_k F^{ki} = \frac{\partial(-E_i)}{\partial t} + \partial_k \varepsilon^{kij} B_j$$

$$-\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \nabla \times \vec{B} = \vec{j}$$

这正是 Maxwell 方程组的第二、第三个方程。

（5）单位制

与国际单位制的麦克斯韦方程相比，表达式中缺少真空介电常数ε_0和真空磁导率μ_0。这源于单位约定区别。

如果重新定义电荷和电流的单位，

$$\vec{E} \to \varepsilon_0 \vec{E}, \qquad \vec{B} \to \frac{1}{\mu_0} \vec{B}$$

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \rightarrow \frac{1}{\mu_0}\left(\mu_0 \varepsilon_0 \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)$$

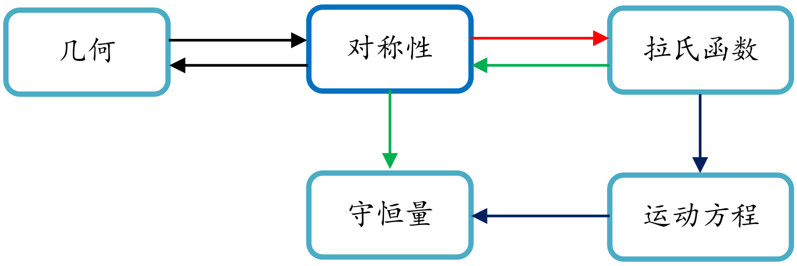
补齐自然单位制省去的光速c，我们可以看到

$$\mu_0 \varepsilon_0 \equiv c^2$$

这是相对论协变性的要求。

五、 对称性与物理学

近代科学的开创时期，伽利略就提出了力学的相对性原理。到爱因斯坦的狭义相对论、广义相对论（“相对”即“对称”），再到李政道、杨振宁发现宇称不守恒，人们逐渐认识到对称性对物理学的重要性。现代物理学中的规范场论、标准模型无不建立在对称性的基础之上。



例 广义相对论，Lovelock 定理

在四维时空中，当拉氏量仅为度规的函数时，不高于二阶的 Euler-Lagrange 方程的形式只能是（$\det g \rightarrow g$）

$$\alpha\sqrt{-g}\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg^{\mu\nu}\right) + \lambda\sqrt{-g}g^{\mu\nu} = E^{\mu\nu}$$

对应拉氏量

$$\mathcal{L} = \alpha\sqrt{-g}R - 2\lambda\sqrt{-g}$$

A. Einstein (1916), The Foundation of the General Theory of Relativity, Annalen der Physik, 49

Hilbert, David (1950). *The Foundations of Geometry [Grundlagen der Geometrie*] (2nd ed.). La Salle, IL: Open Court Publishing.

更一般的拉氏量形式为

$$\mathcal{L} = \alpha\sqrt{-g}R - 2\lambda\sqrt{-g} + \beta\varepsilon^{\alpha\beta\sigma\rho}R^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}R_{\mu\nu\sigma\rho} + \gamma\sqrt{-g}\left(R^2 - 4R^{\mu}{}_{\nu}R^{\nu}{}_{\mu} + R^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}\right)$$

D. Lovelock, Divergence-free tensorial concomitants, Aequ. Math., 4 (1970), p. 127, 10.1007/BF01817753

D. Lovelock, The four-dimensionality of space and the Einstein tensor, J. Math. Phys., 13 (1972), pp. 874-876

Katsuki Aoki, Mohammad Ali Gorji, Shinji Mukohyama, A consistent theory of D → 4 Einstein-Gauss-Bonnet gravity, Physics Letters B, Volume 810, 2020

六、 连续系统的诺特定理*

在标量场$\phi(x)$准对称变换下，作用量的全变分可积，

$$\mathrm{S}[\phi] = \int_{\mathrm{D}} \mathcal{L}\big(x, \phi, \partial_\mu\phi\big) d^4x \to \int_{\mathrm{D}} \mathcal{L}\left(x', \phi'(x'), \frac{\partial\phi(x')}{\partial x'^{\mu}}\right) d^4x'$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{L}'\big(x, \phi, \partial_\mu\phi\big) \overset{\mathrm{def}}{=} \mathcal{L}\left(x', \phi'(x'), \frac{\partial\phi(x')}{\partial x'^{\mu}}\right) \det\left(\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}}\right) \equiv \mathcal{L}\big(x, \phi, \partial_\mu\phi\big) + \partial_\mu\Theta^\mu\big(x, \phi(x)\big)$$

而作用量的全变分为

$$\begin{aligned}
&\Delta S[\phi] = \int_{\mathrm{D}} \mathcal{L}\big(x, \phi, \partial_\mu\phi\big) d^4x \\
&= \int_{\mathrm{D}} \left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\big(\partial_\mu\phi\big)}\right\} \delta\phi d^4x + \int_{\partial\mathrm{D}} \left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\big(\partial_\mu\phi\big)} \delta\phi + \mathcal{L}\Delta x^\mu\right\} d\sigma_\mu \\
&= \int_{\mathrm{D}} \left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\big(\partial_\mu\phi\big)}\right\} \delta\phi d^4x + \int_{\partial\mathrm{D}} \left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\big(\partial_\mu\phi\big)} \Delta\phi - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\big(\partial_\mu\phi\big)} \partial_\nu\phi\Delta x^\nu + \mathcal{L}\Delta x^\mu\right\} d\sigma_\mu
\end{aligned}$$

定义能动量张量

$$T^{\mu}_{\nu} \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\big(\partial_\mu\phi\big)} \partial_\nu\phi - \mathcal{L}g^{\mu}_{\nu}$$

于是

$$\Delta S[\phi] = \int_{\mathrm{D}} \left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\big(\partial_\mu\phi\big)}\right\} \delta\phi d^4x + \int_{\partial\mathrm{D}} \left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\big(\partial_\mu\phi\big)} \Delta\phi - T^{\mu}_{\nu}\Delta x^\nu\right\} d\sigma_\mu \equiv \int_{\partial\mathrm{D}} \Theta^\mu d\sigma_\mu$$

把运动方程代入，得

$$\int_{\partial\mathrm{D}} \left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\big(\partial_\mu\phi\big)} \Delta\phi - T^{\mu}_{\nu}\Delta x^\nu - \Theta^\mu\right\} d\sigma_\mu = 0$$

由边界的任意性，得守恒流，

$$\partial_\mu \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \Delta\phi - T^\mu_\nu \Delta x^\nu - \Theta^\mu \right\} = 0 \propto \partial_\mu j^\mu = 0$$

Dept. Mod. Phys.
2021.11.24
朱界杰