2020-2021 学期理论力学 A 期末考试 (朱界杰)

Author:PB19000246 PB19000232 PB19000261

2021 年 3 月 5 日

一、质量为 m, 位矢为 $\vec{r}$, 动量为 $\vec{p}$ 的质点受到立方反比有心力的作用。其哈密顿函数为 $H=\dfrac{p^2}{2m}-\dfrac{k}{r^2}$, 其中 k 为常数。

(1) 计算泊松括号 $[G, H]$, 其中 $G=\dfrac{\vec{p}\mathring{\mathrm{u}}\vec{r}}{2}-Ht$, t 表示时间，并证明其为运动积分。

(2) 求以 G 为守恒量的无穷小对称变换。

二、已知 n 个质点组成的 Hamilton 体系的 Hamilton 函数为

$$H=\sum_i \frac{p_i^2}{2m_i}+V(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,...t)$$

力学量 $\mathbf{G}$ 满足

$$\mathbf{G}=\mathbf{P}t-M\mathbf{r}_c$$

尝试使用 Poisson Bracket 找出势能 V 所需要满足的条件，使得 $\mathbf{G}$ 为守恒量

三、带电粒子在电磁场中的 Hamilton 函数为

$$H=\frac{(\mathbf{p}-q\mathbf{A})^2}{2m}+q\phi \qquad \mathbf{A}=\mathbf{A}(\mathbf{r},t) \qquad \phi=\phi(\mathbf{r},t)$$

而规范变换引入了一组新的势场，使得原来的电磁场在新的势场下描述不变，引入 $\psi=\psi(\mathbf{r},t)$

$$\mathbf{A}'=\mathbf{A}+\nabla\psi \qquad \phi'=\phi-\partial_t\psi$$

解决下列问题：

(1) 通过 Legendre 变换求出 Lagrange 函数 $L(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}})$

(2) 证明变换

$$\mathbf{r}'=\mathbf{r} \qquad \mathbf{p}'=\mathbf{p}+\nabla\psi$$

为正则变换,并求出生成函数 $F_2(\mathbf{r},\mathbf{p}',t)$,说明该正则变换为什么不存在第一类生成函数 $F_1(\mathbf{r},\mathbf{r}',t)$

(3) 求新 Hamilton 函数 $K(\mathbf{r}',\mathbf{p}')$, 说明其和原来的 Hamilton 函数等价

四、如图, 质量为 m 半径为 a 的圆环绕圆环最上面 O 点旋转,O 点铰链链接固定,C 为圆环中心 OC 与竖直轴的夹角为 60°. 且圆环面始终垂直于 OC 和竖直轴形成的平面。

(1) 圆环绕 O 点旋转的角速度 Ω

(2) 圆环旋转的角动量

(3) O 点作用于圆环的力

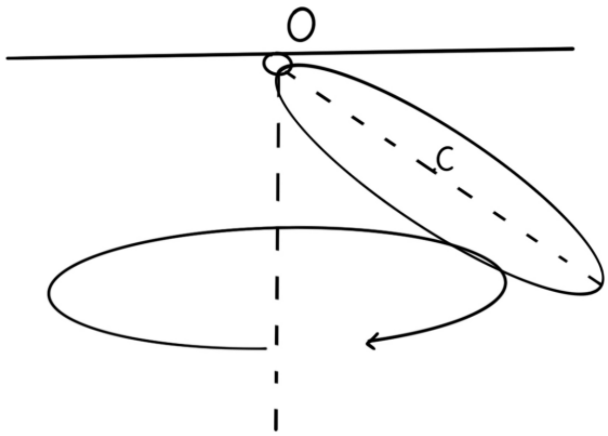

图 1: Problem 3 图

五、用广义坐标 (θ,ϕ) 描述摆长为 l, 摆球质量为 m 的球面摆 (θ 为摆线与铅锤方向的夹角,ϕ 为摆球相对于悬挂点在水平面投影的方位角).

(1) 以 (θ,ϕ) 作为广义坐标写出球面摆的拉氏量, 用 $Legendre$ 变换求出 $Hamilton$ 量并写出相应的 Hamilton 方程

(2) 使用 $Routh$ 变换得出等效拉氏量 $\widetilde{L}(\theta,\dot{\theta})$

(3) 对等效拉氏量 $\widetilde{L}(\theta,\dot{\theta})$ 用 $Legendre$ 变换求出等效 Hamilton 量 $\widetilde{H}(\theta,p_\theta)$

(4) 用 $Hamilton-Jacobi$ 方法求出等效 Hamilton 量 $\widetilde{H}(\theta,p_\theta)$ 的主函数 $S(t,\theta)$

六、某粒子在一无限深方势阱中运动，初始动量为 T_0, 势阱宽度为 a。现将势阱宽度由 a 缓慢变化为 $2a$，求其末态动能 T。其势阱势能分布如下：

$$V=\begin{cases}0 & 0<x<a\\ \infty & x<0,x>a\end{cases}$$