

量物考前 check

by SHAN



Bohr 三个假设:

- ① 定态条件 + 分立轨道假设
- ② 频率条件
- ③ 角动量量子化假设

干涉三个条件:

- ① 存在互相平行的电场分量
- ② 频率相等
- ③ 相差恒定

薛定谔方程

$$\psi(x,t) = \psi_0 \cdot e^{i(kx - \omega t)}$$

$$\text{代入 } E = h\nu = \frac{h}{2\pi} \cdot 2\pi\nu = \hbar \cdot \omega \Rightarrow \omega = \frac{E}{\hbar}$$

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{2\pi} \cdot \frac{2\pi}{\lambda} = \hbar \cdot k \Rightarrow k = \frac{p}{\hbar}$$

$$\Rightarrow \psi(x,t) = \psi_0 \cdot e^{i(px - Et)/\hbar}$$

运算: $i\hbar \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = E \cdot \psi(x,t)$ (算符等价于乘) $E = i\hbar$

$$-i\hbar \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} = p_x \cdot \psi(x,t)$$

$$\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(x,t) = \frac{(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)}{2m} \psi(x,t) = \frac{p^2}{2m} \psi(x,t) = E \psi(x,t)$$

① 对自由粒子, $E = E_k$

$$\Rightarrow i\hbar \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = E \cdot \psi(x,t) = E_k \cdot \psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(x,t)$$

② 势场中粒子, $E = E_k + E_p = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(x,t)$ (记为 Hamilton 量)

\Rightarrow 定态薛定谔方程 $(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(x)) \psi(x) = E \cdot \psi(x)$
解为 $\psi(x,t) = \phi(x) \cdot e^{-iEt/\hbar}$

- 一般薛定谔方程 $(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(x)) \psi(x) = i\hbar \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t}$
↑
一般在复数域内才有解。

物理量均值计算

位置均值: $\bar{x} = \int x \cdot |\psi(x)|^2 dx$

势能均值: $\bar{V} = \int V(x) \cdot |\psi(x)|^2 dx$

但动量均值需在动量表象下计算

坐标表象与动量表象转换:

$$\psi(x) = \sum_{p=\frac{\hbar}{2\pi}} a(p) \cdot e^{ikx/\hbar} \stackrel{k=\frac{p}{\hbar}}{=} \sum \varphi(p) \cdot e^{ipx/\hbar}$$

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{1/2}} \int \varphi(p) \cdot e^{ipx/\hbar} dp$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{1/2}}$$

$$\Rightarrow \varphi(p) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{1/2}} \int \psi(x) e^{-ipx/\hbar} dx$$

$$\Rightarrow \bar{p} = \int \psi^*(p) \cdot p \cdot \varphi(p) dp = \int \psi^* (-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}) \psi dx = \int \psi^* \hat{p} \psi dx$$

$$b = 2.898 \times 10^{-1} \text{ m} \cdot \text{k}$$

$$S_m = 1.22 \frac{\lambda}{D}$$

$$m_e / m_p = 1 / 1836$$

玻尔半径 0.529 \AA

$$\alpha = \frac{1}{137}$$

$$r_n = \frac{n^2}{Z} \cdot a_0 \quad \swarrow \text{0.529 \AA}$$

$$V_n = \frac{Z}{n} \cdot \alpha \cdot c \quad \frac{1}{137}$$

角动量算符

$$\hat{L} = \hat{r} \times (-i\hbar \nabla) = (x, y, z) \times \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$$\% \begin{cases} \hat{L}_x = -i\hbar (y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y}) \\ \hat{L}_y = -i\hbar (z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z}) \\ \hat{L}_z = -i\hbar (x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}) \end{cases}$$



$$-i\hbar (x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x})$$

球坐标:

$$\hat{L}^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right]$$

$$\hat{L}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

本征值

如 $\hat{p} \cdot v = pv \Rightarrow v$ 为 \hat{p} 本征函数

$\hat{L}^2 u = L^2 u \Rightarrow u$ 为 L 的本征函数

对易子:

$$[A, B] \triangleq AB - BA$$

若 $[A, B] = i\hbar \Rightarrow A, B$ 对易 \Rightarrow 两个量可以同时测量

证 \hat{x} 和 \hat{p}_x 对易:

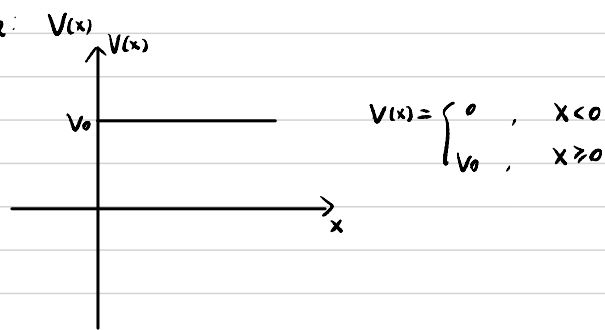
$$\begin{aligned} \hat{p}_x (\hat{x} \psi(x)) &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} (\hat{x} \psi(x)) \\ &= -i\hbar (\psi(x) + x \frac{\partial}{\partial x} \psi(x)) \\ &= -i\hbar \psi(x) + x \cdot (-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}) \psi(x) \\ &= \hat{x} \hat{p}_x \psi(x) - i\hbar \psi(x) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \hat{p}_x \hat{x} =$$

$$\begin{aligned} \hat{p}_x \hat{x} (\psi(x)) &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} (x \psi(x)) \\ &= -i\hbar (\psi(x) + x \frac{\partial}{\partial x} \psi(x)) \\ &= -i\hbar \psi(x) - x \cdot (i\hbar \frac{\partial}{\partial x}) \psi(x) \\ &= -i\hbar \psi(x) + \hat{x} \hat{p}_x \psi(x) \\ &\Rightarrow \hat{x} \hat{p}_x - \hat{p}_x \hat{x} = i\hbar \\ &\Rightarrow x \text{ 与 } p_x \text{ 不可同时精确测量} \end{aligned}$$

- 阶跃势 (一维条件下求解 $[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(x)]\psi(x) = E \cdot \psi(x) \Rightarrow [-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)]\psi(x) = E \cdot \psi(x)$)

势函数:



$$V(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ V_0, & x \geq 0 \end{cases}$$

$x < 0$ 自由粒子.

$$\begin{cases} \psi(x,t) = u(x) \cdot e^{-i\frac{E}{\hbar}t} \\ (-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x))u(x) = E \cdot u(x) \end{cases}$$

i) $x < 0 \Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \cdot u''(x) = E \cdot u(x)$
 $u(x) + \frac{\hbar^2}{2mE} u''(x) = 0$
 $\Rightarrow u(x) = A \cdot e^{i\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \cdot x} + B \cdot e^{-i\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \cdot x}$

ii) $x > 0 \Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \cdot u''(x) = E \cdot u(x) - V_0 \cdot u(x)$
 $u(x) + \frac{\hbar^2}{2m(E-V_0)} u''(x) = 0$
 $u''(x) - \frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2} u(x) = 0$
 $\Rightarrow u(x) = C \cdot e^{k_2 x} + D \cdot e^{-k_2 x}$

有限 $\Rightarrow C=0$

$x=0$ 处连续: $A+B = C+D = D \Rightarrow B = D-A$ ①

$x=0$ 处导数连续: $u'(x) = A \cdot ik_1 + B \cdot (-ik_1)$

$u'(x) = Ck_2 + D \cdot (-k_2) = D \cdot (-k_2)$ (若 $C \neq 0, x \rightarrow \infty, u(x) \rightarrow \infty$)

$\Rightarrow ik_1 \cdot (A-B) = k_2 \cdot (-D)$ ②

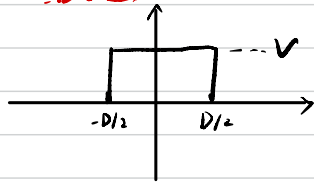
有 $\begin{cases} A+B=D \\ A-B = i \cdot \frac{k_2}{k_1} D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2} (1 + i \frac{k_2}{k_1}) D \\ B = \frac{1}{2} (1 - i \frac{k_2}{k_1}) D \end{cases}$

$\Rightarrow u(x) = \int \frac{1}{2} (1 + i \frac{k_2}{k_1}) D \cdot e^{ik_1 x} + \frac{D}{2} (1 - i \frac{k_2}{k_1}) \cdot e^{-ik_1 x} \cdot e^{-i\frac{E}{\hbar}t}, x < 0$
 $D \cdot e^{ik_2 x}$

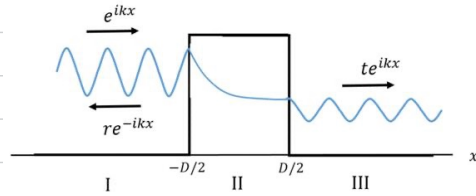
归一化得到波函数.

- ① 有限
- ② 单值
- ③ 连续

二. 一维势垒



$$V(x) = \begin{cases} V, & |x| \leq \frac{D}{2} \\ 0, & |x| > \frac{D}{2} \end{cases}$$



需要注意的是, 这里由于势垒 $V > 0$, 所以不会出现 $E < 0$ 的束缚态, 体系的波函数在空间上是扩展的。系统定态的计算方法与方势阱的情况完全类似。具体的, 当 $V > E > 0$ 时, 我们假定稳定粒子流自左向右从无穷远 $x = -\infty$ 处入射。粒子流经势垒后发生散射, 散射后各分段波函数形式可以写为

$$\phi(x) = \begin{cases} e^{ikx} + re^{-ikx}, & \text{I: } x < -\frac{D}{2} \\ Ae^{kx} + Be^{-kx}, & \text{II: } |x| < \frac{D}{2} \\ te^{ikx}, & \text{III: } x > \frac{D}{2} \end{cases} \quad (3.109)$$

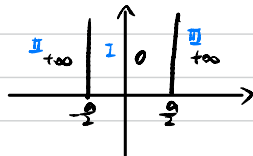
图出的 r, A, B, t 均为实数。

其中 $k = \sqrt{2mE}/\hbar$, $\kappa = \sqrt{2m(V-E)}/\hbar$ 。可以看到, 在区域 I 中, e^{ikx} 对应了入射波, re^{-ikx} 对应反射波; 在区域 II 中, 波函数消逝波的形式指数衰减; 而区域 III 中的波函数仍然取为平面波的形式, 对应粒子透过势垒后的透射波 te^{ikx} 。

粒子穿势垒可能性条件

$$(KD)^2 \frac{V}{4E} \ll 1, \text{ 其中 } K = \frac{\sqrt{2m(V-E)}}{\hbar}$$

三. 一维无限深势阱



$$V(x) = \begin{cases} 0, & |x| < \frac{a}{2} \\ +\infty, & |x| \geq \frac{a}{2} \end{cases}$$

定态薛定谔方程化为: $\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{2m(V-E)}{\hbar^2} \psi(x) = 0$

I 区中, $V=0$, $\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \psi = 0$, 令 $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$

$$\Rightarrow \psi(x) = \begin{cases} A \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right), & n \text{ 奇数}, \quad A = \sqrt{\frac{2}{a}} \\ B \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right), & n \text{ 偶数}, \quad B = \sqrt{\frac{2}{a}} \end{cases}$$

(但如果是 $[0, a]$ 上, 则: $\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$)

这些得到的均为解, 且上述均可作为本征值。

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right) \psi(x) = E \cdot \psi(x)$$

$$\Rightarrow \frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) = (V-E) \psi(x)$$

$$\Rightarrow \psi''(x) - \frac{2m}{\hbar^2} (V-E) \psi(x) = 0$$

$$\psi''(x) + \frac{2m}{\hbar^2} (E-V) \psi(x) = 0$$

$$|x| > \frac{a}{2} \Rightarrow \psi(x) = 0$$

$$|x| < \frac{a}{2} \Rightarrow \psi''(x) + \frac{2m}{\hbar^2} E \psi(x) = 0$$

$$\Rightarrow \psi(x) = A \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} x\right) + B \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} x\right)$$

在边界处

$$\Rightarrow A \cdot \cos\left(-\frac{a}{2} k\right) + B \cdot \sin\left(-\frac{a}{2} k\right) = 0$$

$$A \cdot \cos\left(\frac{a}{2} k\right) + B \cdot \sin\left(\frac{a}{2} k\right) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A \cdot \cos\left(\frac{a}{2} k\right) - B \cdot \sin\left(\frac{a}{2} k\right) = 0 \\ A \cdot \cos\left(\frac{a}{2} k\right) + B \cdot \sin\left(\frac{a}{2} k\right) = 0 \end{cases}$$

作差得 $\Rightarrow \begin{cases} A \cdot \cos\left(\frac{a}{2} k\right) - B \sin\left(\frac{a}{2} k\right) \\ A \cdot \cos\left(\frac{a}{2} k\right) + B \sin\left(\frac{a}{2} k\right) \end{cases}$

$$\Rightarrow 2AB \cos\left(\frac{a}{2} k\right) \sin\left(\frac{a}{2} k\right) = 0$$

$$\frac{ak}{2} = \frac{n\pi}{2} \Rightarrow k = \frac{n\pi}{a}$$

$$\parallel \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{n^2 \pi^2}{a^2} = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

$$\Rightarrow E = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$$

测量

测到物理量 A 得到本征值 λ_a 的概率为 $|C_a|^2$

当 $\langle A \rangle = \sum_a |C_a|^2 \lambda_a$ 后应归一化

玻尔原子模型

惯性离心力 = 库仑力: $\frac{m_e v^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze \cdot e}{r^2}$ ①

Z 是原子核质子数, Ze 即为原子核电量

角动量量子化: $m_e v r = n \cdot \hbar$ ②

对①, 两边同乘 $r^2 \Rightarrow r \cdot (m_e v^2) = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0}$
 $\Rightarrow r = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot m_e v^2}$ ③

由②, $m_e v = \frac{n\hbar}{r}$

③式化为 $r = \frac{m_e}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Ze^2}{(m_e v)^2}$, 再代入上行结论

$\Rightarrow r = \frac{m_e}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Ze^2}{(n\hbar)^2/r^2} = \frac{m_e \cdot Ze^2 \cdot r^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot n^2 \cdot \hbar^2}$

两边消 $r \Rightarrow r = \frac{4\pi\epsilon_0 \cdot n^2 \cdot \hbar^2}{m_e \cdot e^2 \cdot Z} = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2} \cdot \frac{n^2}{Z}$ = 0.529 Å · 1280

于是 $v = \frac{n\hbar}{m_e \cdot r} = \frac{m_e e^2 Z}{4\pi\epsilon_0 n^2 \hbar^2} \cdot \frac{n\hbar}{m_e} = \frac{e^2 Z}{4\pi\epsilon_0 n \hbar} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \cdot \frac{Z}{n} \cdot c$

\downarrow
1/137 (1/137 α)

$v = \alpha \cdot \frac{Z}{n} \cdot c$

$\Rightarrow E = \frac{1}{2} m_e v^2 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze \cdot e}{r}$

$= \frac{1}{2} m_e \left(\alpha c \right)^2 \cdot \frac{Z^2}{n^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot Z \cdot \frac{m_e \cdot e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar^2} \cdot \frac{Z}{n^2}$

$= -\frac{1}{2} m_e \alpha^2 c^2 \cdot \frac{Z^2}{n^2} = -\frac{1}{2} m_e \alpha^2 c^2 \cdot \frac{Z^2}{n^2}$

记一个特定值: $E = -\frac{1}{2} m_e \alpha^2 c^2 \cdot \frac{1^2}{1^2} = -13.6 \text{ eV}$ ($\frac{1}{2} \alpha^2 m_e c^2 = 13.6 \text{ eV}$)

利用该特定值可算各种氢离子和类氢离子能级能量

如核质子数 $Z=3$, 第2轨道

$E = \left(-\frac{1}{2} m_e \alpha^2 c^2 \right) \cdot \frac{3^2}{2^2} = -13.6 \text{ eV} \cdot \frac{9}{4}$

$\lambda_m =$

$\frac{1}{\lambda} = \frac{1836k}{1836k+1} \cdot R_{\infty} \cdot \left(\frac{Z^2}{m^2} - \frac{Z^2}{n^2} \right)$
 \uparrow
 $1.097 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$

\Rightarrow 跃迁: $h\nu = E_n - E_m = \frac{1}{2} \alpha^2 m_e c^2 \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)$, $m < n$

$\frac{1}{\lambda} = \frac{h\nu}{hc} = \frac{\frac{1}{2} \alpha^2 m_e c^2}{hc} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)$

\uparrow
记为 $R_{\infty} = \frac{13.6 \text{ eV}}{hc} = 1.097 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$

故实际 $R = \frac{k \cdot m_p}{m_e + k \cdot m_p} \cdot \frac{\frac{1}{2} \alpha^2 m_e c^2}{hc}$

$= \frac{1}{1 + \frac{m_e}{k \cdot m_p}} \cdot R_{\infty}$

$= \frac{1}{1 + \frac{1}{1836k}} \cdot R_{\infty} = \frac{1836k}{1836k+1} R_{\infty}$

但不准确, 用折合质量 $\mu = \frac{m_e \cdot k \cdot m_p}{m_e + k \cdot m_p}$ 代替 m_e

\uparrow 质子+中子总重 (是 k 个 m_p)

这里用到电子/质子质量比: $1/1836$ (p2)

\uparrow (质子+中子)

$$\frac{n'}{s'} + \frac{n}{s} = \frac{n' - n}{r}$$

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f}$$

$$\left(\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V \right) \psi(x) = E \cdot \psi(x)$$

$$E = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$$

$$P = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

磨鏡公式: 

$$\frac{n'}{s'} + \frac{n}{s} = \frac{n_L - n_1}{r_1} + \frac{n_2 - n_L}{r_2}$$

折射+方程

1. 设在阳光暴晒下，马路上方空气折射率随高度 y 的变化规律为
 $n(y) = n_0(1 + Ay)$
 $A = 0.8 \times 10^{-6} \text{m}^{-1}$
 一人站在马路上向前看，能看到多远？设此人眼睛离地面高度为1.6m。

$$\sin \theta = \frac{1}{1 + Ay}$$

$$\sin 90^\circ \cdot n_0 = \sin \theta \cdot n_0 (1 + Ay)$$

$$\tan \theta = \frac{dx}{dy}$$

$$\cot \theta = \frac{dy}{dx} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

$$= \sqrt{\frac{1 - \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta}}$$

$$\tan \theta = \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \theta - 1}}$$

$$2 \frac{1}{\sin \theta} = 1 + Ay$$

$$x = \int_0^h dx$$

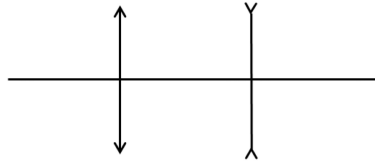
$$= \int_0^h \frac{1}{\sin \theta} dy$$

$$= \int_0^h \sqrt{\frac{1}{1 - \sin^2 \theta}} dy$$

透镜

物距 像距
物方焦距 像方焦距

2. 一个凸透镜和一个凹透镜组成共轴光学组。这两个薄透镜相距100cm，焦距均为50cm。求系统的物方焦距和像方焦距。



波函数

5. 单色平面波在 $y-z$ 平面内，沿着与 y -轴夹角为 30° 方向传播，写出它的标量波函数、复波函数和复振幅。

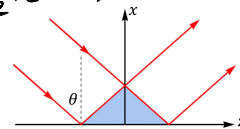
$$\phi(\vec{r}, t) = E \cdot \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \phi_0)$$

$$\varphi(\vec{r}, t) = E \cdot e^{-i\omega t} \cdot e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \phi_0)}$$

波函数

6. 如图，一列波矢量在 $x-z$ 平面的平面波，入射后在的分界面 $x=0$ 处发生反射。求反射波和入射波重叠区光矢量的复振幅。

复振幅 $E_0 \cdot e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$



干涉

7. 产生干涉的相干光，必须来自同一发光原子、同一次发射的波列，解释其理由。

干涉条纹移动

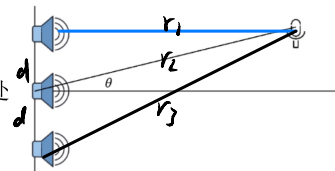
8. 用很薄的云母片覆盖在双缝实验的一条缝上，看到干涉条纹移动了9个条纹间距，求云母片的厚度。已知云母片折射率 $n = 1.58$ ，光源波长550nm。

$$(n-1) \cdot h = 9\lambda$$

光波叠加

9. 三个扬声器排成直线，相距 d ，播放单频声音信号
 $s_j(t) = A \cos(\omega t + \varphi_j), j = 1, 2, 3$

远处一个麦克风在夹角为 θ 的方向接收声音。欲使麦克风处消音，三个初相位 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ 应该满足什么关系？



复振幅叠加为0

$$r_1 \approx r_2 - d \sin \theta$$

$$r_3 \approx r_2 + d \sin \theta$$


$$\Rightarrow r_1 \approx r_2 \approx r_3$$

$$\frac{A}{r_1} e^{i(kr_1 + \varphi_1)} + \frac{A}{r_2} e^{i(kr_2 + \varphi_2)} + \frac{A}{r_3} e^{i(kr_3 + \varphi_3)} = 0 \Rightarrow e^{i(kr_1 + \varphi_1)} + e^{i(kr_2 + \varphi_2)} + e^{i(kr_3 + \varphi_3)} = 0$$

幅角依次相差 2π

劈尖干涉

10. 两块平板玻璃叠合在一起，一端接触，在离接触线 12.5cm 处用金属细丝垫在两板之间。用波长 546nm 的单色光垂直入射，测得条纹间距为 1.50mm。求细丝的直径。



$$dL = 2n\lambda \tan\theta = k\lambda + \frac{1}{2}\lambda$$

$$\Rightarrow x = \frac{k\lambda + \frac{1}{2}\lambda}{2n \tan\theta}$$

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2n \tan\theta}$$

干涉, 增透膜

12. 在折射率为 1.5 的玻璃表面，镀上一层折射率为 1.30 的透明薄膜。对于 550nm 的黄绿光垂直入射的情形，为了增强透射光束强度，应使反射光干涉相消。求膜的厚度。



干涉波

$$2dn_2 = (k + \frac{1}{2})\lambda$$

$$\Rightarrow n_2 = \frac{\lambda}{4d}, d = \frac{\lambda}{4n_2}$$

夫琅禾费单缝衍射

★ 暗条纹位置

$$\sin\alpha = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = m\pi$$

$$\sin\theta = m \cdot \frac{\lambda}{a}$$

13. 用波长 589.3nm 的钠黄光作为夫琅禾费单缝衍射的光源，测得第二极小到干涉图样中心的距离为 0.30cm。改用未知波长的单色光源，测得第三极小到中心的距离为 0.42cm。求未知波长。

$$\sin\theta = \frac{\alpha}{L}$$

$$\sin\theta = m \cdot \frac{\lambda}{a} \Rightarrow m \cdot \frac{\lambda}{a} = \frac{\alpha}{L}$$

$$\textcircled{1} 2 \cdot \frac{\lambda_1}{a} = \frac{x_1}{L}$$

$$\textcircled{2} 3 \cdot \frac{\lambda_2}{a} = \frac{x_2}{L}$$

衍射-爱里斑

$$\theta_m = 1.22 \frac{\lambda}{D}$$

↑ 极小衍射角

λ 波长

D 直径

14. 评估你的手机像素数目是否超过了镜头的光学衍射极限。估算所需的参数，如手机摄像头模组的光圈系数、像素、CMOS 图像传感器的尺寸等，请自行在网络上搜索。

15. 天空的两颗星相对于望远镜的角距离为 4.8×10^{-6} rad，都发出 550nm 的光。望远镜的口径至少多大，才能分辨这两颗星？

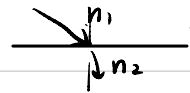
$$\theta_m = 1.22 \cdot \frac{\lambda}{D}$$

布儒斯特角

$$\theta_B = \arctan\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$$

19. 有一空气-玻璃界面，光从空气一侧入射时，布儒斯特角是 58° ，求光从玻璃一侧入射时的布儒斯特角。

$$\theta_B = \arctan\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$$



黑体辐射, 维恩位移定律

$$\lambda_m = \frac{b}{T}, b = 2.898 \times 10^{-3} \text{ m}\cdot\text{K}$$

↑ 强度最大的波长

22. 热核爆炸中火球的温度可达 10^7 K,

- 求辐射最强的波长;
- 这种波长的光子能量是多少?

$$\lambda_m = \frac{b}{T}, b = 2.898$$

类氢原子能级跃迁

$$E_n = -\frac{1}{2} m_e c^2 \frac{Z^2}{n^2} = -13.6 \text{ eV}$$

1. 已知氢原子的电离能为 13.6eV, 求 B^{4+} 离子从 $n = 2$ 能级跃迁到基态的辐射能量、波长。

$$E = (-13.6 \text{ eV}) \cdot \frac{Z^2}{n^2}$$

类氢原子能级跃迁

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{13.6 \text{ eV}}{13.6 \text{ eV} + 1} \cdot R_{\infty} \cdot \left(\frac{Z^2}{m^2} - \frac{Z^2}{n^2} \right)$$

\uparrow
 $1.097 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$

2. 某种类氢离子的光谱中, 已知属于同一线系得三条谱线波长为 99.2nm, 108.5nm 和 121.5nm. 可以预言还有那些光谱线?

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \cdot \left(\frac{Z^2}{m^2} - \frac{Z^2}{n^2} \right)$$

类氢原子能级跃迁

4. 要使处于基态的氢原子受激发后, 能发射莱曼系最长波长的谱线, 则至少需向氢原子提供多少能量?

$$E = (-13.6 \text{ eV}) \times \left(\frac{1}{2} - 1 \right)$$

类氢原子能级跃迁

能量守恒
光子能量 $E = \frac{hc}{\lambda}$
动量 $p = \frac{h}{\lambda}$

6. 设氢原子原来是静止的。当氢原子从 $n = 4$ 的态跃迁到基态时, 给出原子的反冲速度、发射光子的波长, 并与不考虑反冲时的光子波长对比。

$$\begin{aligned} \Delta E &= (-13.6 \text{ eV}) \cdot \left(\frac{1}{16} - 1 \right) \\ \Delta E &= E_{\text{光子}} + E_{\text{原子}} = \frac{p^2}{2m} + \frac{hc}{\lambda} \\ p_{\text{光子}} &= p_{\text{原子}} \Rightarrow p = \frac{h}{\lambda} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2m} \cdot \frac{h^2}{\lambda^2} + \frac{hc}{\lambda} = \frac{5}{16} \times 13.6 \text{ eV}$$

$\Rightarrow \lambda$

电子能量动量

$$p = \frac{h}{\lambda}, E = \frac{p^2}{2m}$$

1. 当电子的德布罗意波长与可见光波长 ($\lambda = 550 \text{ nm}$) 相同时, 求它的动能是多少电子伏。

$$p = \frac{h}{\lambda}, E = \frac{p^2}{2m}, m = 9.109 \times 10^{-31} \text{ kg}$$

2. 显微镜可以分辨的最小尺寸约为光波的波长。电子显微镜的电子束能量为 50keV, 计算这种电子显微镜的最高分辨本领。

$$E = \frac{p^2}{2m}$$

波函数 \rightarrow 几率密度

$$p = |\psi(x, y, z)|^2$$

3. 设一个二维量子系统在 $t = 0$ 时的波函数为

$$\psi(x, y, t = 0) = (x + iy) \exp\{-(x^2 + y^2)\}, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

求几率密度。

共轭化!
再积分

波函数归一化

4. 一维空间中粒子的波函数若为 $\psi(x) = e^{-|x|}$, ($x \in \mathbb{R}$)

- (1) 求归一化的波函数,
- (2) 求动量表象的波函数 $\varphi(p)$ 。

波函数坐标表象
动量表象

① 归一化

$$\textcircled{2} \varphi(p) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \right) \iiint_{\mathbb{R}} \psi(x) \cdot e^{-i \frac{p}{\hbar} x} dx dy dz$$

$$\text{一维} \Rightarrow \varphi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} \cdot e^{-i \frac{p}{\hbar} x} dx$$

不确定关系：
 $\Delta p \cdot \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}$
 动量的量

7. 下列非相对论粒子被限制在宽为L的盒子中。利用海森堡不确定关系估算它们的动能最小值：

- a) 电子关在 $L = 1 \text{ \AA}$ 的盒子。
 - b) 中子 (质量 $940 \text{ MeV} \cdot c^{-2}$) 限制在 $L = 10 \text{ fm}$ (原子核尺寸) 的盒子中。
 - c) 质量 10^{-6} g 的灰尘被关在 $L = 1 \mu\text{m}$ 的盒中。
- Handwritten notes:* $\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$ (一个方向), 算动能, 需要 $(\Delta p_x^2 + \Delta p_y^2 + \Delta p_z^2)$

定态波函数的本征值

8. 证明若要保证波函数演化过程中始终保证满足归一化条件, 则定态波函数的对应的本征值必为实数。

$$\Psi(x,t) = \phi(x) \cdot e^{i \frac{E}{\hbar} t}, \quad \omega = \frac{E}{\hbar}$$

薛定谔定态方程线性性

9. 试证明, 对任意满足定态方程

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x) \quad (1)$$

的解 $\psi(x)$, 定态波函数 $\psi(x)$ 总可以取为实数。【提示: 考察复共轭 $\psi(x)^*$, 从而总可以构造实数解 $\psi + \psi^*$ 和 $i(\psi - \psi^*)$ 。】

Handwritten notes: 取复共轭得 (1)
 $\Rightarrow 0 + 0, (0 - 0) \cdot i$ 是实数

10. 证明定态薛定谔方程的本征值必然不小于势能函数的最小值。【提示: 利用波函数平方可积条件, 证明动能的平均值必然不小于零。】

$$E = E_k + V \in E_k > 0$$

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} = p$$

波函数归一化
 计算算符平均值

12. 一维无限深势阱中粒子的初始波函数为两个定态的叠加 $\psi(x,0) \sim \phi_1(x) + i\phi_2(x)$

- a) 归一化上述波函数;
- b) 求时间演化状态 $\psi(x,t)$, 并计算 $|\psi(x,t)|^2$;
- c) 计算算符平均值 $\langle x \rangle, \langle x^2 \rangle, \langle p \rangle, \langle p^2 \rangle$;
- d) 计算系统能量的平均值。如果测量粒子的能量, 则得到什么结果, 相应的几率是多少?

Handwritten notes: $\int |\phi_1(x)|^2 dx = 1$
 $\Rightarrow \int |\psi(x,0)|^2 dx = 2 \Rightarrow \psi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1 + i\phi_2)$

Handwritten notes: $\langle x \rangle = \frac{a}{2}$, $\langle p \rangle = i\hbar \frac{d}{dx}$

Handwritten notes: $\langle x^2 \rangle =$
 $\langle p \rangle = 0$
 $\langle p^2 \rangle =$

一维无限深势阱

13. 一维无限深势阱中, 若假定势能函数取值范围为 $[0, a]$, 试证明基态波函数为

$$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a}$$

若此时粒子的初始波函数形式为 $\psi(x,0) = A \sin^3 \frac{\pi x}{a}$, 试求 A 及 $\psi(x,t)$, 并计算平均值 $\langle x \rangle, \langle p \rangle$ 。

$$\Psi(x,t) = A \phi_1(x) \cdot e^{i\omega_1 t} + B \phi_3(x) \cdot e^{i\omega_3 t}$$

测量、均值

一维无限深势阱

14. 一个质量为 m 的粒子处在一维无限深势阱的基态上。若势阱的宽度突然增加一倍，由原来的 a 突变到 $2a$ ，假定波函数没有受到干扰，问：

- a) 测量粒子的能量，得到的最有可能的结果是多少？相应的概率是多少？
- b) 粒子能量的测量平均值是多少？

【提示：将宽度为 a 的势阱基态在新的系统本征态上做展开求解。】

习题:

第四章

量子数取值范围

1. 设氢原子的电子所处定态对应的主量子数 $n = 2$, 写出电子所有可能的状态, 用量子数 (n, l, m) 标记。

n 取 $1, 2, 3, \dots$
 l 取 $0, 1, 2, \dots, n-1$
 m 取 $-l, -(l-1), \dots, l-1, l$

氢原子波函数

$$\Psi_{nlm}(r) = R_{nl}(r) Y_l^m(\theta, \phi)$$

算符平均值

$$\bar{V} = \int \Psi^* \cdot V \cdot \Psi \cdot r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi$$

2. 试求出氢原子基态下势能 $V = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$ 的平均值。

基态波函数: $n=1, l=0, m=0 \Rightarrow R_{10}(r) = 2\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2} e^{-Zr/a_0}, Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$

$$\bar{V} = \int \Psi^* \cdot V \cdot \Psi \cdot r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi = \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 a_0}$$

电子概率分布

$$(r \rightarrow r+dr): P_{nl}(r) dr = |R_{nl}(r)|^2 r^2 dr$$

4. 设氢原子处在基态, 求电子处在经典不允许区域 (即经典动能小于零的区域 $E - V = T < 0$) 的几率是多少?

$$E_1 - V = -\frac{\hbar^2}{2\mu a_0^2} + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} < 0 \Rightarrow r > 2a_0$$

系统能量本征值

$$E_n = -\frac{\hbar^2}{2\mu a_0^2} \cdot \frac{1}{n^2}$$

(应当不是 13.6eV)

$$\int_{2a_0}^{\infty} R_{10}^2 r^2 dr = 13e^{-4} = 21.8\%$$

电子经典动能

$$\text{总能量 } E_n = E_0 \cdot \frac{1}{n^2} = -\frac{\hbar^2}{2\mu a_0^2} \cdot \frac{1}{n^2}$$

$$\text{势能 } V(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r}$$

$$\Rightarrow \text{动能} = E - V = \dots$$

$$a_0 =$$

氢原子能级

$$E_n = -\frac{1}{2n^2} \alpha^2 m_e c^2$$

$$= (-13.6\text{eV}) \cdot \frac{1}{n^2}$$

5. 氢原子处在激发态上, 对应的量子数为 $n = 3, l = 2$ 。原子可以通过耗散的方式跃迁到低能级上, 同时释放光子, 请计算光子对应的能量 (eV)。

只能 $\Delta l = 1$

角动量性质

9. 证明在 L_z 的本征态下 (对应本征值为 $m\hbar$), 角动量沿与 z 方向成 θ 角方向上分量的平均值为 $m\hbar \cos \theta$ 。

【提示: 计算算符 $\hat{L}_{\theta, \phi} = \hat{L}_z \cos \theta + \hat{L}_x \sin \theta \cos \phi + \hat{L}_y \sin \theta \sin \phi$ 的平均值】

总角动量 \times 单位方向矢量, 然后取均值。

第五章:

对易算符

$$[B, C] = BC - CB$$

1. 设矩阵 A, B, C 均为 2×2 的厄密矩阵, 从而可以表示为单位矩阵和泡利矩阵的线性组合, 且满足 $A^2 = B^2 = C^2 = I, [B, C] = iA$.
证明: $AB + BA = AC + CA = 0$.

$$\begin{aligned} [B, C] &= BC - CB = iA && \text{同理 } AC + CA = 0 \\ \Rightarrow B \cdot BC - B \cdot CB &= iBA \\ BC \cdot B - CB \cdot B &= iAB \\ \Rightarrow B^2 \cdot C - C \cdot B^2 &= i(CAB + BA) \\ \Rightarrow I \cdot C - C \cdot I &= i(CAB + BA) \\ \Rightarrow AB + BA &= 0 \end{aligned}$$

算符的运算

2. 若 2×2 的矩阵 A 满足 $A^2 = 0, AA^\dagger + A^\dagger A = I, B = A^\dagger A$.
a. 证明: $B^2 = B$, 即 B 是投影算符;
b. 以 B 的本征态为基矢量, 用狄拉克记号表示 A , 并写出 A 对应的矩阵形式.
【提示: B 是投影算符, 本征值只能为 0 或 1】

狄拉克记号

$$\begin{aligned} a. \quad (B^2 - B) &= A^\dagger A A^\dagger A - A^\dagger A \\ &= A^\dagger A (A^\dagger A - I) \\ &= -A^\dagger A A A^\dagger \\ &= -A^\dagger 0 A^\dagger \\ &= 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

b. B 本征值为 0, 1, 其本征态为 $|0\rangle, |1\rangle$
 $\Rightarrow B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, 设 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$
 $\times B = A^\dagger A = \begin{bmatrix} a & c^\dagger \\ b^\dagger & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \textcircled{1}$
 $A^\dagger = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \textcircled{2}$
 结合 $\textcircled{1}\textcircled{2} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & e^{i\theta} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

e 指数上加矩阵 用泰勒展开

泡利矩阵运算

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & \sigma_y &= \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \\ \sigma_z &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

5. 证明等式

$$\begin{aligned} e^{-i\frac{\alpha}{2}\sigma_x} \sigma_y e^{i\frac{\alpha}{2}\sigma_x} &= \sigma_y \cos \alpha + \sigma_z \sin \alpha, \\ e^{-i\frac{\alpha}{2}\sigma_x} \sigma_z e^{i\frac{\alpha}{2}\sigma_x} &= \sigma_z \cos \alpha + \sigma_y \sin \alpha. \end{aligned}$$

$$\left(\cos \frac{\alpha}{2} I - i \sin \frac{\alpha}{2} \sigma_x \right) \sigma_y \left(\cos \frac{\alpha}{2} I + i \sin \frac{\alpha}{2} \sigma_x \right)$$

$$= \sigma_y \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sigma_x \sigma_y \sigma_x \sin^2 \frac{\alpha}{2} + i (\sigma_y \sigma_x - \sigma_x \sigma_y) \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$(\sigma_x \cdot \sigma_y = i \sigma_z)$$

$$= \sigma_y \cos \alpha$$

自旋算符

$$\hat{S}_{x,y,z} = \frac{\hbar}{2} \sigma_{x,y,z}$$

用泡利矩阵理解运算

$$\hat{S}_z |\uparrow(\downarrow)\rangle = \pm \frac{\hbar}{2} |\uparrow(\downarrow)\rangle$$

6. 对于电子自旋态 $|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\hat{S}_z |\uparrow\rangle = \frac{\hbar}{2} |\uparrow\rangle$, 求其在算符 \hat{S}_x, \hat{S}_y 对应的涨落 $\Delta S_x^2, \Delta S_y^2$ 。

$$\begin{aligned} \Delta S_x^2 &= \langle \uparrow | S_x^2 | \uparrow \rangle - (\langle \uparrow | S_x | \uparrow \rangle)^2 \\ &= \langle \uparrow | S_x^2 | \uparrow \rangle = \langle \uparrow | \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 \sigma_x^2 | \uparrow \rangle = \frac{\hbar^2}{4} \cdot \langle \uparrow | \uparrow \rangle = \frac{\hbar^2}{4} \\ \langle \uparrow | S_x | \uparrow \rangle &= \langle \uparrow | \frac{\hbar}{2} |\downarrow\rangle = \frac{\hbar}{2} \langle \uparrow | \downarrow \rangle = 0 \\ \Rightarrow \Delta S_x^2 &= \frac{\hbar^2}{4} \\ \text{同理 } \langle \uparrow | S_y | \uparrow \rangle &= 0, \quad \langle \uparrow | S_y^2 | \uparrow \rangle = \frac{\hbar^2}{4} \Rightarrow \Delta S_y^2 = \frac{\hbar^2}{4} \end{aligned}$$

$\frac{\hbar^2}{4}$

量子态的测量

找矩阵本征值和本征向量

7. 设电子处在自旋态 $|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_z |\uparrow\rangle = |\uparrow\rangle$, 若选择自旋测量投影的方向为 $\vec{n} = (\sin\theta \cos\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\theta)$, 求可能的测量值和相应的概率。

$$\begin{aligned} &(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z) \cdot (\sin\theta \cos\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\theta) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \sin\theta \cos\varphi + \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \sin\theta \sin\varphi + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cos\theta \\ &= \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta e^{-i\varphi} \\ \sin\theta e^{i\varphi} & -\cos\theta \end{bmatrix} \\ &\begin{vmatrix} \cos\theta - \lambda & \sin\theta e^{-i\varphi} \\ \sin\theta e^{i\varphi} & -\cos\theta - \lambda \end{vmatrix} = -(\cos^2\theta - \lambda^2) - \sin^2\theta = \lambda^2 - 1 = 0 \\ &\Rightarrow \lambda = \pm 1 \\ &\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta e^{-i\varphi} \\ \sin\theta e^{i\varphi} & -\cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \Rightarrow \end{aligned}$$

解出 $\lambda=1$ 对应特征向量
 $\lambda=-1$ 对应特征向量

耦合情况下的量子数

$$\hat{J} = \hat{L} + \hat{S}$$

$$\hat{J}^2 = j(j+1)\hbar^2$$

$$\hat{L}^2 = L(L+1)\hbar^2$$

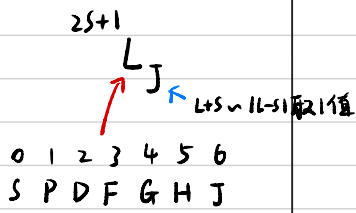
$$\hat{S}^2 = S(S+1)\hbar^2$$

8. 对于量子数 $L=2, S=1$, 计算 $\hat{L} \cdot \hat{S}$ 的可能取值。

$$\begin{aligned} \hat{J} &= \hat{L} + \hat{S} \Rightarrow \hat{J}^2 = \hat{L}^2 + 2\hat{L} \cdot \hat{S} + \hat{S}^2 \Rightarrow \hat{L} \cdot \hat{S} = \frac{\hat{J}^2 - \hat{L}^2 - \hat{S}^2}{2} \\ \Rightarrow \hat{L} \cdot \hat{S} &= \frac{1}{2} [j(j+1)\hbar^2 - L(L+1)\hbar^2 - S(S+1)\hbar^2] \Rightarrow 2\hbar^2, -\hbar^2, -3\hbar^2 \\ L=2, S=1 &\Rightarrow j = \begin{matrix} 3 \\ (L+S) \end{matrix}, \begin{matrix} 2 \\ (L+S-1) \end{matrix}, 1 \end{aligned}$$

已知 $S, L \Rightarrow j = L+S, L+S-1, \dots, |L-S|$

原子态的表示 (p142)



朗德g因子, 磁矩计算 (p142)

9. 原子态 $^2D_{3/2}$ 对应的 $\hat{L} \cdot \hat{S}$ 取值是多少? 计算相应的朗德因子及实验测量得到磁矩值。

$^2D_{3/2}$: $L=2$; $2S+1=2 \Rightarrow S=1/2$; $J=3/2$

$$\hat{J} = \hat{L} + \hat{S} \Rightarrow \hat{J}^2 = \hat{L}^2 + 2\hat{L}\hat{S} + \hat{S}^2$$

$$\Rightarrow \hat{L}\hat{S} = \frac{1}{2}(\hat{J}^2 - \hat{L}^2 - \hat{S}^2)$$

$$= \frac{\hbar^2}{2}(-L(L+1) - S(S+1) + J(J+1))$$

$$= \frac{\hbar^2}{2}(-2(2+1) - \frac{1}{2}(\frac{3}{2}) + \frac{3}{2}(\frac{5}{2}))$$

$$= -\frac{3}{2}\hbar^2$$

$$g_J = 1 + \frac{J(J+1) - L(L+1) + S(S+1)}{2J(J+1)}, \mu_B = \frac{e\hbar}{2me}$$

$$\mu_{Jz} = -m_J \cdot g \cdot \mu_B, m_J = \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}$$

泡利算符的本征态

$\sigma_z, \sigma_x, \sigma_y$ 本征值均为 ± 1

复合系统量子态

单态与三重态

12. 两个自旋为 $1/2$ 的粒子组成复合系统, 粒子 A 处在算符本征值 $S_{z,A} = +\hbar/2$ 对应本征态上, 粒子 B 处在算符本征值 $S_{x,B} = +\hbar/2$ 对应本征态上, 求测量发现体系总自旋为零的概率是多少?

$$S_x = \frac{\hbar}{2}\sigma_x = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \lambda=1, \text{对应 } \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$$

$$S_z = \frac{\hbar}{2}\sigma_z = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \lambda=1, \text{对应 } \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = |\uparrow\rangle$$

$$|\uparrow\rangle \otimes \frac{\sqrt{2}}{2}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle) = \frac{\sqrt{2}}{2}|\uparrow\rangle|\uparrow\rangle + \frac{\sqrt{2}}{2}|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle$$

由四个复合态

$$|S=0, S_z=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle_2 - |\downarrow\rangle|\uparrow\rangle_2)$$

$$|S=1, S_z=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle_2 + |\downarrow\rangle|\uparrow\rangle_2)$$

$$|S=1, S_z=1\rangle = |\uparrow\rangle|\uparrow\rangle$$

$$|S=1, S_z=-1\rangle = |\downarrow\rangle|\downarrow\rangle$$

$$\Rightarrow \mu = \frac{\sqrt{2}}{2}|S=1, S_z=1\rangle + \frac{1}{2}|S=0, S_z=0\rangle + \frac{1}{2}|S=1, S_z=0\rangle$$

$$\Rightarrow S=0 \text{ 概率 } |\frac{1}{2}|^2 = \frac{1}{4}$$

态的直积

泡利矩阵算符

13. 自旋交换算符 P_{12} 可以对两自旋系统的自旋状态实现交换操作, 例如在非耦合表象 $\{S_1^2, S_2^2, S_{1z}, S_{2z}\}$ 对应的基矢量下, 算符 P_{12} 的作用表示成

$$P_{12}|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle = |\downarrow\rangle|\uparrow\rangle, \quad P_{12}|\downarrow\rangle|\uparrow\rangle = |\uparrow\rangle|\downarrow\rangle$$

- 试在非耦合表象中写出算符 P_{12} 的矩阵形式;
- 证明 $P_{12}^2 = I$, 并用泡利算符表示 P_{12} .

$$a \quad |\uparrow\rangle|\downarrow\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot [0] \\ 0 \cdot [1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$|\downarrow\rangle|\uparrow\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot [1] \\ 1 \cdot [0] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} P_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{即: } \begin{bmatrix} P_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} P_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

b. 将泡利算符的直积与 P 的形式进行比对.

电子组态表示方法

如 $1s^1 2s^2 2p^4$

代表 7 个电子, 1 个 $1s$, 2 个 $2s$, 4 个 $2p$

主量子数 n

电子: $2s \leftarrow$ 表示 l 的值

L 0 1 2 3 4
符号 s p d f g

原子: $2s+1$
 L_J

LS 耦合

是一种矢量叠加, 但取高数值.

$$L_{\text{总}} = \vec{l}_1 + \vec{l}_2 = l_1 + l_2, l_1 + l_2 - 1, \dots, |l_1 - l_2|$$

$$S_{\text{总}} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$$

15. 设氦原子的核外两个电子处在 $2s3d$ 组态, 在 LS 耦合下可能形成的原子态有几种? 并用原子态的符号表示出来.

一个电子是 $2s \Rightarrow s$ 代表 $l_1=0; n_1=2$; 默认 $s_1=\frac{1}{2}$

一个电子是 $3d \Rightarrow d$ 代表 $l_2=2; n_2=3$; 默认 $s_2=\frac{1}{2}$

故 $S = s_1 + s_2 = 1, 0$

$$L = l_1 + l_2 = 2$$

$$J = L+S, L+S-1, \dots, |L-S|$$

$$\Rightarrow L=2, S=0 \Rightarrow J=2, \Rightarrow {}^1D_2$$

$$L=2, S=1 \Rightarrow J=3, 2, 1 \Rightarrow {}^3D_{1,2,3}$$

$$S = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \end{cases}$$

$$L = 2+0 = 2-0 = 2$$

第六章

1. 证明: $\exp(i\theta\sigma_z) = I \cos\theta + i \sin\theta \sigma_z$.

e 指数上矩阵

用展开处理

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

$$e^{i\theta\sigma_z} = I + i\theta\sigma_z + \frac{(i\theta\sigma_z)^2}{2!} + \frac{(i\theta\sigma_z)^3}{3!} + \dots$$

$$(\sigma_z^2 = 1) = \left[I + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \dots \right] + \left[i\theta\sigma_z + \frac{(i\theta\sigma_z)^3}{3!} + \dots \right]$$

$$= \left[1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots \right] + \left[\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \dots \right] i\sigma_z$$

$$= I \cos\theta + i \sin\theta \cdot \sigma_z$$

简单计算

2. 两个态 $|\psi_1\rangle$ 和 $|\psi_2\rangle$ 的保真度 (相似程度) 定义为 $F = |\langle\psi_1|\psi_2\rangle|^2$, 计算如下两个态之间的

保真度: $|\psi_1\rangle = \cos\frac{\theta_1}{2}|0\rangle + \sin\frac{\theta_1}{2}|1\rangle$, $|\psi_2\rangle = \cos\frac{\theta_2}{2}|0\rangle + \sin\frac{\theta_2}{2}|1\rangle$.

$$|\psi_1\rangle = \begin{bmatrix} \cos\frac{\theta_1}{2} \\ \sin\frac{\theta_1}{2} \end{bmatrix}, \quad |\psi_2\rangle = \begin{bmatrix} \cos\frac{\theta_2}{2} \\ \sin\frac{\theta_2}{2} \end{bmatrix}$$

$$|\langle\psi_1|\psi_2\rangle|^2 = \left[\begin{bmatrix} \cos\frac{\theta_1}{2} & \sin\frac{\theta_1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\frac{\theta_2}{2} \\ \sin\frac{\theta_2}{2} \end{bmatrix} \right]^2 = (\cos\frac{\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_2}{2} + \sin\frac{\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_2}{2})^2 = \cos^2\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}$$

第七章

量子比特的最大混合态用任意一对正交态等概率混合都可以合成。例, 试计算

$$\textcircled{1} \frac{1}{2}(|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + |\downarrow\rangle\langle\downarrow|)$$

$$\textcircled{2} \frac{1}{2}(|+\rangle\langle+| + |-\rangle\langle-|)$$

$$\textcircled{3} \frac{1}{2}(|L\rangle\langle L| + |R\rangle\langle R|) = \frac{I}{2}$$

其中, 基矢量的矩阵形式定义为

$$|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle \pm |V\rangle)$$

$$|L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

$$|R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

计算过程略。

对最大混态 \Leftrightarrow 对应自然光

$|r|=0$, 代表 Bloch 球的球心。

对应密度算符 $\hat{\rho} = \frac{1}{2}I$

矩阵计算

$$\textcircled{1} \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{2}I$$

$$\textcircled{2} \frac{1}{4} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{4} \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{2}I$$

$$\textcircled{3} \frac{1}{4} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -i \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{4} \left(\begin{bmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & -1 \end{bmatrix} \right)$$

单比特量子门

$$X = \sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

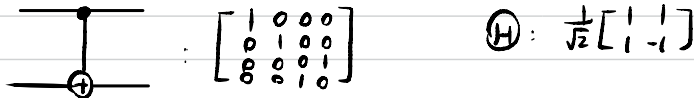
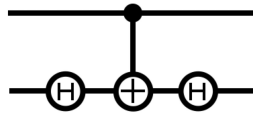
$$Y = i\sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Z = \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

两比特量子门

1. 基于下图线路，证明受控相位门和受控非门 (CNOT) 门等价。



$$\begin{aligned} &\Rightarrow (I \otimes H) \text{CNOT} (I \otimes H) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

量子隐形传态

纠缠交换

3. 纠缠交换中，初始 1, 2 粒子和 3, 4 粒子分别处于态 $|\psi_{1,2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_1|0\rangle_2 + |1\rangle_1|1\rangle_2)$ 及 $|\psi_{3,4}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_3|0\rangle_4 - |1\rangle_3|1\rangle_4)$ 。试推导 2, 3 粒子做 Bell 基测量后，1, 4 粒子所处的状态。

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_1|0\rangle_2 + |1\rangle_1|1\rangle_2) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_3|0\rangle_4 - |1\rangle_3|1\rangle_4) \\ &= \frac{1}{2}(|0\rangle_1|0\rangle_2|0\rangle_3|0\rangle_4 - |0\rangle_1|0\rangle_2|1\rangle_3|1\rangle_4 + |1\rangle_1|1\rangle_2|0\rangle_3|0\rangle_4 - |1\rangle_1|1\rangle_2|1\rangle_3|1\rangle_4) \\ &\text{又由 } \begin{cases} |\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \\ |\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Phi^+\rangle + |\Phi^-\rangle) \\ |01\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Psi^+\rangle + |\Psi^-\rangle) \\ |11\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Phi^+\rangle - |\Phi^-\rangle) \\ |10\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Psi^+\rangle - |\Psi^-\rangle) \end{cases} \\ &\Rightarrow \text{原} = \frac{1}{2}(|00\rangle_{23}|00\rangle_{14} - |01\rangle_{23}|01\rangle_{14} + |10\rangle_{23}|10\rangle_{14} - |11\rangle_{23}|11\rangle_{14}) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|\Phi^+\rangle_{23} + |\Phi^-\rangle_{23})(|\Phi^+\rangle_{14} + |\Phi^-\rangle_{14}) - \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Psi^+\rangle_{23} + |\Psi^-\rangle_{23})(|\Psi^+\rangle_{14} + |\Psi^-\rangle_{14}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Phi^+\rangle_{23} - |\Phi^-\rangle_{23})(|\Phi^+\rangle_{14} - |\Phi^-\rangle_{14}) + \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Psi^+\rangle_{23} - |\Psi^-\rangle_{23})(|\Psi^+\rangle_{14} - |\Psi^-\rangle_{14}) \right) \\ &= \frac{1}{2}(|\Phi^+\rangle_{23}|\Phi^+\rangle_{14} + |\Phi^-\rangle_{23}|\Phi^-\rangle_{14} - |\Psi^+\rangle_{23}|\Psi^+\rangle_{14} - |\Psi^-\rangle_{23}|\Psi^-\rangle_{14}) \end{aligned}$$

背

例 银原子的 Stern-Gerlach 实验。实验时加热银蒸气的炉温为 1320K，不均匀磁场区长度 d 为 0.1m，磁场梯度是 2300T/m，冷凝屏放在磁场末端。屏上两条斑痕的间隔为 4mm，试求银原子的磁矩。

解：设银原子以水平初速度 v 射入磁场中，原子经过不均匀磁场所需时间为 $t = d/v$ ，在通过磁场区后原子沿磁场方向的偏离位移为

$$S = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}F_z \left(\frac{d}{v}\right)^2,$$

其中 M 为银原子质量，原子的均方根速率 $v = \sqrt{\frac{3kT}{M}}$ ，所以

$$S = \left(\mu_z \frac{dB}{dz}\right) \frac{d^2}{2kT} = 0.002 \text{ m},$$

$$\mu_z = \frac{6kT \times 0.002}{2300 \times 0.01^2} = 0.95 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{T}^{-1} \approx \mu_B.$$

所以银原子的磁矩约为一个波尔磁矩。

$$S = \frac{1}{2}at^2$$

$$a = \frac{F_z}{m}, F_z = \mu_z \frac{dB}{dz}$$

$$t = \frac{d}{v}, v = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{m} \cdot \mu_z \frac{dB}{dz} \cdot \frac{d^2}{v^2} = \frac{\mu_z d^2}{2m} \cdot \frac{m}{3kT} \cdot \frac{dB}{dz}$$

$$\Rightarrow \mu_z = \frac{6kT}{\frac{dB}{dz} \cdot d^2}$$

纯态与混合态判断

用密度算符 $\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$,

↑
这态的概率, $\sum p_i = 1$

$\text{Tr}(\rho)$ 表示求迹, 为矩阵对角线之和。若 $\rho^2 = \rho$ 或 $\text{Tr}(\rho^2) = 1 \Rightarrow$ 纯态。
若 $\rho^2 \neq \rho$ 或 $\text{Tr}(\rho^2) < 1 \Rightarrow$ 混态。

Hadamard 算符

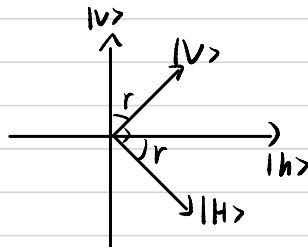
作用: 基态 & 激发态 \Rightarrow 等概率叠加状态

$$\hat{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \text{ 有 } H|1\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}(|1\rangle + |0\rangle)$$

$$H|0\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}(|1\rangle - |0\rangle)$$

波片变换矩阵

将 $|H\rangle, |V\rangle$ 分解到本征基 $|h\rangle, |v\rangle$ 上



$$\begin{bmatrix} |H\rangle \\ |V\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos r & -\sin r \\ \sin r & \cos r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |h\rangle \\ |v\rangle \end{bmatrix}$$

↑

任意量子比特的演化

$$\begin{bmatrix} e^{i\phi} \sin^2 r + \cos r & (1 - e^{i\phi}) \sin r \cos r \\ (1 - e^{i\phi}) \sin r \cos r & \sin^2 r + e^{i\phi} \cos r \end{bmatrix}$$

r : 波片快轴与水平方向夹角

ϕ : 波片在本征基向量间引入的相位差

证明:

原: $|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2} e^{-i\frac{\phi}{2}} |0\rangle + \sin\frac{\theta}{2} e^{i\frac{\phi}{2}} |1\rangle$ 乘上面的矩阵 \rightarrow 末态

BB84方案

光子四种偏振状态

通信时只公布测量基, 基不一致则丢弃.

Bit 0 1 0 1

Basis + + X X

偏振 \leftrightarrow \updownarrow \nearrow \searrow

可靠性保证: ① 不确定原理 \Rightarrow 单次测量不能精确区分正交态

② 单光子不可再分 \Rightarrow 信息载体不可被部分截取

③ 量子不可克隆定律 \Rightarrow 信息载体不可被复制

Bell基展开

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_1 |\Phi^+\rangle_{23} &= (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)_1 \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)_{23} \\ &= \frac{\alpha}{\sqrt{2}}|000\rangle_{23} + \frac{\alpha}{\sqrt{2}}|011\rangle_{23} + \frac{\beta}{\sqrt{2}}|100\rangle_{23} + \frac{\beta}{\sqrt{2}}|111\rangle_{23} \quad c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{而 } & \textcircled{1} \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle_2 + |11\rangle_2) \otimes (\alpha|0\rangle_3 + \beta|1\rangle_3) \quad \textcircled{2} \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle_2 - |11\rangle_2) \otimes (\alpha|0\rangle_3 - \beta|1\rangle_3) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}(\alpha|000\rangle + \beta|001\rangle + \alpha|110\rangle + \beta|111\rangle) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\alpha|000\rangle - \beta|001\rangle - \alpha|110\rangle + \beta|111\rangle) \\ & \frac{1}{2}(\textcircled{1} + \textcircled{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\alpha|000\rangle + \beta|111\rangle) \quad a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \textcircled{3} \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle) \otimes (\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle) \quad \textcircled{4} \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle) \otimes (-\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha|011\rangle + \beta|010\rangle + \alpha|101\rangle + \beta|100\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\alpha|011\rangle + \beta|010\rangle + \alpha|101\rangle - \beta|100\rangle) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}(\textcircled{3} - \textcircled{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\alpha|011\rangle + \beta|100\rangle) \quad b \quad \times$$

$$a + b = c$$

思考:

量子隐形传态是否违背信号不超光速原理?

是否违背不可克隆定理?

不违背信号不超光速原理, 因为量子隐形传态

中, alice需要通过经典信道向bob传递信息使得bob能够精确还原量子状态。这个过程速度仍然受到光速制约。

也不违背不可克隆定理。不可克隆定理是指不可能通过对量子态进行测量得到完全相同的拷贝。量子隐形传态也不违背这个定理。虽然在量子隐形传态中, 两个量子粒子之间存在纠缠, 其中一个粒子的状态可以通过测量得到, 并在另一个粒子上复制出一个相同的状态, 但这个过程会破坏原来的纠缠关系, 而且测量的结果是随机的, 无法预测和复制。

例: 快轴与水平方向夹角为 γ 的半波片
半波片在其本征基向量间引入的相位差为 π

即 $\phi = \pi$

则操作矩阵为:

$$\hat{U}_{\text{hwp}} = \begin{pmatrix} \cos 2\gamma & \sin 2\gamma \\ \sin 2\gamma & -\cos 2\gamma \end{pmatrix}$$

例: 快轴与水平方向夹角为 γ 的四分之一波片
四分之一波片在其本征基向量间引入的相位差为 $\pi/2$

即 $\phi = \pi/2$

则操作矩阵为:

$$\hat{U}_{\text{qwp}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 - i\cos 2\gamma & -i\sin 2\gamma \\ -i\sin 2\gamma & 1 + i\cos 2\gamma \end{pmatrix}$$

$$\sin^2 r \cdot e^{i\phi} + \cos^2 r$$

$$(1 - e^{i\phi}) \sin r \cdot \cos r$$

$$(1 - e^{i\phi}) \sin r \cos r$$

$$\sin^2 r + \cos^2 r \cdot e^{i\phi}$$

量子不可克隆定理证明 (单个任意未知量子态不可精确克隆)

假设存在克隆操作 \hat{U}

使得: $\hat{U}|0\rangle\otimes|0\rangle = |0\rangle\otimes|0\rangle$ (把前面的 copy 到后面)
 $\hat{U}|1\rangle\otimes|0\rangle = |1\rangle\otimes|1\rangle$

对任意量子态:

$$|\phi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \quad (\alpha^2 + \beta^2 = 1)$$

$$\hat{U}|\phi\rangle\otimes|0\rangle = \hat{U}(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)\otimes|0\rangle$$

$$= \alpha\hat{U}|0\rangle\otimes|0\rangle + \beta\hat{U}|1\rangle\otimes|0\rangle$$

$$= \alpha|0\rangle\otimes|0\rangle + \beta|1\rangle\otimes|1\rangle$$

而根据克隆操作的定义:

$$\hat{U}|\phi\rangle\otimes|0\rangle = |\phi\rangle\otimes|\phi\rangle$$

$$= (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)\otimes(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)$$

$$= \alpha^2|0\rangle\otimes|0\rangle + \beta^2|1\rangle\otimes|1\rangle + \alpha\beta|0\rangle\otimes|1\rangle + \alpha\beta|1\rangle\otimes|0\rangle$$

两次 $\hat{U}|\phi\rangle\otimes|0\rangle$ 得到结果不同 \Rightarrow 矛盾
 故这样的克隆机不存在

不同

朗德因子表达式

$$g = 1 + \frac{j(j+1) - L(L+1) + S(S+1)}{2j(j+1)} = 1 + \frac{\hat{J}^2 + \hat{S}^2 - \hat{L}^2}{2\hat{J}^2}$$

磁矩的计算

$$\mu_j = -\frac{\mu_B}{\hbar} \cdot g \cdot \hat{J} = -\mu_B \cdot g \cdot m_j$$

↑
-j, -j+1, ..., j

玻尔磁矩 $\mu_B = \frac{e \cdot \hbar}{2m_e}$

量子隐形传态复原

$\frac{\sqrt{2}}{2}(00\rangle + 11\rangle)$	$ \phi^+\rangle$	\rightarrow	I	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}(00\rangle - 11\rangle)$	$ \phi^-\rangle$	\rightarrow	Z	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}(01\rangle + 10\rangle)$	$ \psi^+\rangle$	\rightarrow	X	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}(01\rangle - 10\rangle)$	$ \psi^-\rangle$	\rightarrow	Y	$\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$

算符性质验证

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$|\uparrow\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, |\downarrow\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{S}_{xy,z} = \frac{\hbar}{2} \sigma_{x,y,z}, \quad \hat{S}^2 = S(S+1)\hbar^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \hbar^2 = \frac{3}{4} \hbar^2$$

$$S_x |\uparrow\rangle = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{\hbar}{2} |\downarrow\rangle$$

$$S_{\pm} = \hat{S}_x \pm i \hat{S}_y$$

$$\hat{S}_{\pm} |\uparrow\rangle = \hat{S}_{\pm} |\downarrow\rangle = 0$$

泡利矩阵的一般本征态

考虑在x方向的投影。
根据x方向的单位矢量满足

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \varphi = 0.$$

$$\Rightarrow |\uparrow\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$$

$$|\downarrow\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle)$$

同理，对于y方向的投影，有

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

$$\Rightarrow |\uparrow\rangle_y = e^{-i\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

$$|\downarrow\rangle_y = e^{-i\frac{3\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

整体相位因子。

同理，对z方向的投影，

$$\theta = 0, \varphi = \text{any}$$

$$|\uparrow\rangle_z = \begin{bmatrix} e^{-i\frac{\varphi}{2}} \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = |\uparrow\rangle$$

$$|\downarrow\rangle_z = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{i\frac{\varphi}{2}} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = |\downarrow\rangle$$

作业：写出上一页求本征态和本征值的过程，以及z方向的本征态和本征值

求解过程：

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{n} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z) (\sin\theta \cos\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\theta)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta e^{-i\varphi} \\ \sin\theta e^{i\varphi} & -\cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \cos\theta - \lambda & \sin\theta e^{-i\varphi} \\ \sin\theta e^{i\varphi} & -\cos\theta - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - \cos^2\theta - \sin^2\theta = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \pm 1 \quad (\text{泡利矩阵本征值均为} \pm 1)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \cos\theta + 1 & \sin\theta e^{-i\varphi} \\ \sin\theta e^{i\varphi} & -\cos\theta + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 0$$

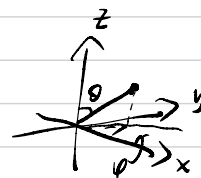
$$\Rightarrow a(\cos\theta + 1) + b \sin\theta e^{-i\varphi} = 0$$

$$\Rightarrow a = \frac{-\sin\theta}{\cos\theta + 1} e^{-i\varphi} \cdot b = \frac{-2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}} e^{-i\varphi} \cdot b$$

$$= -\tan\frac{\theta}{2} \cdot e^{-i\varphi} \cdot b$$

$$\Rightarrow \text{取 } b = \cos\frac{\theta}{2} e^{i\frac{\varphi}{2}}, \text{ 则特征向量 } \begin{bmatrix} -\sin\frac{\theta}{2} e^{-i\frac{\varphi}{2}} \\ \cos\frac{\theta}{2} e^{i\frac{\varphi}{2}} \end{bmatrix} = |\downarrow\rangle_n$$

$$\text{同理 } \lambda = 1 \Rightarrow |\uparrow\rangle_n = \begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2} e^{-i\frac{\varphi}{2}} \\ \sin\frac{\theta}{2} e^{i\frac{\varphi}{2}} \end{bmatrix}$$



σ_x

σ_y

σ_z

注意这里的表象