电磁学期末复习

(4-8章)

一、麦克斯韦方程组及介质本构方程

1. 麦克斯韦方程组

积分形式

$$\begin{cases}\oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}=\sum q_0\\ \oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l}=-\iint \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}\\ \oiint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}=0\\ \oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l}=\sum I_0+\iint_S \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S}\end{cases}$$

$$\vec{E}=\vec{E}_{静}+\vec{E}_{旋}$$

静电磁场

$$\begin{cases}\oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}=\sum q_0\\ \oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l}=0\\ \oiint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}=0\\ \oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l}=\sum I_0\end{cases}$$

$$\vec{j}_D=\frac{\partial \vec{D}}{\partial t},\quad I_D=\iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

微分形式

$$\begin{cases}\nabla\cdot\vec{D}=\rho_0\\ \nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}\\ \nabla\cdot\vec{B}=0\\ \nabla\times\vec{H}=\vec{j}_0+\dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}\end{cases}$$

静电磁场

$$\begin{cases}\nabla\cdot\vec{D}=\rho_0\\ \nabla\times\vec{E}=0\\ \nabla\cdot\vec{B}=0\\ \nabla\times\vec{H}=\vec{j}_0\end{cases}$$

有源无旋

无源有旋

用于对称性较好的问题，简单、明确、重要！

- 电场高斯定理：由库仑定律导出，说明存在自由电荷，自由电荷是电场的源，静电场是有源场。 $\oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}=\sum q_0$
- 电场环路定理："法拉第电磁感应定律+涡旋电场假说"导出，涡旋电场假说指随时间变化的磁场产生涡旋电场，涡旋电场是闭合的。 $\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l}=-\iint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$
- 磁场高斯定理：毕奥—萨伐尔定律的结果，说明没有自由磁荷(磁单极子)存在，磁力线是闭合的。 $\oiint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}=0$
- 磁场环路定理："安培环路定理+位移电流假说"的结果，位移电流假说是指随时间变化的电场产生磁场。 $\oint_l \vec{H}\cdot d\vec{l}=\sum I_0+\iint_s \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$

2. 介质的本构方程

磁场强度 H　$\vec{H}=\dfrac{\vec{B}}{\mu_0}-\vec{M}$

磁化强度M　$\vec{M}=\chi_m\vec{H}$

χ_m：磁化率

$$\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}$$
$$\vec{P}=\chi_e\varepsilon_0\vec{E}$$

线性各向同性均匀介质

$$\begin{cases}\vec{B}=\mu_0\mu_r\vec{H}=\mu\vec{H}\\ \vec{D}=\varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}=\varepsilon\vec{E}\\ \vec{j}_0=\sigma\vec{E}\end{cases}$$

$\mu_r\equiv\mu/\mu_0=1+\chi_m$

μ_r：相对磁导率

μ：绝对磁导率

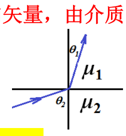
3. 边 值 关 系

$$\begin{cases}\vec{n}\cdot(\vec{D}_2-\vec{D}_1)=\sigma_0\\ \vec{n}\times(\vec{E}_2-\vec{E}_1)=0\\ \vec{n}\cdot(\vec{B}_2-\vec{B}_1)=0\\ \vec{n}\times(\vec{H}_2-\vec{H}_1)=\vec{i}_0\end{cases}$$

σ_0是界面上的自由面电荷密度

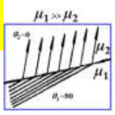
i_0是界面上的传导面电流密度

n为界面单位法向矢量，由介质1 指向介质2



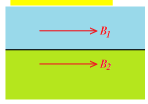
若磁介质界面 $i_0=0$

$$\left.\begin{array}{l}B_{2n}=B_{1n}\\ H_{1t}=H_{2t}\\ \vec{B}=\mu_0\mu_r\vec{H}\end{array}\right\}\ \frac{tg\theta_1}{tg\theta_2}=\frac{\mu_1}{\mu_2}$$



分区均匀各向同性介质

$\vec{B}//\vec{H}//\vec{M}$



(1) 介质界面与磁感应线重合(平行)，且介质界面上没有传导电流 $i_0=0$，则：

$B_n=0, H_n=0$ → $\vec{B}=B_t\vec{\tau},\ \vec{H}=H_t\vec{\tau}$

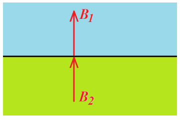
$i_0=0$ → $H_{1t}=H_{2t}=H$

$\vec{H}\equiv\vec{B}_0/\mu_0$　界面两边的H连续(相等)

$\vec{B}_i=\mu_0\mu_{ri}\vec{H}=\mu_i\vec{B}_0$　界面两边的B是B_0的u_r倍

B_0:传导电流在真空中产生的磁感应强度

(2) 介质界面与磁感应线垂直



$B_t=0,\ H_t=0,\ M_t=0$

$\vec{B}=B_n\vec{n},\ \vec{H}=H_n\vec{n},\ \vec{M}=M_n\vec{n}$

$B_{1n}=B_{2n}$ ⇒ $B_1=B_2$ 界面两边的B连续(相等)

$\vec{i}\,'=\vec{n}\times\left(\vec{M}_2-\vec{M}_1\right)=0$　$\vec{i}\,'=\frac{\vec{I}\,'}{L}$　界面无磁化面电流

$\vec{B}=\alpha\vec{B}_0,\ \alpha=\Sigma I_0 / \oint_L \frac{\vec{B}_0}{\mu_0\mu_r}\cdot d\vec{l}$　B和B_0具有相同的构形，大小上差一常数

$\vec{H}_i=\frac{1}{\mu_0\mu_{ri}}\vec{B}$　界面两边的H不相等

二、磁场感应强度B和磁场强度H

1. 用毕奥－萨法尔定律求磁感应强度

电流元产生的磁感应强度　$d\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}Id\vec{l}\times\frac{\vec{R}}{R^3}$

磁感应强度满足叠加原理　$\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{Id\vec{l}\times\vec{R}}{R^3}$

其中电流元可以是：$Id\vec{l},\ id\vec{S},\ \vec{j}dV$

2. 用安培环路定理求磁感应强度B和磁场强度H

- 静磁场

传导电流 I_0
磁化电流 I'

真空中 $I'=0$

$\oint_L B\cdot d\vec{l}=\mu_0\sum I$

$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l}=\sum I_0$

$I=I_0+I'$

$\vec{H}=\frac{\vec{B}}{\mu_0}-\vec{M}$

$\vec{B}=\mu_0\mu_r\vec{H}$

$\vec{M}=\chi_m\vec{H}$

传导电流 I_0 和磁化电流 I' 激发产生的磁场是等效的，空间一点的磁场是所有电流产生的磁场

- 时变电磁场　$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l}=\sum I_0+\iint_S\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$

位移电流I_D也可激发磁场　$I_D=\iint_S\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S}=\iint_S\vec{j}_D\cdot d\vec{S},\ \vec{j}_D=\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$

- 位移电流并非自由电荷的定向运动产生，而是由随时间变化的电场产生；
- 真空和电介质中也存在位移电流(传导电流只存在于导体中)；
- 位移电流不伴随焦耳热效应，不满足欧姆定律；
- 位移电流与外磁场无安培力的关系。

由涡旋电场求磁场

$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=-\nabla\times\vec{E}$

$\vec{B}=-\int\left(\nabla\times\vec{E}\right)dt$

三、磁化强度 M 和磁化电流 I'

由定义求M　$\vec{M}=\sum_i\vec{\mu}_i/\Delta V$　真空中：$M=0$

由B、H求M　$\vec{M}=\chi_m\vec{H}=(\mu_r-1)\vec{H}$　$\vec{M}=\frac{\vec{B}}{\mu_0}-\vec{H}$　$\vec{M}=\frac{\mu_r-1}{\mu_r}\frac{\vec{B}}{\mu_0}$

由 M 求 I', i', j'　$\sum I'=\oint_L\vec{M}\cdot d\vec{l}$　真空中：$I'=0$

n由介质1指向介质2　$\vec{i}\,'=\vec{n}\times\left(\vec{M}_2-\vec{M}_1\right)$　$\vec{j}\,'=\nabla\times\vec{M}$

磁化电流的性质：1）没有宏观的电荷定向移动；2）没有焦耳热效应；3）磁化电流只会出现在介质内非均匀磁化处及介质界面上，均匀介质内部磁化电流体密度为零。

四、感应电动势和涡旋电场

总感应电动势(通用)　$\varepsilon=-\frac{d\Phi}{dt},\ \Phi=\vec{B}\cdot\vec{S}=BS\cos\theta$

动生电动势(导体运动产生)　$\varepsilon_{动}=\int_a^b(\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l}$　$\vec{K}_{动\text{-}非}=\vec{v}\times\vec{B}$

感生电动势(磁场变化产生)　$\varepsilon_{感}=-\iint\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}=\oint\vec{E}_{旋}\cdot d\vec{l}$　$\vec{K}_{感\text{-}非}=\vec{E}_{旋}$

自感电动势(自身电流变化产生)　$\varepsilon_{自}=-\frac{d\Phi}{dt}=-L\frac{dI}{dt}$

互感电动势(其他线圈电流变化产生)　$\varepsilon_{互1}=-\frac{d\Phi_{12}}{dt}=-M\frac{dI_2}{dt}$

涡旋电场

$$\oint_L \vec{E}_{旋}\cdot d\vec{l} = -\iint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} \qquad \nabla\times\vec{E}_{旋} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\oiint_S \vec{E}_{旋}\cdot d\vec{S} = 0 \qquad \nabla\cdot\vec{E}_{旋} = 0$$

$$\vec{F} = q\vec{E} \qquad \vec{E} = \vec{E}_{静} + \vec{E}_{旋}$$

涡旋电场和静电场对电荷都能施加力的作用

$$\oint_L \vec{E}_{旋}\cdot d\vec{l} \neq 0 \qquad \nabla\times\vec{E}_{旋} \neq 0$$

$E_{旋}$由变化的磁场激发，不是由q产生。电力线是闭合曲线，环量不为零，不是保守力场或有势场，称为有旋场

$$\oint_L \vec{E}_{静}\cdot d\vec{l} = 0 \qquad \nabla\times\vec{E}_{静} = 0$$

静电场是由电荷产生，电力线不闭合，是保守力场，即有势场

13

五、自感 L 和互感 M

由定义求

$$\begin{cases} L = \dfrac{\Phi}{I} \\ L = -\dfrac{\varepsilon}{dI/dt} \\ L = \dfrac{2W_m}{I^2} \end{cases} \qquad \begin{cases} M_{21} = \dfrac{\Phi_{21}}{I_1} \\ M_{21} = -\dfrac{\varepsilon_{21}}{dI_1/dt} \end{cases}$$

由自/互感电动势求

由能量求

M 可正可负，L 总取正值

串联

$$L_{顺} = L_1 + L_2 + 2M \qquad L_{反} = L_1 + L_2 - 2M$$

$$L_{同} = \frac{L_1L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M} \qquad L_{异} = \frac{L_1L_2 - M^2}{L_1 + L_2 + 2M}$$

并联

14

六、磁 能 W_m

由磁场求磁能 $W_m = \frac{1}{2}\iiint_V \vec{B}\cdot\vec{H}dV$ 通用

由磁能密度求磁能 $W_m = \iiint_V \omega_m dV$ $\quad \omega_m = \dfrac{W_m}{V} = \dfrac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}$

由磁通量求线圈系统的磁能 $W_m = \dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} I_i\Phi_i$

由L/M求线圈系统的磁能

- 自感磁能 $W_m = \frac{1}{2}LI^2$
- 互感磁能 $W_m = MI_1I_2$
- 两个线圈系统的磁能 $W_m = \frac{1}{2}L_1I_1^2 + \frac{1}{2}L_2I_2^2 \pm MI_1I_2$

线圈在外磁场中的磁能 $W_m = \vec{m}_t\cdot\vec{B}$ $\quad \vec{m} = I\vec{S},\ \vec{m}_t = \sum_i \vec{m}_i$

无1/2

m_t为所有线圈磁矩的矢量和

15

七、能量密度、能流密度、动量密度、光压

能量密度(单位体积内的能量 J/m^3)

$$\omega = \frac{W}{V} = \omega_e + \omega_m = \frac{1}{2}\left(\vec{D}\cdot\vec{E} + \vec{B}\cdot\vec{H}\right) = \frac{1}{2}\left(\varepsilon E^2 + \frac{1}{\mu}B^2\right)$$

能流密度(单位时间、单位面积流出的能量，或单位面积流出的功率，W/m^2)

$$S_{能流密度} = \frac{W_{流出}}{t\cdot S_{面积}} = \frac{P_{辐射功率}}{S_{面积}} = \omega v$$

又叫玻印廷矢量 $\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H}$ $\quad$ 真空中 $v = c$

总电磁能量守恒方程

$$-\oiint_S \vec{S}\cdot d\vec{s} = \frac{\partial W}{\partial t} + \iiint_V \vec{j}\cdot\vec{E}dV \qquad -\nabla\cdot\vec{S} = \frac{\partial\omega}{\partial t} + \vec{j}\cdot\vec{E}$$

通过闭合边界曲面S流入V内的电磁能量；V内电磁场能量的增加；V内导体上消耗的能量(焦耳热)

$$\vec{j} = \sigma\vec{E}$$

16

$$动量 = \frac{能量}{c}$$

动量密度(单位体积内的动量)

$$g = \frac{\omega}{c} = \frac{S}{c^2} = \frac{\left|\vec{E}\times\vec{H}\right|}{c^2}$$

真空中 $\omega = \dfrac{S}{c}$

光压：光施加在物体表面压强 $p = (1+R)\omega$ $\quad \begin{cases} 全反射：R=1 \\ 全吸收：R=0 \end{cases}$

R为反射系数

平面电磁波按时间的平均值：

$$\bar{\omega} = \frac{1}{T}\int_0^T \omega(t)dt = \frac{1}{2}\varepsilon_0E_0^2 = \frac{1}{2}\mu_0H_0^2$$

17

八、力和力矩

洛仑兹力 $\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\right)$

安培力

$$\vec{F} = \int d\vec{F} = \begin{cases} \int_L Id\vec{l}\times\vec{B} \\ \iint_S \vec{i}dS\times\vec{B} \\ \iiint_V \vec{j}dV\times\vec{B} \end{cases} \qquad i = \frac{I}{L},\ j = \frac{I}{S}$$

$\vec{B} = \vec{B}_t - d\vec{B}$ 面电流元

$\vec{B} \approx \vec{B}_t$ 体电流元

$$\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{L1}\int_{L2} \frac{I_2d\vec{l}_2\times\left(I_1d\vec{l}_1\times\vec{r}_{12}\right)}{r_{12}^3}$$

力矩 $\vec{L} = \int d\vec{L} = \int \vec{r}\times d\vec{F}$ $\quad \vec{L} = \vec{m}\times\vec{B}$ $\quad \vec{m} = I\vec{S}$

m为载流线圈的磁矩

18

九、平面电磁波

$k = 2\pi/\lambda$

$\nabla = i\vec{k}$

$\frac{\partial}{\partial t} = -i\omega$

$\omega = 2\pi f$

自由空间($\rho_0=0$，$j=0$)
定态平面电磁波

$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})} \\ \vec{H} = \vec{H}_0 e^{-i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{k}\cdot\vec{E} = 0 \\ \vec{k}\cdot\vec{H} = 0 \\ \vec{k}\times\vec{E} = \mu_0\mu_r\omega\vec{H} \\ \vec{k}\times\vec{H} = -\varepsilon_0\varepsilon_r\omega\vec{E} \end{cases}$$

$$\vec{k}\perp\vec{E}, \vec{k}\perp\vec{H}, \vec{E}\perp\vec{H}$$

$$\vec{H}\Rightarrow\vec{E}$$
$$\vec{E}\Rightarrow\vec{H}$$

k是波矢，方向为电磁波的传播方向

$$\frac{E_0}{B_0} = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon_r\mu_0\mu_r}} = \frac{c}{n}$$

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}} = \frac{c}{n}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}, n = \sqrt{\varepsilon_r\mu_r}$$

19

十、磁路定理

基尔霍夫第一定律 $\sum_i \Phi_i = 0$ $\quad \sum_i I_i = 0$

基尔霍夫第二定律 $\sum U_m = \sum \varepsilon_m$

$U_m = Hl$ 磁位差

$\varepsilon_m = NI$ 磁动势

欧姆定律

$$U_m = \Phi_m R_m$$
$$\varepsilon_m = \Phi_m(R_m + r_m)$$

$$U = IR$$
$$\varepsilon = I(R+r)$$

$$R_m = \int \frac{dl}{\mu_0\mu_r S}$$

20

十一、交流电路

电路中的电流和电压

似稳条件 $l << \frac{c}{f} = \lambda$

$$\begin{cases} i(t) = I_m\cos(\omega t + \varphi_i) \\ u(t) = U_m\cos(\omega t + \varphi_u) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{I}(t) = I_m e^{j(\omega t + \varphi_i)} \\ \tilde{U}(t) = U_m e^{j(\omega t + \varphi_u)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_e = I_m/\sqrt{2} \\ U_e = U_m/\sqrt{2} \end{cases}$$

有效值

阻抗 $Z = \frac{U_m}{I_m}$

相位差或幅角 $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$

$$\tilde{Z} = \frac{\tilde{U}}{\tilde{I}} = Ze^{j\varphi}$$

$$Z_R = R,\ \varphi = 0$$
$$Z_C = \frac{1}{\omega C},\ \varphi = -\frac{\pi}{2}$$
$$Z_L = \omega L,\ \varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$\tilde{Z}_R = R$$
$$\tilde{Z}_C = \frac{1}{j\omega C}$$
$$\tilde{Z}_L = j\omega L$$

21

交流电路的欧姆定律 $\tilde{Z} = \frac{\tilde{U}}{\tilde{I}} = Ze^{j\varphi}$

串联电路 $\tilde{Z} = \tilde{Z}_1 + \tilde{Z}_2$ 并联电路 $\frac{1}{\tilde{Z}} = \frac{1}{\tilde{Z}_1} + \frac{1}{\tilde{Z}_2}$

***RCL*串联，*RCL*并联，……**

当$Z=R$, $\varphi=0$, 称为共振，共振频率为：$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

交流电路的基尔霍夫定律

$$\sum \tilde{I}_{km} = 0$$
$$\sum \tilde{I}_{nm}\tilde{Z}_m = \sum \tilde{\varepsilon}_{km}$$

22