上节课主要内容

相对介电常数：电容器内部充满同一种均匀的电介质时

$C'/C=\varepsilon_r,\quad \varepsilon_r>1$

介电强度：单位厚度的绝缘材料在击穿前能承受的最大电压，即电场强度最大值 $E_{\max}=\dfrac{U_{\max}}{d}\quad \dfrac{V}{m},\dfrac{KV}{mm}$

极化强度矢量：$\vec{P}=\dfrac{\sum_i \vec{p}_{mi}}{\Delta V}$ C/m²

极性电介质：分子具有固有电偶极矩，在电场中的主要极化机制为取向极化

非极性电介质：分子没有固有电偶极矩，在电场中的极化机制为电子或离子位移极化

1

极化电荷

$$Q_P=-\oiint_S \vec{P}\cdot d\vec{S}$$

$$\rho_P=-\nabla\cdot\vec{P}$$

$$\sigma_P=\left(\vec{P}_1-\vec{P}_2\right)\cdot\vec{e}_n \qquad \vec{e}_n:1\to 2$$

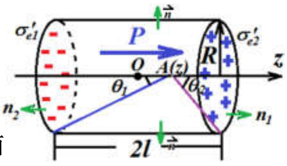
极化强度矢量：$\vec{P}=\varepsilon_0\chi\vec{E}$ $\quad \varepsilon_r=1+\chi$

$$\vec{E}=\vec{E}_0+\vec{E}'$$

总场 外场 退极化场

2

【例40】沿轴均匀极化的电介质圆棒，棒长为2*l*，半径为*R*，极化强度矢量为*P*，*P*的方向如图所示，(1)求极化电荷的分布；(2)求棒内轴线上任一点的退极化场。



【解】(1)电介质均匀极化，故

$\rho_P=-\nabla\cdot\vec{P}=0$

没有体极化电荷

表面是介质与真空的分界面

$\sigma_p=\vec{P}\cdot\vec{n}$ $\quad \vec{n}$ 由介质指向真空

$$=\begin{cases}P & z=l\\ -P & z=-l\\ 0 & -l<z<l\end{cases}$$

圆柱底面(左、右)有极化电荷

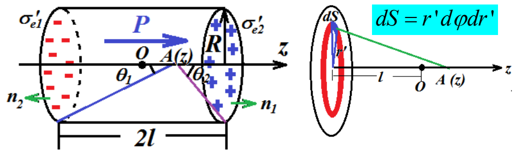
圆柱侧面(*P*与侧面法线垂直)无极化电荷

3

---

(2)求棒内轴线上任一点的退极化场 $\quad dq\to dU\to U\to E$

$dq_{left}=\sigma_p dS=-PdS \qquad dq_{right}=\sigma_p dS=PdS$



$dS=r'd\varphi dr'$

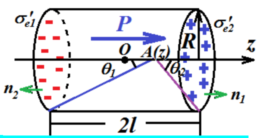
$$dU_{left}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{\sqrt{(l+z)^2+r'^2}}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-P}{\sqrt{(l+z)^2+r'^2}}r'd\varphi dr'$$

$$U_{left}=\int dU_{left}=\frac{-P}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R\frac{r'}{\sqrt{(l+z)^2+r'^2}}dr'\int_0^{2\pi}d\varphi=\frac{-P}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{(l+z)^2+R^2}-(l+z)\right)$$

$$U_{right}=\int dU_{right}=\frac{P}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R\frac{r'}{\sqrt{(l-z)^2+r'^2}}dr'\int_0^{2\pi}d\varphi=\frac{P}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{(l-z)^2+R^2}-(l-z)\right)$$

$$E=-\nabla U$$

$$E_A'=-\nabla\left(U_{left}+U_{right}\right)$$



对 *z* 求导

$$E_A'=-\frac{P}{2\varepsilon_0}\left[1-\frac{l-z}{\sqrt{(l-z)^2+R^2}}\right]-\frac{P}{2\varepsilon_0}\left[1-\frac{l+z}{\sqrt{(l+z)^2+R^2}}\right]$$

$$=-\frac{P\left(2-\cos\theta_1-\cos\theta_2\right)}{2\varepsilon_0}$$

电场沿 –*z* 方向

- 当$\theta_1=\theta_2\to\pi/2$时，相应电介质圆棒变为 $R>>2l$ 的薄电介质圆盘，盘内轴线上一点的 $E'=-P/\varepsilon_0$；
- 当 $\theta_1=\theta_2\to 0$ 时，对应电介质圆棒被视为无限长细电介质棒，棒内 $E'=0$，因此 $E=E_0$；

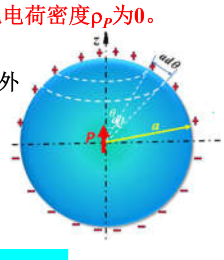
5

【例41】半径为 *a* 的均匀极化的介质球，其极化强度为 *P*，该球置于空气中，求球心处的退极化场。

【解】以极化强度矢量方向为 *z* 方向，由于均匀极化，介质球内各点 *P* 相同，球内体极化电荷密度ρ_P为0。

球表面的极化电荷面密度为：

$\sigma_p=\vec{P}\cdot\vec{n}=P\cos\theta \quad \vec{n}$ 沿径向向外



面元 *dS* 处的电荷

$$dQ_p=\sigma_p dS=P\cos\theta dS$$

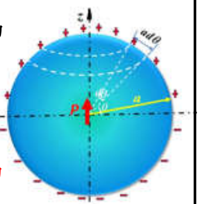
$$dS=a^2\sin\theta d\theta d\varphi$$

$$dQ_p=\sigma_p dS=Pa^2\sin\theta\cos\theta d\theta d\varphi$$

6

面元 dS 处的电荷在球心产生的电场

$$dE'=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dQ_p}{a^2}=\frac{P}{4\pi\varepsilon_0}\sin\theta\cos\theta d\theta d\varphi$$



上半球 θ<90º，dQ_p>0；下半球 θ>90º，dQ_p<0。由对称性可知，球心处的电场只有 z 分量，沿 $-z$ 方向，其大小为

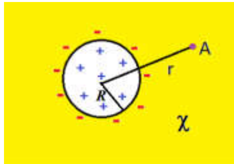
$$dE_z=-dE'\cos\theta=-\frac{P}{4\pi\varepsilon_0}\sin\theta\cos^2\theta d\theta d\varphi$$

极化电荷在球心产生的退极化场为

$$E'=E_Z'=-\frac{P}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\pi}\sin\theta\cos^2\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi=-\frac{P}{3\varepsilon_0}$$

7

【例42】在无限大均匀介质中，介质的相对介电常数为 ε_r ,有一电量为 q_f 的均匀带电球置于其中，球的半径为 R，求介质中距离球心 r 处 A 点的场强。



【解】

均匀带电球在介质中产生电场(球对称)

介质分子极化

极化电荷

① 球面与介质的分界面q_p → 有球对称性

② 无限远处的介质表面 → 对A点的电场可以忽略

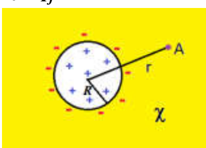
8

自由电荷 q_f在球外单独产生的电场强度为：

$$\vec{E}_f=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_f}{r^2}\vec{e}_r$$

球面上的极化电荷 q_p 在A点的场强(与q_f产生的场强方向相反)为：

$$\vec{E}_p=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_p}{r^2}\vec{e}_r$$



总场强为：

$$\vec{E}(r)=\vec{E}_f+\vec{E}_p=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_f-q_p}{r^2}\vec{e}_r$$

需要求出极化电荷 q_p 的大小

9

球表面的电场 $E(R)=E(r)\big|_{r=R}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_f-q_p}{R^2}$

$\sigma_P=\vec{P}\cdot\vec{n}=P_n$　　$\vec{P}=\varepsilon_0\chi\vec{E}$

而 $q_p=4\pi R^2\sigma_p=4\pi R^2P_n=4\pi R^2\varepsilon_0\chi E(R)$

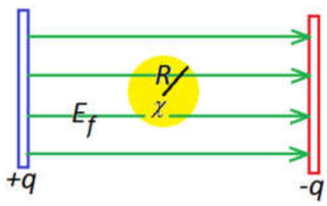
$$q_p=\frac{\chi}{1+\chi}q_f \Rightarrow \vec{E}=\frac{1}{1+\chi}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_f}{r^2}\vec{e}_r$$

因 $\varepsilon_r=1+\chi$ 则 $\vec{E}=\frac{1}{1+\chi}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_f}{r^2}\vec{e}_r=\frac{\vec{E}_f}{\varepsilon_r}$

由于介质的存在，电场比真空中降低了ε_r倍

10

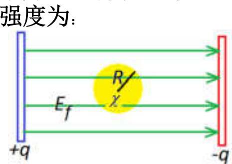
【例43】在两均匀、带等量异号电荷 q 的无限大平面导体板之间，放一均匀的介质球，球的半径为 R，极化率为 χ，求介质球心的场强。假定介质球离两平板都相当远，球处在场中时，带电板上的电荷仍然均匀分布，即自由电荷单独产生的场仍是均匀场。



11

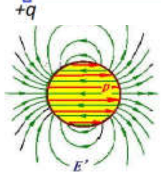
【解】设想介质球的极化是分若干阶段进行的，最终达到静电平衡。(1) 在介质刚放在电场中时，极化电荷尚未形成，因而介质球内的电场就是外场 E_f，它使介质球极化，极化强度为:

$$\vec{P}_0=\varepsilon_0\chi\vec{E}_f \qquad E_f=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$



此时球面极化电荷面密度为

$$\sigma_P=\vec{P}_0\cdot\vec{n}=P_0\cos\theta$$

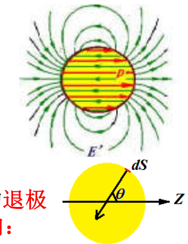


12

球上面元dS处极化电荷电量为：

$$dQ_p = \sigma_p dS = P_0 \cos\theta dS = P_0 R^2 \sin\theta\cos\theta d\theta d\varphi$$

$$dE' = dQ_p / \left(4\pi\varepsilon_0 R^2\right)$$



由于对称性，dQ_P在球心处产生的退极化电场 E_p 只有 Z 分量，沿 $-Z$ 方向：

$$dE_{p1} = dE'\cos(\pi-\theta) = \frac{P_0}{4\pi\varepsilon_0}\sin\theta\cos^2\theta d\theta d\varphi$$

$$E_{p1} = \frac{P_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\pi}\sin\theta\cos^2\theta d\theta\int_0^{2\pi} d\varphi = -\frac{P_0}{3\varepsilon_0}$$

$$\vec{E}_{p1} = -\frac{1}{3\varepsilon_0}\vec{P}_0 \xrightarrow{\vec{P}_0 = \varepsilon_0\chi\vec{E}_f} \vec{E}_{p1} = -\frac{\chi}{3}\vec{E}_f$$

(2) 附加电场E_{p1}引起进一步的附加极化，附加极化强度为：

$$\vec{P}_1 = \varepsilon_0\chi\vec{E}_{p1} = \varepsilon_0\chi\left(-\frac{\chi}{3}\vec{E}_f\right) = -\varepsilon_0\frac{\chi^2}{3}\vec{E}_f$$

类似地，这个附加极化强度 P_1 产生的电场为：

$$\vec{E}_{p2} = -\frac{1}{3\varepsilon_0}\vec{P}_1 = \left(-\frac{\chi}{3}\right)^2\vec{E}_f$$

(3) 附加电场E_{p2}进一步引起附加极化，这样的过程一步一步继续下去，在第 n个阶段，附加极化强度产生的场强为：

$$\vec{E}_{pn} = \left(-\frac{\chi}{3}\right)^n\vec{E}_f$$

于是介质球内的场强等于自由电荷和极化电荷产生的附加场强之和，即：

$$\vec{E} = \vec{E}_f + \vec{E}_{p1} + \vec{E}_{p2} + \cdots = \vec{E}_f + \sum_{n=1}^{\infty}\vec{E}_{pn}$$

$$= \left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{\chi}{3}\right)^n\right]\vec{E}_f = \frac{1}{1+\chi/3}\vec{E}_f = \frac{3}{2+\varepsilon_r}\vec{E}_f$$

$$\varepsilon_r = 1+\chi$$

导体和电介质作用比较

导体：

电场 ⇄ 感应电荷 → 静电平衡

导体的本构方程：

$$\vec{E}_{inside} = 0,\ U = C$$

$$\text{表面}\begin{cases} E_t = 0 \\ E_n = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\end{cases}$$

电介质：

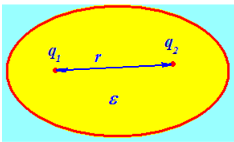
电场 ⇄ 束缚电荷 → 稳定极化

电介质的本构方程？

§ 2.3.3 电介质的基本电学特性

一、有介质存在时的库仑定理

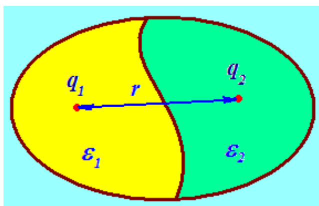
如果空间中充满同一种均匀的、线性极化的电介质，则只要将真空情形下的库仑定律中的 ε_0 换成 ε：



$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q_1q_2}{r^2},\quad \varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$$

介质的存在使库仑力降低 ε_r 倍

若空间中电介质的分布是不均匀的，在计算两者间的静电作用力时需要考虑极化电荷的影响.



$$F \neq \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q_1q_2}{r^2}$$

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

二、有电介质时的高斯定理

1. 高斯定理

- 电介质的特点：(1)在外电场中被极化，(2)出现极化电荷，(3)产生退极化场；
- 从静电学角度分析，电介质的作用就是提供附加的极化电荷；
- 自由电荷和极化电荷产生的电场性质是一样的，极化电荷的电场也满足高斯定理；
- 因此，真空中静电场的高斯定理可以直接推广到电介质中的静电场。

总电场 $\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\sum_{S内} q_0 + \dfrac{1}{\varepsilon_0}\sum_{S内} q'$

$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$　　自由电荷　极化电荷

$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\sum_{S内} q_0 + \dfrac{1}{\varepsilon_0}\sum_{S内} q'$　　极化电荷 $\sum q' = -\oiint_S \vec{P}\cdot d\vec{S}$

故：$\oiint_S \left(\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}\right)\cdot d\vec{S} = \sum_{S内} q_0$　自由电荷

令：$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}$　　$\vec{D}$ 称电位移矢量

则有：$\oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \sum_{S内} q_0$　有电介质时的高斯定理的积分形式

- 电位移矢量的通量与极化电荷无关，只与自由电荷有关；
- 电位移线发自正自由电荷，终止于负自由电荷，不受极化电荷的影响。

有电介质时的高斯定理的积分形式

$$\oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \sum_{S内} q_0$$

$$\oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \iiint_V \left(\nabla\cdot\vec{D}\right)dV \qquad \sum_{S内} q_0 = \iiint_V \rho_0 dV$$

$$\nabla\cdot\vec{D} = \rho_0$$

有电介质时的高斯定理的微分形式

2. *D* 与 *E* 的关系

对各向同性、线性极化的电介质

$$\vec{P} = \varepsilon_0\chi\vec{E} \qquad \varepsilon_r = 1+\chi \qquad \varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E}+\vec{P} = \varepsilon_0\vec{E}+\varepsilon_0\chi\vec{E} = \varepsilon_0\left(1+\chi\right)\vec{E} = \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}$$

即 $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$　此时ε是一个标量

线性均匀电介质的本构方程

对各向异性、非线性极化电介质

P 与 ***E*** 不是简单的线性关系，***D*** 与 ***E*** 也不是简单的线性关系

$$D_x = \varepsilon_{11}E_x + \varepsilon_{12}E_y + \varepsilon_{13}E_z$$
$$D_y = \varepsilon_{21}E_x + \varepsilon_{22}E_y + \varepsilon_{23}E_z$$
$$D_z = \varepsilon_{31}E_x + \varepsilon_{32}E_y + \varepsilon_{33}E_z$$

$$\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \qquad \vec{D} = \varepsilon\vec{E}$$

此时ε是一个张量

3. 极化电荷与自由电荷的关系

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$$

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \oint_S \varepsilon_0\varepsilon_r \vec{E}\cdot d\vec{S} = \varepsilon_0\varepsilon_r \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

$$= \varepsilon_0\varepsilon_r\left(\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{S内} q_0 + \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{S内} q'\right) = \varepsilon_r\left(\sum_{S内} q_0 + \sum_{S内} q'\right)$$

$$= \varepsilon_r \iiint_V (\rho_0 + \rho')dV$$

又 $\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \sum_{S内} q_0 = \iiint_V \rho_0 dV$

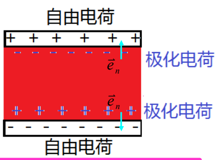
$$\varepsilon_r(\rho_0 + \rho') = \rho_0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} \rho = \rho_0 + \rho' = \dfrac{1}{\varepsilon_r}\rho_0 \\[2ex] \rho' = -\dfrac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\rho_0 = -\dfrac{\chi}{\chi+1}\rho_0 \end{cases}$$

- 极化电荷总是伴随着自由电荷一起出现，且符号相反；
- 电介质内，若$\rho_0=0$，则 $\rho'=0$， 极化电荷只分布在均匀介质表面。

- 类似地，有极化面电荷密度 σ′ 和自由面电荷密度 σ_0 之间的关系: $E = E_0/\varepsilon_r$　$E_0 = \sigma_0/\varepsilon_0$

$$P = \varepsilon_0 \chi E = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)E$$

$$= \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0\varepsilon_r} = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\sigma_0$$



真空/介质界面　　真空 $P_2 = 0$

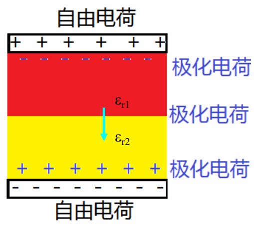
$$\sigma' = (\vec{P}_1 - \vec{P}_2)\cdot\vec{e}_n = P_{1n}$$

$\vec{e}_n$界面法线方向：介质1指向介质2，即由介质指向真空

上表面: e_n方向与电场 E 方向相反 $\sigma' = -P = -\dfrac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\sigma_0$

下表面: e_n方向与电场 E 方向相同 $\sigma' = P = +\dfrac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\sigma_0$

- 两种介质界面



$\vec{e}_n$界面法线方向：介质1指向介质2，即由介质指向真空

$$\sigma' = (\vec{P}_1 - \vec{P}_2)\cdot\vec{e}_n$$

$$P_1 = \varepsilon_0(\varepsilon_{r1} - 1)E_1 = \varepsilon_0(\varepsilon_{r1} - 1)\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0\varepsilon_{r1}}$$

$$P_2 = \varepsilon_0(\varepsilon_{r2} - 1)E_2 = \varepsilon_0(\varepsilon_{r2} - 1)\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0\varepsilon_{r2}}$$

$$\Rightarrow \sigma' = \left(\frac{1}{\varepsilon_{r2}} - \frac{1}{\varepsilon_{r1}}\right)\sigma_0$$

三、有电介质时的环路定理

1. 环路定理

静止的极化电荷和静止的自由电荷产生的电场都是静电场，静电场是保守场，具有无旋性，则：

$$\left.\begin{aligned} \oint_L \vec{E}_0\cdot d\vec{l} = 0 \\ \oint_L \vec{E}'\cdot d\vec{l} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \oint_L (\vec{E}_0 + \vec{E}')\cdot d\vec{l} = \oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$$

- 有介质时环路定理的积分形式(不变) $\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$

$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = \iint(\nabla\times\vec{E})\cdot d\vec{S} = 0$$

- 有介质时环路定理的微分形式(不变)

$$\nabla\times\vec{E} = 0$$

- E和 U 的关系仍然成立

$$\vec{E} = -\nabla U$$

2. 关于 $D=\varepsilon_0 E_0$ 的讨论

因

$$\oiint_S \vec{E}_0\cdot d\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{S内} q_0$$

又因

$$\oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}=\sum_{S内} q_0$$

$\Rightarrow$ $\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}_0$

是否正确?

在电磁学理论中，两个量相同，不仅要满足相同的高斯定理，而且要满足相同的环路定理

通常 $\varepsilon_0\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l}=0$ 成立

但 $\oint_L \vec{D}\cdot d\vec{l}=0$ 一般并不成立!

$\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}_0$ 并不都成立!

一个自然而然的问题是

$\nabla\times\vec{E}=0$ $\Rightarrow$ $\nabla\times\vec{D}=0$?

并不都成立!
(特殊情况下成立)

仅当两种情况下 $\oint_L \vec{D}\cdot d\vec{l}=0$ 成立：

(1)整个电场空间充满各向同性的电介质；

(2)整个电场空间虽有若干种均匀电介质区域存在，但介质的分界面是与电场垂直的等势面。

(1)整个电场空间充满各向同性的电介质

此时，ε_r 为常数，故：

$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l}=0$

$$\oint_L \vec{D}\cdot d\vec{l}=\oint_L \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}\cdot d\vec{l}=\varepsilon_0\varepsilon_r\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l}=0$$

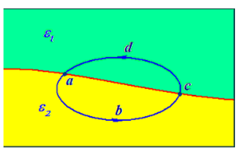
即空间充满各向同性介质时，电位移矢量的环路积分为 **0**。

$\oint_L \vec{D}\cdot d\vec{l}=0$ 成立

$\nabla\times\vec{D}=0$ 成立

(2) 介质的分界面是等势面

$$\oint_L \vec{D}\cdot d\vec{l}=\int_{abc}\vec{D}\cdot d\vec{l}+\int_{cda}\vec{D}\cdot d\vec{l}$$
$$=\int_{abc}\varepsilon_2\vec{E}\cdot d\vec{l}+\int_{cda}\varepsilon_1\vec{E}\cdot d\vec{l}$$
$$=\varepsilon_2(U_a-U_c)+\varepsilon_1(U_c-U_a)$$



若分界面是等势面，则有：$U_a=U_c$ 因此 $\oint_L \vec{D}\cdot d\vec{l}=0$

若分界面不是等势面，则有：$U_a\neq U_c$ $\oint_L \vec{D}\cdot d\vec{l}=(\varepsilon_2-\varepsilon_1)(U_a-U_c)\neq 0$

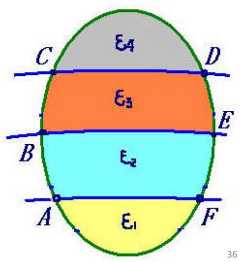
多种介质

$$\oint_L \vec{D}\cdot d\vec{l}=\left(\int_A^F+\int_F^E+\int_E^D+\int_D^C+\int_C^B+\int_B^A\right)\vec{D}\cdot d\vec{l}$$
$$=\varepsilon_1(U_A-U_F)+\varepsilon_2(U_F-U_E)+\varepsilon_3(U_E-U_D)$$
$$+\varepsilon_4(U_D-U_C)+\varepsilon_3(U_C-U_B)+\varepsilon_2(U_B-U_A)$$

分界面是等势面，有：

$U_F=U_A$，
$U_E=U_B$，
$U_D=U_C$

因此 $\oint_L \vec{D}\cdot d\vec{l}=0$



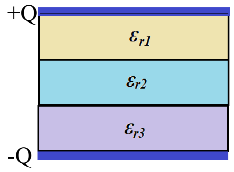
在上述两种情况下，电场强度矢量E和电位移矢量D的高斯定理和环路定理都成立

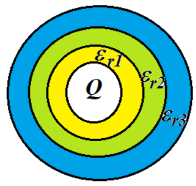
$$\oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \sum_{S内} q_0 \qquad \oint_L \vec{D}\cdot d\vec{l} = 0$$

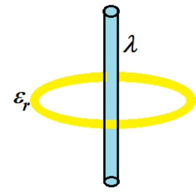
$$\oiint_S \vec{E}_0\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{S内} q_0 \qquad \oint_L \vec{E}_0\cdot d\vec{l} = 0$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E}_0 \qquad \vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E} \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_r}\vec{E}_0$$

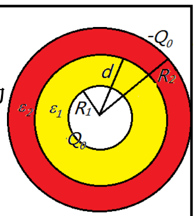
介质分界面是等势面的几个例子







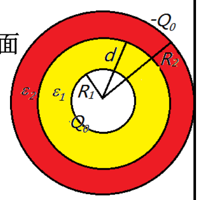
【例44】球形电容器充满两种介质，相对介电常数为ε_1和ε_2，分界面半径为d,求(1) 电容, (2)内球带电 Q_0时，介质表面上极化电荷面密度。



【解】

- 电容 $C \leftarrow$ 电压 $U \leftarrow$电场强度 $E \leftarrow$电位移矢量$D \leftarrow$介质中的高斯定理
- 极化电荷面密度 $\sigma_P \leftarrow$极化强度 $P \leftarrow$电场强度 E

(1)由对称性知，分界面为等势面，作球面高斯面，设电容器内、外球壳表面带电量为$\pm Q_0$，由介质中的高斯定理:



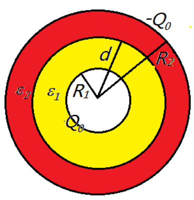
$$\oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q_0 \qquad D = \frac{1}{4\pi r^2}Q_0$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}$$

空间电场分布

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} 0 & (r<R_1) \\ \dfrac{D}{\varepsilon_0\varepsilon_1} = \dfrac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1 r^2}\vec{e}_r & (R_1 \le r \le d) \\ \dfrac{D}{\varepsilon_0\varepsilon_2} = \dfrac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_2 r^2}\vec{e}_r & (d < r \le R_2) \\ 0 & (r > R_2) \end{cases}$$

$$U = \int_{R1}^{R2}\vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_{R1}^{d}\vec{E}\cdot d\vec{l} + \int_{d}^{R2}\vec{E}\cdot d\vec{l}$$
$$= \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{d}\right) + \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_2}\left(\frac{1}{d}-\frac{1}{R_2}\right)$$
$$= \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\varepsilon_2R_2(d-R_1)+\varepsilon_1R_1(R_2-d)}{\varepsilon_1\varepsilon_2R_1R_2d}$$



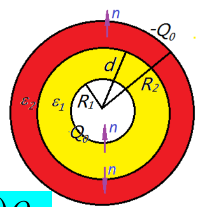
电容值为:

$$C = \frac{Q_0}{U} = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1\varepsilon_2R_1R_2d}{\varepsilon_1R_1(R_2-d)+\varepsilon_2R_2(d-R_1)}$$

(2)求介质表面极化电荷面密度

介质中 $\vec{P} = \varepsilon_0\chi\vec{E} = \varepsilon_0(\varepsilon_r-1)\vec{E}$

$\sigma_P = (\vec{P}_1-\vec{P}_2)\cdot\vec{e}_n \qquad \vec{e}_n: 1\rightarrow 2$



极化电荷面密度

介质2/真空界面 $\sigma\big|_{R_2} = \dfrac{(\varepsilon_2-1)Q_0}{4\pi\varepsilon_2R_2^{\ 2}}$ e_n与 E 方向相同

介质1/内腔界面 $\sigma\big|_{R_1} = -\dfrac{(\varepsilon_1-1)Q_0}{4\pi\varepsilon_1R_1^{\ 2}}$ e_n与 E 方向相反

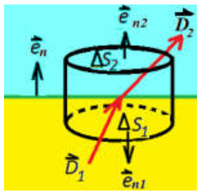
介质1/介质2界面 $\sigma\big|_d = \dfrac{Q_0}{4\pi d^2}\left[\dfrac{\varepsilon_1-1}{\varepsilon_1}-\dfrac{\varepsilon_2-1}{\varepsilon_2}\right]$

四、电场的边值关系

- 许多实际问题中，电场内往往存在多种介质，或者电介质未充满整个电场存在的空间。
- 在两种介质的交界面或表面(介质/真空交界面)上，即使没有面分布的自由电荷，一般来说也可能出现面分布的极化电荷。
- 因此交界面的存在会影响整个空间的电场分布。
- 把电场的基本方程式用到介质的交界面，就得到场矢量在交界面上的行为和满足的规律，这规律称为电场的边值关系。

1. D矢量法线方向

在界面作柱形高斯面，应用高斯定理：



$$\oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \vec{D}_1\cdot\Delta\vec{S}_1 + \vec{D}_2\cdot\Delta\vec{S}_2 + \delta = q_0 = \rho_0 h\Delta S = \sigma_0\Delta S$$

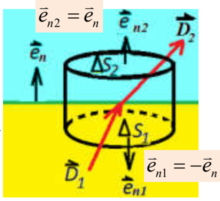
δ是侧面的电位移矢量的通量，$h\to 0$, $\delta\to 0$

$$h\to 0,\ \ \sigma_0 = \rho_0 h$$

又
$$\vec{D}_1\cdot\Delta\vec{S}_1 = \vec{D}_1\cdot\vec{e}_{n1}\Delta S = -\vec{D}_1\cdot\vec{e}_n\Delta S$$
$$\vec{D}_2\cdot\Delta\vec{S}_2 = \vec{D}_2\cdot\vec{e}_{n2}\Delta S = \vec{D}_2\cdot\vec{e}_n\Delta S$$

所以：
$$\left(\vec{D}_2-\vec{D}_1\right)\cdot\vec{e}_n = \sigma_0$$

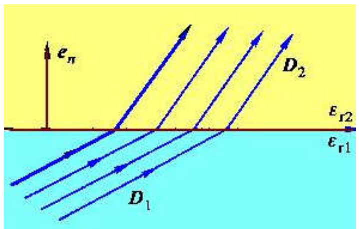
或
$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma_0$$



若交界面上无自由电荷(σ_0=0)，则
$$D_{1n} = D_{2n}$$

- 当交界面上有自由电荷($\sigma_0\neq 0$)，电位移矢量的法向分量不连续；
- 无自由电荷时(σ_0=0)，电位移矢量的法向分量连续

电位移矢量的法向分量相等，意味着从第一种介质进入界面上某一面元*ΔS*的电位移线的数目，与离开该面元进入第二种介质中的电位移线的数目是相等的，即电位移线连续地通过边界面



界面无自由电荷情况
$$D_{1n} = D_{2n}$$

2. E 矢量法线方向

交界面上无自由电荷时 $\sigma_0=0$，由 *D* 矢量连续方程和介质性质方程，有：

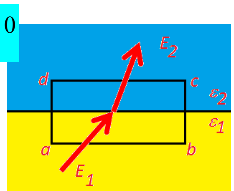
$$D_{1n} = D_{2n}$$
$$\varepsilon_{r1}E_{1n} = \varepsilon_{r2}E_{2n}$$
$$\varepsilon_{r1} \neq \varepsilon_{r2}$$
$$\Rightarrow\quad E_{1n} \neq E_{2n}$$

- 即两种介质的交界面上，即使电位移矢量的法向分量连续时，电场强度的法向分量仍是不连续的，有突变。
- 这是因为界面上有极化面电荷分布。

3. E 矢量切线方向

在分界面作一长方形封闭曲线，使用环路定理：

$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = \vec{E}_1\cdot\overline{ab} + \vec{E}_2\cdot\overline{cd} + \delta = 0$$



$$h\to 0,\ \ \delta\to 0$$

$$\overline{ab} = l\vec{e}_t,\ \ \overline{cd} = -l\vec{e}_t$$

$$E_{1t} = E_{2t}$$

电场强度在分界面上的切向分量（沿界面的分量）是连续的。

4. D 矢量切线方向

由 E 矢量切向分量连续方程和介质性质方程，有：

$\varepsilon_{r1} \neq \varepsilon_{r2}$

$$E_{1t} = E_{2t} \Rightarrow \frac{D_{1t}}{\varepsilon_{r1}} = \frac{D_{2t}}{\varepsilon_{r2}} \Rightarrow D_{1t} \neq D_{2t}$$

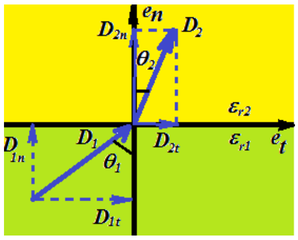
即在两种介质的交界面上，电位移矢量的切向分量是不连续的

这是因为在两种介质中的极化强度 P 是不同的

49

5. D和E在界面的“折射定理”

$$\sigma_0 = 0 \Rightarrow D_{1n} = D_{2n}, E_{1t} = E_{2t}$$



电场线穿过线性各向同性电介质的界面时，有类似光线折射的现象

$$\frac{tg\theta_1}{tg\theta_2} = \frac{D_{1t}/D_{1n}}{D_{2t}/D_{2n}} = \frac{D_{1t}}{D_{2t}} = \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}$$

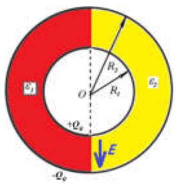
同理：

$$\frac{tg\theta_1}{tg\theta_2} = \frac{E_{1t}/E_{1n}}{E_{2t}/E_{2n}} = \frac{E_{2n}}{E_{1n}} = \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}$$

50

介质界面与电场线重合(平行)的情况

【例45】如图所示的是内外壳层带有$+Q$和$-Q$ 的球形电容器，一半充满绝对介电常量为ε_1、另一半充满绝对介电常量为ε_2的线性均匀介质。求(1)各区域的电场强度; (2)各界面的电荷; (3)系统的电容。



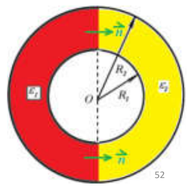
【解】电容器的两极板是导体，导体表面(这里是球面)是等势面，电场线与导体表面垂直，因此 E 沿径向方向，在两介质交界面 E 与介质界面平行。

51

- 由于电场平行于介质交界面，所以 $E_n=0$，因而 P 在介质界面上没有法向分量 $P_n=0$ $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$
- $\sigma' = P_{1n} - P_{2n} = 0$，电场平行于两介质界面时，两介质的分界面没有极化面电荷
- 极化面电荷只能存在于导体与介质的分界面上
- 由于导体表面为等势面，故存在极化电荷时，由自由电荷和极化电荷共同来保证其等势面，即总面电荷为: $\sigma = k\sigma_0$

有介质存在时的电场E与没有介质存在时的电场E_0具有相同的构形

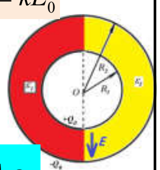
$$\vec{E} = k\vec{E}_0$$



52

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum_i \iint_{S_i} \varepsilon_i \vec{E} \cdot d\vec{S} = k \sum_i \iint_{S_i} \varepsilon_i \vec{E}_0 \cdot d\vec{S} = \sum Q_0$$

$\vec{E} = k\vec{E}_0$



$$k \sum_i \iint_{S_i} \varepsilon_i \vec{E}_0 \cdot d\vec{S} = k(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) E_0 \frac{S}{2} = \sum Q_0$$

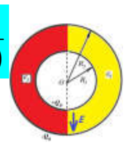
$$k = \frac{2Q_0}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) S E_0}$$

无介质时 $\oint_S \vec{E}_0 \cdot d\vec{S} = E_0 S = \dfrac{Q_0}{\varepsilon_0}$

$$k = \frac{2\varepsilon_0}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}$$

53

内壳 $r=R_1$ $E = kE_0 = \dfrac{2\varepsilon_0}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \dfrac{Q_0}{\varepsilon_0 S} = \dfrac{2\sigma_0}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}$



自由电荷 $\sigma_0 = (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \vec{e}_n$ 球内$E=0, D=0$

$$\begin{cases} \sigma_{e1} = D_{n1} = \varepsilon_1 E = \dfrac{2\varepsilon_1}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \sigma_0 \\ \sigma_{e2} = D_{n2} = \varepsilon_2 E = \dfrac{2\varepsilon_2}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \sigma_0 \end{cases}$$

$\therefore \sigma_{e1} \neq \sigma_{e2}$

极化电荷 $\sigma_P = (\vec{P}_1 - \vec{P}_2) \cdot \vec{e}_n$ 球内$E=0, P=0$

$$\begin{cases} \sigma_1' = -P_{n1} = -\varepsilon_0 (\varepsilon_{r1} - 1) E = -\dfrac{2(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \sigma_0 \\ \sigma_2' = -P_{n2} = -\varepsilon_0 (\varepsilon_{r2} - 1) E = -\dfrac{2(\varepsilon_2 - \varepsilon_0)}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \sigma_0 \end{cases}$$

$\therefore \sigma_1' \neq \sigma_2'$

54

总电荷

$$\begin{cases} \sigma_1 = \sigma_{e1} + \sigma_1' = \dfrac{2\varepsilon_1\sigma_0}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)} - \dfrac{2(\varepsilon_1-\varepsilon_0)\sigma_0}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)} = \dfrac{2\varepsilon_0\sigma_0}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)} = k\sigma_0 \\ \sigma_2 = \sigma_{e2} + \sigma_2' = \dfrac{2\varepsilon_2\sigma_0}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)} - \dfrac{2(\varepsilon_2-\varepsilon_0)\sigma_0}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)} = \dfrac{2\varepsilon_0\sigma_0}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)} = k\sigma_0 \end{cases}$$

$$\sigma = k\sigma_0 = \frac{2\varepsilon_0}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\sigma_0 \qquad \sigma_1 = \sigma_2$$

即两种介质与导体的交界面的自由电荷和极化电荷密度大小是不相同的

这两种均不同的电荷分布相互抵消，使总电荷密度在两处是相同的。从而总电场仍是球形对称的。

55

$$E = kE_0 = \frac{2\varepsilon_0}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\frac{Q_0}{\varepsilon_0 S} = \frac{1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\frac{Q_0}{2\pi r^2}$$

$$U_{ab} = \int_a^b E dr = \int_a^b \frac{Q_0}{2\pi r^2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}dr$$
$$= \frac{Q_0}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$
$$= \frac{Q_0(b-a)}{2\pi ab(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}$$

$$C = \frac{Q_0}{U} = \frac{2\pi ab(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}{b-a}$$

56

介质中电磁问题的基本方程

介质中的电学规律

$$\oint\!\!\!\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \sum_{S内} q_0$$
$$\nabla\cdot\vec{D} = \rho_0$$
$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$$
$$\nabla\times\vec{E} = 0$$

介质中的本构方程

$$\vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}$$

介质中的边值关系

$$D_{1n} - D_{2n} = \sigma_0$$
$$E_{1t} = E_{2t}$$

57