上节课主要内容

交流电 $a(t)=A_m\cos(\omega t+\varphi)$

元件	阻抗 $Z=\frac{U_m}{I_m}$	位相差 $\varphi=\varphi_u-\varphi_i$
电容C	容抗 $Z_C=\frac{1}{\omega C}\propto\frac{1}{f}$	$-\frac{\pi}{2}$
电阻R	电阻 $Z_R=R$	0
电感L	感抗 $Z_L=\omega L\propto f$	$\frac{\pi}{2}$

$\varphi=0$ 共振 $\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$ *RLC*串联或并联时共振的固有频率

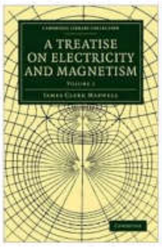
复阻抗 $\tilde{Z}_R=R$ $\tilde{Z}_C=\frac{1}{j\omega C}$ $\tilde{Z}_L=j\omega L$ $\tilde{Z}_M=j\omega M$ 欧姆定律 $\tilde{U}=\tilde{I}\tilde{Z}$

串联 $\tilde{Z}=\tilde{Z}_1+\tilde{Z}_2$ 并联 $\frac{1}{\tilde{Z}}=\frac{1}{\tilde{Z}_1}+\frac{1}{\tilde{Z}_2}$

交流电路的基尔霍夫定律

- 节点电流方程 $\sum\tilde{I}_{km}=0$
- 回路电压方程 $\sum\tilde{I}_{nm}\tilde{Z}_m=\sum\tilde{\varepsilon}_{km}$

第8章 电磁现象的基本规律与电磁波



- 1840年前后，大部分电磁学实验规律相继被发现，剩下的问题是对这些实验规律进行概括和总结，寻求它们之间的联系，建立统一的理论。
- 麦克斯韦(J.C. Maxwell，1831-1879) 不到15岁就写了一篇二次曲线作图的论文，发表在《爱丁堡皇家学会学报》上，23岁毕业于剑桥大学，25岁担任Aberdeen大学的自然哲学教授。
- 1855年发表第一篇电磁学论文《论法拉第的力线》，在这篇论文中，法拉第的力线概念获得了精确的数学表述，并由此导出了高斯定理。
- 1861年发表《论物理的场线》。该文不但进一步发展了法拉第的思想，扩展到磁场变化产生电场，文中还提出了位移电流的概念，即电场变化产生磁场。

- 麦克斯韦按照电磁场必须逐步传播的概念，着重描述空间相邻各点之间场的变化。将安培环路定理、电磁感应定律、高斯定律和磁通连续性原理进行了推广，使之可以应用到随时间变化的情况，并在安培定律中补充了重要的位移电流一项。

最终总结成电磁场理论的20个方程 ⇨

电位移方程 3
电阻方程 3
电弹性方程 3
自由电荷方程 1

\+

磁场力方程 3
电动力方程 3
电流方程 3
连续性方程 1

亥姆霍茨和赫兹

四个矢量方程(麦克斯韦电磁场方程组)

- 麦克斯韦根据这组方程推导出电磁场传播的波动方程，指出电磁波的传播速度正是光速，光也是一种电磁波。
- 1864年发表了不朽的论文《电磁场的动力学理论》。
- 1873年出版了电磁理论的经典巨著《电磁通论》，是一部集电磁学大成的划时代的著作，全面地总结了 19 世纪中叶以前对电磁现象的研究成果，建立了完整的电磁理论体系。
- 《电磁通论》与牛顿的《自然哲学的数学原理》、达尔文的《物种起源》以及赖尔的《地质学原理》相媲美的里程碑式的科学著作。
- 1879年麦克斯韦在剑桥病逝，年仅48岁。

8.1 静态电场和磁场的基本规律

静电学中的实验规律是库仑定律

$$\vec{F}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}\vec{e}_r$$

根据库仑定律和叠加原理，得到描述静电场性质的高斯定理和环路定理

$$\oint\!\!\!\oint_s \vec{D}\cdot d\vec{S}=\sum_{s内} q_0=\iiint_V \rho_0 dV \qquad \nabla\cdot\vec{D}=\rho_0$$

$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l}=0 \qquad \nabla\times\vec{E}=0$$

有源、无旋

静磁学中实验规律为安培定律

$$d\vec{F}_{21}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_2 d\vec{l}_2\times(I_1 d\vec{l}_1\times\vec{e}_r)}{r^2}$$

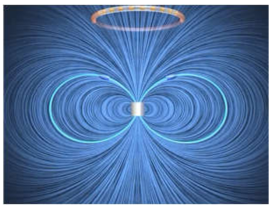
根据安培定律和叠加原理，得到描述静磁场性质的高斯定理和安培环路定理

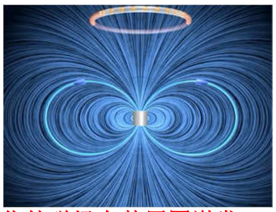
$$\oint\!\!\!\oint_s \vec{B}\cdot d\vec{S}=0 \qquad \nabla\cdot\vec{B}=0$$

$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l}=\sum I_0=\iint_S \vec{j}_0\cdot d\vec{S} \qquad \nabla\times\vec{H}=\vec{j}_0$$

有旋、无源

法拉第电磁感应定律





其物理本质是随时间变化的磁场在其周围激发涡旋电场，即：

$$\oint_L \vec{E}_{旋}\cdot d\vec{l}=-\iint\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} \qquad \nabla\times\vec{E}_{旋}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

电荷守恒定律(实验总结)

电荷守恒方程

$$\oint\!\!\!\oint_S \vec{j}\cdot d\vec{S}=-\iiint_v\frac{\partial\rho}{\partial t}dV \qquad \nabla\cdot\vec{j}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$$

稳恒条件

$$\oint\!\!\!\oint_S \vec{j}\cdot d\vec{S}=0 \qquad \nabla\cdot\vec{j}=0$$

8.2 时变的电场和磁场的基本规律

8.2.1 时变情况下电场的环路定律

- 静电场是保守力场，静电场力作功与路径无关；但在随时间变化的情况下，若空间既存在静止电荷(静电场)，又存在变化的磁场(涡旋电场)。

$$\vec{E}=\vec{E}_{静}+\vec{E}_{旋}$$

$$\oint_L \vec{E}_{静}\cdot d\vec{l}=0 \qquad \nabla\times\vec{E}_{静}=0$$

$$\oint_L \vec{E}_{旋}\cdot d\vec{l}=-\iint\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} \qquad \nabla\times\vec{E}_{旋}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l}=-\iint_S\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} \qquad \nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

时变情况下电场的环路定理是法拉第电磁感应定律与涡旋电场假设的结果

8.2.2 时变情况下电场的高斯定理

$$\vec{E}=\vec{E}_{静}+\vec{E}_{旋}$$

- 在随时间变化的情况下，变化的磁场将激发涡旋电场，涡旋电场的电力线为闭合的曲线，故

$$\oiint_S \vec{D}_{静}\cdot d\vec{S}=\sum_{S内} q_0 \qquad \nabla\cdot\vec{D}_{静}=\rho_0$$

$$\oiint_S \vec{E}_{旋}\cdot d\vec{S}=0 \qquad \nabla\cdot\vec{E}_{旋}=0$$

$$\oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}=\sum_{S内} q_0 \qquad \nabla\cdot\vec{D}=\rho_0$$

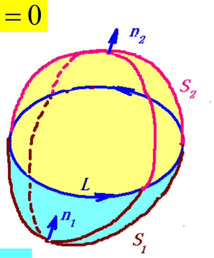
时变情况下电场的高斯定理

8.2.3 时变情况下磁场的高斯定理

- 静磁场 $\oiint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}=0$ $\quad\nabla\cdot\vec{B}=0$

对同一边界L，作两个闭合曲面S_1和S_2，S_1+S_2构成一个闭合曲面S，由法拉第电磁感应定理

$$\oint_L \vec{E}_{旋}\cdot d\vec{l}=-\iint_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

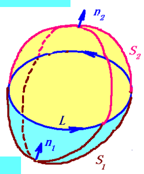


两个曲面的磁通量对时间的变化率对应于同一个环路L积分

$$\oint_L \vec{E}_{旋}\cdot d\vec{l}=-\iint_{S_1}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}=-\iint_{S_2}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

$$\iint_{S_1}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}=\iint_{S_2}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} \qquad \iint_{S_1}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}-\iint_{S_2}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}=0$$

统一以S的外法线方向为正，则



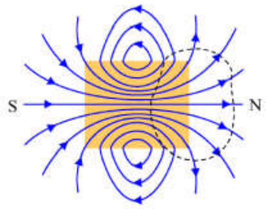
$$\iint_{S_1}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}+\iint_{S_2}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}=\oiint_S\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}=0$$

$$\oiint_S\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}=\iiint_V\nabla\cdot\left(\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)dV=\iiint_V\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\vec{B})dV=0$$

$$\nabla\cdot\vec{B}=const \Leftarrow \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\vec{B})=0$$

若空间某处原来只有静磁场，亦即：

$$\nabla\cdot\vec{B}\Big|_{t=0}=0$$



则以后任意时刻，即使后来有了变化的磁场，仍然有：

$$\nabla\cdot\vec{B}\equiv 0 \qquad \oiint_S\vec{B}\cdot d\vec{S}=0$$

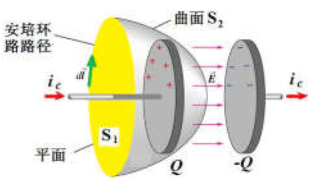
这就是时变情况下磁场的高斯定理

8.2.4 时变情况下磁场的安培环路定理

- 无论载流回路周围是真空还是磁介质，安培回路定理都可以写成：

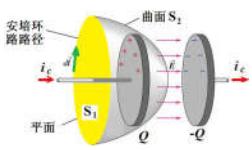
$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l}=\sum I_0=\iint_S \vec{j}_0\cdot d\vec{S}$$ I_0是传导电流

这个规律在时变的情况下是否适用呢?



圆盘型电容器，正在充电，充电电流为$i_c(t)$，对同一个安培环路L，可以做两个不同的积分面：平面S_1、曲面S_2。

S_1是穿过导线的平面，根据安培环路定理有：



$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l}=\sum I_0=\iint_{S_1}\vec{j}_0\cdot d\vec{S}=I_c$$

S_2为穿过电容器内部的曲面，无传导电流， 因此：

$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l}=\iint_{S_2}\vec{j}\cdot d\vec{S}=0$$ 两者不一致！

可见，在电流随时间变化时，安培回路定理不再适用！

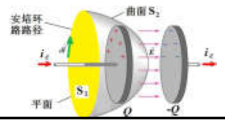
那么在时变情况下用什么规律来代替它呢？

电容器放电时，电容器极板上的电荷密度 $\sigma_c(t)$ 随时间变化；因而电容器内部的电场强度 $E_c(t)=\sigma_c/\varepsilon_0$ 也随时间变化；
电容器极板上的总电荷 $q_c(t)=\sigma_c S$ 随时间的变化率等于充放电路中传导电流的大小 I_0。

根据电荷守恒律，有：$\oiint_s \vec{j}_0\cdot d\vec{S}=-\dfrac{dq_c}{dt}$

上式 S 是由 S_1 和 S_2 构成的闭合曲面，q_c 是积聚在 S 面内的自由电荷，根据高斯定理有：

$$\oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}=q_c$$



19

$\oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}=q_c$ 两边求导 $\dfrac{dq_c}{dt}=\dfrac{d}{dt}\oiint_s \vec{D}\cdot d\vec{S}=\oiint\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$

因此 $\oiint_s \vec{j}_0\cdot d\vec{S}=-\dfrac{dq_c}{dt}=-\oiint\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$ $\quad\iint_s\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$

或 $\oiint_s\left(\vec{j}_0+\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)\cdot d\vec{S}=0$ 与电流具有相同的量纲

j_0 为传导电流密度，$S=S_1+S_2$，上述积分改写成：

$$\oiint_S\left(\vec{j}_0+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)\cdot d\vec{S}=\iint_{s1}\left(\vec{j}_0+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)\cdot d\vec{S}+\iint_{s2}\left(\vec{j}_0+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)\cdot d\vec{S}=0$$

20

- 令 $\Phi_D=\iint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}$ 为通过任一曲面 S 的电位移通量
- 麦克斯韦定义位移电流 I_D

$I_D=\dfrac{d\Phi_D}{dt}=\iint_S\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S}=\iint_S \vec{j}_D\cdot d\vec{S}$ $\quad\vec{j}_D=\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ 位移电流密度 j_D

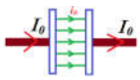
位移电流密度 j_D 不是真实的电流，而是电位移矢量的时间变化率。

- 传导电流 I_0 与位移电流 I_D 合起来称为全电流 I

$$I=I_0+I_D=\iint_s \vec{j}_0\cdot d\vec{S}+\iint_s\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S}=\iint_s\left(\vec{j}_0+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)\cdot d\vec{S}$$

21

本例中有：$\iint_{S_1}\vec{j}_0\cdot d\vec{S}=\iint_{S_2}\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$



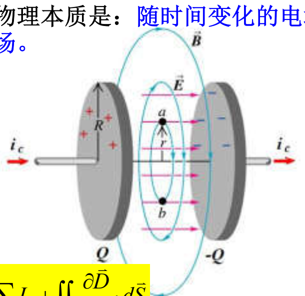
- 即在时变的情况下，传导电流中断之处由位移电流接上，使得全电流保持连续性。
- 由此，麦克斯韦把安培回路定律推广到了在时变情况下也适用的普遍形式：

$$\oint_l \vec{H}\cdot d\vec{l}=\sum I=\sum I_0+\iint_s\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

- 微分形式为：$\nabla\times\vec{H}=\vec{j}_0+\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ 时变情况下磁场的环路定理

22

- 位移电流的物理本质是：随时间变化的电场可以激发磁场。



$$\oint_l \vec{H}\cdot d\vec{l}=\sum I=\sum I_0+\iint_s\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

23

若空间中不存在自由电荷 ρ_0 和传导电流 I_0，则有：

$$\oint_l \vec{E}\cdot d\vec{l}=-\iint\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$ 随时间变化的磁场在空间激发电场

$$\oint_l \vec{H}\cdot d\vec{l}=\iint\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S}=\varepsilon_0\varepsilon_r\iint\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$ 随时间变化的电场在空间激发磁场

两者是相互对应的，即电和磁在激发场的方面保持着对称性。

这种互相激发，使得电磁场不断地在空间传播。

24

【例52】一无限长直螺线管，横截面的半径为 R，单位长度的匝数为 n，当导线中载有交流电流 $I=I_0\sin\omega t$ 试求螺线管内外的位移电流密度。

【解】电流变化I(t)→磁场变化B(t)→变化的磁场激发涡旋电场E旋

$\vec{j}_D=\partial\vec{D}/\partial t,\quad \vec{D}=\varepsilon\vec{E}$

由时变情况下电场的环路定理得: $\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l}=-\iint\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}=-\frac{d\Phi}{dt}$ $B=\mu_0 nI=\mu_0 nI_0\sin\omega t$

螺线管内($r<R$): $E_1=-\frac{1}{2\pi r}\frac{d}{dt}\left(\mu_0 nI_0\sin\omega t\cdot\pi r^2\right)=-\frac{1}{2}\mu_0 nI_0\omega r\cos\omega t$

故管内位移电流密度为: $j_D=\frac{\partial D}{\partial t}=\varepsilon_0\frac{\partial E_1}{\partial t}=\frac{1}{2}\varepsilon_0\mu_0 nI_0\omega^2 r\sin\omega t$

25

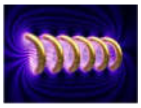
管外($r>R$)的感应电场强度为: 螺线管外 B=0

$$E_2=-\frac{1}{2\pi r}\frac{d\Phi}{dt}=-\frac{1}{2\pi r}\frac{d}{dt}\left(\mu_0 nI_0\sin\omega t\cdot\pi R^2\right)=-\frac{1}{2r}\mu_0 nI_0\omega R^2\cos\omega t$$

故管外位移电流密度为:

$$j_D=\frac{\partial D}{\partial t}=\varepsilon_0\frac{\partial E_2}{\partial t}=\frac{1}{2r}\varepsilon_0\mu_0 nI_0\omega^2R^2\sin\omega t$$

位移电流的方向就是涡旋电场的方向，涡旋电场与磁场方向成左手系。

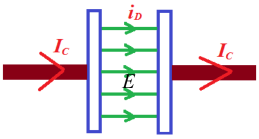


26

【例53】求平行板电容器在充放电过程中，磁场与传导电流、位移电流的关系。其中平板半径为a，极板间距为$d<<a$，极板上电量为q。

【解】平行板间的电场强度为:

$$E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}=\frac{q}{\pi a^2\varepsilon_0}$$



电容器内位移电流密度为:

$\vec{j}_D=\frac{\partial\vec{D}}{\partial t},\quad \vec{D}=\varepsilon\vec{E}$ $j_D=\frac{\varepsilon_0 dE}{dt}=\frac{1}{\pi a^2}\frac{dq}{dt}=\frac{1}{\pi a^2}I_c$

位移电流:

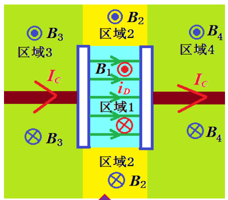
$I_D=j_DS=j_D\pi a^2=I_c$ I_D与传导电流 I_c 相等

全电流保持连续性

27

$\oint_l\vec{H}\cdot d\vec{l}=\sum I=I_c+I_D$ ⇒ $B=\frac{\mu_0 I_t}{2\pi r}=\frac{\mu_0\left(I_c+I_D\right)}{2\pi r}$

磁场分4个区域:



区域3和4，$I_D=0$ $B_3=B_4=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_c}{r}$

区域2，$I_C=0$ $I_D=\pi a^2 j_D=I_c$

$B_2=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_D}{r}=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_c}{r}$

区域1，$I_C=0$

$B_1=\frac{\mu_0}{2\pi r}\left(j_D\pi r^2\right)=\frac{\mu_0 I_c}{2\pi a^2}r$ $j_D=\frac{I_c}{\pi a^2}$

与半径为a的通电导线产生的磁场一样

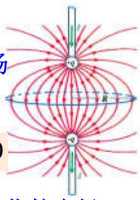
实际上，区域1和2的磁场也是传导电流 I_C 产生的，只不过这样计算比较方便

28

【例54】细直导线中间被截去一段长度为 l 的小段。导线中通有低频交流电流 $I(t)$，在中心取一圆形环路，没有传导电流通过该环路，在似稳条件下，计算环路上的磁感应强度。

【解】 设导线的两个端点的电量为$+q$和$-q$，则在中垂面上产生的电场为:

$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{ql}{\left[r^2+(l/2)^2\right]^{3/2}}$ 电偶极子电场



$\oint_L\vec{H}\cdot d\vec{l}=\sum I=\sum I_0+\iint_S\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$ $I_0=0$

$=\iint_S\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S}=\varepsilon_0\iint_S\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$ 随时间变化的电场在空间激发磁场

29

$$\oint_L\vec{H}\cdot d\vec{l}=\varepsilon_0\iint_S\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\cdot d\vec{S}=\varepsilon_0\frac{d}{dt}\iint_S\vec{E}\cdot d\vec{S}=\varepsilon_0\frac{d}{dt}\int_0^R E2\pi r dr$$

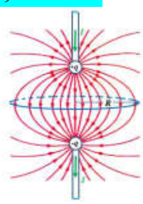
$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{ql}{\left[r^2+(l/2)^2\right]^{3/2}}$

$$=\left\{1-\frac{1}{\sqrt{(2R/l)^2+1}}\right\}\frac{dq}{dt}=\left\{1-\frac{1}{\sqrt{(2R/l)^2+1}}\right\}I(t)$$

$I(t)=\frac{dq}{dt}$

$$H(t)=\frac{1}{2\pi R}\left\{1-\frac{1}{\sqrt{(2R/l)^2+1}}\right\}I(t)$$

$$B(t)=\mu_0H(t)=\frac{\mu_0}{2\pi R}\left\{1-\frac{1}{\sqrt{(2R/l)^2+1}}\right\}I(t)$$



事实上，这个磁场是传导电流产生的(证明见下一页)，只不过用位移电流计算比较方便。

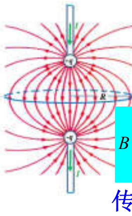
30

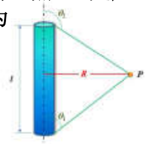
下面证明这个磁场是由传导电流 $I(t)$ 产生的

无限长导线在距离导线为 R 的一点 P 处产生的磁场 $B_0(t)$ 为

$$B_0(t)=\frac{\mu_0 I(t)}{2\pi R}$$

长为 l 的导线，在中心对称、距离导线为 R 的一点 P 处产生的磁场 $B_1(t)$ 为





$$B_1(t)=\frac{\mu_0 I(t)}{4\pi R}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)=\frac{\mu_0 I(t)}{2\pi R}\cdot 2\cdot\frac{l/2}{\sqrt{R^2+(l/2)^2}}=\frac{\mu_0 I(t)}{4\pi R}\frac{1}{\sqrt{(2R/l)^2+1}}$$

$$B(t)=B_0(t)-B_1(t)=\frac{\mu_0 I(t)}{2\pi R}\left\{1-\frac{1}{\sqrt{(2R/l)^2+1}}\right\}$$

与前面用位移电流计算的结果相同

传导电流激发的磁场就是总磁场！

§ 8.3 麦克斯韦方程组

§ 8.3.1 麦克斯韦方程组

- 麦克斯韦在对电磁现象的实验做了以上创造性的总结和发展后，得到了在普遍情况下电磁场必须满足的四个方程，这就是著名的*Maxwell*方程组

积分形式

$$\begin{cases}\oint\!\!\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}=\sum q_0\\ \oint_l \vec{E}\cdot d\vec{l}=-\iint \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}\\ \oint\!\!\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}=0\\ \oint_l \vec{H}\cdot d\vec{l}=\sum I_0+\iint_s \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S}\end{cases}$$

微分形式

$$\begin{cases}\nabla\cdot\vec{D}=\rho_0\\ \nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\\ \nabla\cdot\vec{B}=0\\ \nabla\times\vec{H}=\vec{j}_0+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\end{cases}$$

- 如果应用到各向同性、线性的电介质和磁介质上，还需要电、磁介质的本构方程，即：

$$\begin{cases}\vec{B}=\mu_0\mu_r\vec{H}\\ \vec{D}=\varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}\\ \vec{j}_0=\sigma\vec{E}\end{cases}$$

- 若应用于两种电、磁介质的界面上，还需要边界的电磁特性方程，即边值关系：

$$\begin{cases}\vec{n}\cdot(\vec{D}_2-\vec{D}_1)=\sigma_0\\ \vec{n}\times(\vec{E}_2-\vec{E}_1)=0\\ \vec{n}\cdot(\vec{B}_2-\vec{B}_1)=0\\ \vec{n}\times(\vec{H}_2-\vec{H}_1)=\vec{i}_0\end{cases}$$

- 电、磁场的唯一性定理(可以证明)：只要给定空间的电荷和电流分布、给定初始条件和边界条件，就可以由麦克斯韦方程组得到电、磁场的唯一确定的解。
- 此外，带电粒子在电磁场中的受力为洛仑兹力

$$\vec{F}=q\left(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}\right)$$

- 以上所有的方程组构成了电磁场的基本方程。

讨 论

1. *Maxwell*方程组是否考虑了磁化电流密度？

$$\nabla\times\vec{H}=\vec{j}_0+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\qquad \vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}$$

$$\vec{j}_{tot}=\vec{j}_0+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}=\vec{j}_0+\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\frac{\partial\vec{P}}{\partial t}$$

包含了极化电流密度

$$\vec{H}=\frac{\vec{B}}{\mu_0}-\vec{M}$$

$$\nabla\times\vec{B}=\nabla\times\left(\mu_0\vec{H}+\mu_0\vec{M}\right)$$

$$=\mu_0\left(\vec{j}+\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\frac{\partial\vec{P}}{\partial t}+\nabla\times\vec{M}\right)=\mu_0\vec{j}\,'_{tot}$$

$$\vec{j}_M=\nabla\times\vec{M}$$

磁化电流已经包含！

2. *Maxwell*方程组是否包含了电荷守恒定律？

证明：由 $\nabla\times\vec{H}=\vec{j}_0+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ 对该式两边用 $(\nabla\cdot)$ 作用

$$\nabla\cdot\left(\nabla\times\vec{H}\right)=\nabla\cdot\left(\vec{j}_0+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)$$

$$\nabla\cdot\left(\nabla\times\vec{H}\right)=0$$

$$\nabla\cdot\vec{D}=\rho_0$$

$$\nabla\cdot\vec{j}_0=-\frac{d}{dt}\left(\nabla\cdot\vec{D}\right)=-\frac{d}{dt}\rho_0$$

即*Maxwell*方程组已经隐含了电荷守恒定律

$$\nabla\cdot\vec{j}_0+\frac{d\rho_0}{dt}=0$$

§ 8.3.2其他形式的麦克斯韦方程组

1. 光子质量不为零时的 *Maxwell* 方程组

- 光子的质量等于零，虽然在很高的精度上与实验结果相符合，但仍然只是一个科学假设；
- 如果光子质量不为零，将出现许多新结果；
- 20世纪30年代，*A.Proca*首先研究了如果光子质量不为零会引起什么后果的问题，根据变分原理，他得到修改后的电磁场方程——*Proca*方程。

*Proca*方程：

$$\begin{cases}\nabla\cdot\vec{E}=\dfrac{\rho_0}{\varepsilon_0}-\mu^2U\\ \nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}\\ \nabla\cdot\vec{B}=0\\ \nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{j}_0-\mu^2\vec{A}+\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\vec{B}=\nabla\times\vec{A}\\ \vec{E}=-\nabla U-\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}\end{cases}$$

$\vec{A}$ ：磁矢势

m_γ为光子质量, μ是系数　　$\hbar$ ：*Planck*常数

$m_\gamma=\mu\dfrac{\hbar}{c}$　　$if\ \ m_\gamma=0$ ⇨ $\mu=0$ 回到*Maxwell*方程组

Proca 电磁场方程组并不是对*Maxwell*方程组的全盘否定，而是比后者更全面；如果光子质量为零，则回到*Maxwell*方程，如果光子质量不为零，则：

(1)静电场的解中必定包含指数衰减因子 $e^{-\mu}$，所以静电场要比平方反比规律衰减得更快一些；

(2)出现真空光速色散效应，即真空中光的群速度与ω有关；

(3)光波不再仅是横波，而且还有纵波；

…… …… 1940年, 德布罗意:　$m_\gamma \le 8\times10^{-40}$ g

实验上：1969年, 费恩贝格:　$m_\gamma \le 10^{-44}$ g

1971年, 维廉斯:　$m_\gamma \le 10^{-47}$ g

1975年, 戴维斯:　$m_\gamma \le 7\times10^{-49}$ g

=0 ？

2. 存在磁荷时的*Maxwell*方程组

若存在磁流和磁荷，磁流密度和磁荷密度分别为 $\boldsymbol{j_m}$ 和 ρ_m，则 *Maxwell* 方程组可以改成更加对称的形式:

$$\begin{cases}\nabla\cdot\vec{D}=\rho_0\\ \nabla\times\vec{E}=-\vec{j}_m-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}\\ \nabla\cdot\vec{B}=\rho_m\\ \nabla\times\vec{H}=\vec{j}_0+\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\nabla\cdot\vec{j}_0=-\dfrac{\partial\rho_0}{\partial t} & \text{电荷守恒定律}\\ \nabla\cdot\vec{j}_m=-\dfrac{\partial\rho_m}{\partial t} & \text{磁荷守恒定律}\end{cases}$$

磁单极子存在时的*Maxwell*方程组！

§ 8.3.3 建立*Maxwell*方程组的其它途径

(a) 根据能量守恒和近距作用原理建立*Maxwell*方程组

$$\omega_e=\frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}=\frac{1}{2}\varepsilon E^2\qquad \omega_m=\frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}=\frac{1}{2}\mu H^2$$

定义一个新矢量：能流密度矢量(坡印亭矢量)

$$\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}$$

*V*内导体上消耗的能量　$p=\frac{P}{V}=\vec{j}\cdot\vec{E}=\sigma E^2$

$$-\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V(\omega_e+\omega_m)dV=\oint_S\vec{S}\cdot d\vec{s}+\iiint_V\sigma E^2dV$$

电磁场的总能量　流出界面的能量

$$-\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V\left(\frac{1}{2}\varepsilon E^2+\frac{1}{2}\mu H^2\right)dV=\iiint_V\nabla\cdot\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)dV+\iiint_V\sigma\vec{E}\cdot\vec{E}dV$$

$$\nabla\cdot\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)+\sigma\vec{E}\cdot\vec{E}+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varepsilon E^2+\frac{1}{2}\mu H^2\right)=0$$

$$\nabla\cdot\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)=\left(\nabla\times\vec{E}\right)\cdot\vec{H}-\left(\nabla\times\vec{H}\right)\cdot\vec{E}$$

$$\left(\nabla\times\vec{E}+\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\right)\cdot\vec{H}+\left(-\nabla\times\vec{H}+\sigma\vec{E}+\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)\cdot\vec{E}=0$$

$$\left(\nabla\times\vec{E}+\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\right)\cdot\vec{H}+\left(-\nabla\times\vec{H}+\sigma\vec{E}+\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)\cdot\vec{E}=0$$

对*E=0*和*H=0*两种特殊情况，上式均成立

$$\vec{E}=0 \Rightarrow \left(\nabla\times\vec{E}+\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\right)\cdot\vec{H}=0 \Rightarrow \nabla\times\vec{E}=-\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}$$

$$\vec{H}=0 \Rightarrow \left(-\nabla\times\vec{H}+\sigma\vec{E}+\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)\cdot\vec{E}=0 \Rightarrow \nabla\times\vec{H}=\sigma\vec{E}+\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

$$\begin{cases}\vec{D}=\varepsilon\vec{E}\\ \vec{B}=\mu\vec{H}\\ \vec{j}=\sigma\vec{E}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\nabla\times\vec{E}=-\mu\dfrac{\partial\vec{H}}{\partial t}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}\\ \nabla\times\vec{H}=\sigma\vec{E}+\varepsilon\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}=\vec{j}+\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}\end{cases}$$

第 2 式两边∇· $\nabla\cdot\left(\nabla\times\vec{H}\right)=0$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\cdot\vec{D}\right)+\nabla\cdot\vec{j}=0$$

电荷守恒 $\nabla\cdot\vec{j}+\dfrac{\partial\rho}{\partial t}=0$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\cdot\vec{D}\right)-\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\cdot\vec{D}\right)-\frac{\partial\rho}{\partial t}=0 \Rightarrow \nabla\cdot\vec{D}-\rho=C$$

$\because \rho=0$时$,\vec{E}=0,\therefore C=0$

$$\nabla\cdot\vec{D}=\rho$$

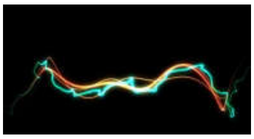
$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \xrightarrow{\text{两边}\nabla\cdot} \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\cdot\vec{B}\right)=0$$

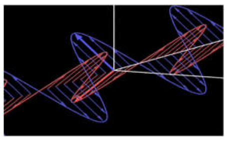
$\nabla\cdot\left(\nabla\times\vec{E}\right)=0$

$$\therefore \nabla\cdot\vec{B}=0 \Leftarrow \nabla\cdot\vec{B}=\rho_m$$

$\because \rho_m=0$

(b) 根据库仑定律和洛仑兹变换建立*Maxwell*方程组





P. Lorrain and D. R. Corson

《Electromagnetic Fields and Wave》 （1970）

(c) 根据变分原理建立*Maxwell*方程组

朗道和栗弗席兹著

《理论物理学教程》

第二卷《场论》

静场是迅变场的极限

$$\begin{cases}\nabla\cdot\vec{D}=\rho_0\\ \nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}\\ \nabla\cdot\vec{B}=0\\ \nabla\times\vec{H}=\vec{j}_0+\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}\end{cases} \xrightarrow{\begin{cases}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}=0\\ \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=0\end{cases}} \begin{cases}\nabla\cdot\vec{D}=\rho_0\\ \nabla\times\vec{E}=0\\ \nabla\cdot\vec{B}=0\\ \nabla\times\vec{H}=\vec{j}_0\end{cases}$$

*Maxwell*方程组　　　　静场规律

Maxwell 电磁场理论的意义

- 在物理学史中，***Maxwell***电磁场理论是继***Newton***力学之后划时代的卓越贡献。它被誉为**19**世纪物理学最伟大的成就，由此，***Maxwell***和***Faraday***也当之无愧地被誉为**19**世纪最伟大的物理学家。
- 电磁场理论是一个完整的理论体系，它的建立不仅为电磁学领域已有的研究成果作了很好的总结，而且为进一步的研究提供了理论基础，从而迎来了电磁学全面蓬勃发展的新时期。

- *Maxwell*电磁场理论的建立，开辟了许多新的研究课题和新的研究方向。例如，
  - 电磁波的研究带来了通讯、广播和电视事业的发展；
  - 物质电磁性质的研究推动了材料科学的进展；
  - 带电粒子和电磁场相互作用的探讨，与许多其他分支学科有关，导致不少交叉学科（如等离子体物理、磁流体力学等）的形成与发展。
- 所有这些，对于20世纪科学的发展、技术的进步及物质文化生活的繁荣昌盛，都起了重要的作用。
- 光的电磁理论是*Maxwell*电磁场理论的重大成果之一，它证明光波就是电磁波，从而把光现象纳入了电磁学领域，实现了光学与电磁学的统一。

- *Maxwell*电磁场理论的历史意义还在于引起了物理实在观念的深刻变革。
- 在电磁场理论建立之前，所谓物理实在指的就是质点，即实物粒子，当时认为世间万物无非都是质点的组合，别无其他。质点的运动遵循*Newton*定律。
- 此外，对于非接触物体之间的各种作用，如引力、磁力、电力，超距作用观点占据统治地位，即认为既无需媒介物传递，也无需传递时间.
- 电磁场理论使人们认识到除了实物粒子外，还有电磁场这种完全不同于实物粒子的另一类物理实在。

- 电磁场具有能量、动量等基本物理性质，电磁场可以脱离物质单独存在，并且能够与物质交换能量和动量，电磁场的运动变化遵循*Maxwell*方程，非接触的电磁物体之间的电磁作用，是以电磁场为媒介物传递的，是需要传递时间的，即是近距作用。
- 因此，*Maxwell*电磁场理论的建立及其实验证实，引起了物理实在观念的深刻变革，打破了超距作用一统天下的局面.
- *Einstein*在评价电磁场理论时强调指出：“实在概念的这一变革是物理学自*Newton*以来的一次最深刻和最富有成效的变革”。