

### 上节课主要内容

磁介质中磁场的高斯定理和环路定理

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I_0$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j}_0$$

磁介质的本构方程

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

均匀各向同性

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \\ &= (\chi_m + 1) \mu_0 \vec{H} \\ &= \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H} \end{aligned}$$

磁化电流

$$\vec{I}' = \oint_L \vec{M} \cdot d\vec{l}$$

$$\vec{j}' = \nabla \times \vec{M}$$

$$\vec{i}' = (\vec{M}_1 - \vec{M}_2) \times \vec{n}$$

$$\vec{j}' = \frac{\vec{I}'}{S}, \quad \vec{i}' = \frac{\vec{I}'}{l}$$

### § 5.1.5 磁介质的边值关系和唯一性定理

#### 一、边值关系

1. 界面处  $B$  法向分量连续

$$B_{1n} = B_{2n}$$

$$E_{1t} = E_{2t}$$

2. 界面处  $H$  切线分量

$$\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{i}_0$$

$$(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \vec{e}_n = \sigma_0$$

$$\text{if } i_0 = 0 \text{ then } H_{1t} = H_{2t}$$

$$\text{if } \sigma_0 = 0 \text{ then } D_{2n} = D_{1n}$$

3. 界面磁感应线折射定理

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{\mu_{r1}}{\mu_{r2}}$$

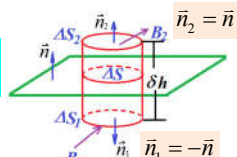
$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} = \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}$$

#### 1. 分界面处 $B$ 法向分量连续

【证明】作一圆柱形高斯面

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = (\iint_{S_1} + \iint_{S_2} + \iint_{S_3}) \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\delta h \rightarrow 0 \Rightarrow \iint_{S_3} B dS \rightarrow 0$$



$$\vec{B}_1 \cdot \Delta \vec{S}_1 + \vec{B}_2 \cdot \Delta \vec{S}_2 + 0 = \vec{B}_1 \cdot \vec{n}_1 \Delta S_1 + \vec{B}_2 \cdot \vec{n}_2 \Delta S_2 = 0$$

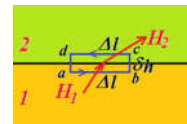
$$-\vec{B}_1 \cdot \vec{n} \Delta S_1 + \vec{B}_2 \cdot \vec{n} \Delta S_2 = 0$$

$$\text{故 } (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \vec{n} = 0 \text{ 或 } B_{1n} = B_{2n}$$

#### 2. 分界面处 $H$ 的切向分量

【证明】在界面作一矩形环路

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = (\int_a^b + \int_b^c + \int_c^d + \int_d^a) \vec{H} \cdot d\vec{l} = H_{1t} \Delta l + 0 + (-H_{2t} \Delta l) + 0 = \sum I_0$$



界面处面电流密度为  $i_0$

$$I_0 = i_0 \Delta l$$

$$\text{则 } H_{1t} - H_{2t} = i_0 \text{ 或}$$

$$\vec{i}_0 = \vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) \times \vec{n}$$

$$\text{若介质界面处 } i_0 = 0 \text{ 则 } H_{1t} = H_{2t}$$

#### 3. 分界面磁感应线的“折射定理”

【证明】

$$B_{2n} = B_{1n} \Rightarrow H_{2n} = \frac{\mu_1}{\mu_2} H_{1n}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

$H_n$  不连续

$i_0 = 0$  时

$$H_{2t} = H_{1t} \Rightarrow B_{2t} = \frac{\mu_2}{\mu_1} B_{1t}$$

$B_t$  不连续

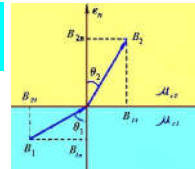
$i_0 = 0$  时

$$\tan \theta_1 = \frac{B_{1t}}{B_{1n}}, \quad \tan \theta_2 = \frac{B_{2t}}{B_{2n}}$$

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{B_{1t} B_{2n}}{B_{1n} B_{2t}} = \frac{B_{1t}}{B_{2t}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

$$\Rightarrow \frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{\mu_{r1}}{\mu_{r2}}$$

$i_0 = 0$  时界面两侧磁感应线夹角关系



同理，对磁场强度(H)线

$$i_0 = 0 \text{ 时 } H_{2t} = H_{1t}$$

$$\tan \theta_1 = \frac{H_{1t}}{H_{1n}}, \quad \tan \theta_2 = \frac{H_{2t}}{H_{2n}}$$

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{H_{1t} H_{2n}}{H_{1n} H_{2t}} = \frac{H_{2n}}{H_{1n}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

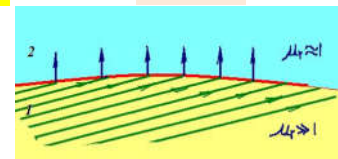
磁场边界

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

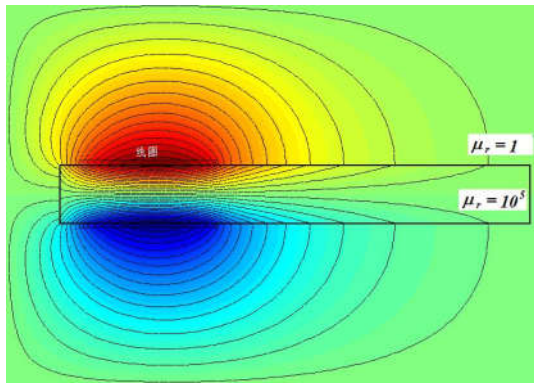
电场边界

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$$

若  $\mu_{r2} \approx 1$  (弱磁性介质),  
 $\mu_{r1} \gg 1$  (铁磁性材料)



则  $\theta_1 \gg \theta_2$  即磁感应线几乎都集中在铁磁性介质内，漏出外面的磁通量很少。



铁磁材料与空气边界的磁感应线分布图  $\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$

## 二、磁场的唯一性定理

### 1. 磁场的求解

真空中磁场的基本性质

$$\vec{B}_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_L \frac{I_0 d\vec{l} \times \vec{R}}{R^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{j}_0 \times \vec{R}}{R^3} dV$$

$$\begin{cases} \oint_S \vec{B}_0 \cdot d\vec{S} = 0 \\ \oint_L \vec{B}_0 \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \nabla \cdot \vec{B}_0 = 0 \\ \nabla \times \vec{B}_0 = \mu_0 \vec{j}_0 \end{cases}$$

已知  $I_0, j_0$ , 可确定  $B_0$  真空中  $\vec{H} = \frac{\vec{B}_0}{\mu_0}$

磁介质存在时

$$\begin{cases} \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \\ \oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I_0 \end{cases}$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H}$$

有磁介质时, 仅知道  $I_0, j_0$  (传导电流), 不能确定  $B$ , 还需知道磁化电流  $I', j'$ , 因为:

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (\sum I_0 + \sum I')$$

单种介质: 结合本构方程, 可由传导电流确定  $B$ ;  
多种介质: 由传导电流+边界条件, 可同时确定  $B$  和磁化电流  $I'$ 。

### 2. 唯一性定理的简单表述

设磁介质是各向同性的, 磁导率已知, 则

均匀磁介质,  $\mu=C$   
不均匀磁介质,  $\mu(r)$

磁场中传导电流密度  $j_0$  已知。磁场若

(1) 充满整个空间, 边界  $S \rightarrow \infty$ , 边界上  $B, H$  为 0;

(2) 分布于有限空间, 边界上  $B_n, H_n$  给定;

则, 满足磁场高斯定理和安培环路定理的磁场解是唯一的。

这意味着, 不管用什么办法, 只要找到一个解, 且满足上述的条件, 则该解是唯一正确的解。

### 3. 唯一性定理的证明

【反证法】

已知传导电流分布  $j_0(r)$ 、磁导率分布  $\mu(r)$  和界面  $S$  上的边界条件 ( $B_n, H_n$ )。

若两组解  $(B_1, H_1)$  和  $(B_2, H_2)$  都满足边界条件。

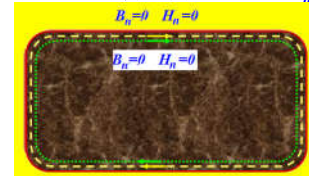
则可构造一新解:  $B = B_1 - B_2, H = H_1 - H_2$ , 则

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint_S \vec{B}_1 \cdot d\vec{S} - \oint_S \vec{B}_2 \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \oint_L \vec{H}_1 \cdot d\vec{l} - \oint_L \vec{H}_2 \cdot d\vec{l} = 0 = \sum I_0$$

$H$  对应的传导电流为零

$S$  是磁场分布的空间边界 (不是两种介质的界面),  $S$  外无磁场,  $B$  和  $H$  线不会从  $S$  面上进出,  $B_n=0$  和  $H_n=0$ 。



$B$  线在  $S$  面上为连续曲线, 不能中断, 必为闭合曲线。

因  $\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$   $H$  线与  $B$  线平行, 即  $H$  线亦为闭合曲线。取该闭合曲线为环路  $L$ , 则

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I_0 \neq 0$$

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I_0 \neq 0$$

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \oint_L \vec{H}_1 \cdot d\vec{l} - \oint_L \vec{H}_2 \cdot d\vec{l} = 0$$

矛盾

故在S内, 只能有

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \vec{B}_1 - \vec{B}_2 = 0 \\ \vec{H} &= \vec{H}_1 - \vec{H}_2 = 0 \end{aligned}$$

即

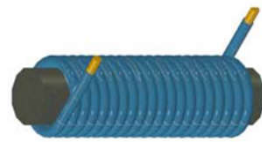
$$\begin{aligned} \vec{B}_1 &= \vec{B}_2 \\ \vec{H}_1 &= \vec{H}_2 \end{aligned}$$

磁场是唯一的

13

### 三、几种磁介质的磁场的讨论

#### 1. 各向同性、均匀磁介质充满整个磁场空间的情况



14

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$$

$$\begin{aligned} \oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \oint_L \mu_0 \mu_r \vec{H} \cdot d\vec{l} \\ &= \mu_0 \mu_r \oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \mu_r \iint_S \vec{j}_0 \cdot d\vec{S} \end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned} \oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \\ &= \mu_0 \iint_S (\vec{j}_0 + \vec{j}') \cdot d\vec{S} \end{aligned}$$

$$\mu_r \vec{j}_0 = \vec{j} = \vec{j}_0 + \vec{j}'$$

$$\mu_r = 1 + \chi_m$$

$$\vec{j}' = (\mu_r - 1) \vec{j}_0 = \chi_m \vec{j}_0$$

磁化电流密度  $j'$  与传导电流密度  $j_0$  成正比

15

$$\begin{aligned} \oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \\ &= \mu_0 \iint_S \mu_r \vec{j}_0 \cdot d\vec{S} \\ &= \mu_r \iint_S \mu_0 \vec{j}_0 \cdot d\vec{S} \\ &= \mu_r \oint_L \vec{B}_0 \cdot d\vec{l} \end{aligned}$$

$$\vec{j}(r) = \mu_r \vec{j}_0(r)$$

磁感应强度  $B$  因磁介质的存在增加了  $\mu_r$  倍!

$$\therefore \vec{B}(r) = \mu_r \vec{B}_0(r)$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0 \mu_r} = \frac{\vec{B}_0}{\mu_0} = \vec{H}_0$$

 $H$  不因磁介质的存在而变化, 因为它只与  $I_0$  相关

16

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} = (\mu_r - 1) \frac{\vec{B}_0}{\mu_0}$$

同理

$$\vec{i}_0 + \vec{i}' = \mu_r \vec{i}_0$$

$$\vec{i}' = (\mu_r - 1) \vec{i}_0 = \chi_m \vec{i}_0$$

注意: 以上分析是针对同一种各向同性、均匀的磁介质充满整个磁场空间的情况。

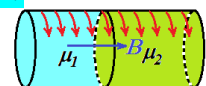
17

**讨论** 空间不是一种磁介质, 而是两种磁介质的情况, 上述结论  $\vec{H} = \vec{B}_0 / \mu_0 = \vec{H}_0$  不成立

如: 长直螺线管充有两种磁介质,  $B_0$  (真空中无磁介质时的磁感应强度) 由  $I_0$  产生, 在管内部,  $B_0$  均匀分布且沿轴线。  $\vec{B}_0 = \mu_0 n I_0 \vec{e}_n$

(1) 若  $H_1$  和  $H_2$  只有轴线分量  $H = H_n$ , 则在磁介质1和2的分界面处:

$$\left. \begin{aligned} B_{1n} &= B_{2n} \\ \vec{B} &= \mu \vec{H} \end{aligned} \right\} \Rightarrow H_{1n} = \frac{\mu_2}{\mu_1} H_{2n}$$

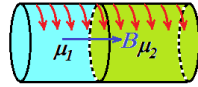


$$\vec{H}_1 \neq \vec{H}_2$$

18

由于

$$\vec{H}_1 \neq \vec{H}_2$$



但两种介质中的  $B_0$  相等, 故

在两种介质中不可能均有:  $\vec{H} = \vec{B}_0 / \mu_0$

(2) 若  $H_1$  和  $H_2$  有非轴线分量, 因  $B_0$  仅有轴线分量, 故

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}_0}{\mu_0} \quad \text{至少对其中某一种介质不成立}$$

因此, 空间有两种磁介质的情况,  $H = B_0 / \mu_0$  不完全成立。

19

## 2. 各向同性、均匀磁介质分区域分布

### (1) 介质分界面与 $B$ 平行(重合)情况

这种情况下, 可以证明  $\vec{H} = \frac{\vec{B}_0}{\mu_0}$  恒成立

【证明】 $H$  和  $B_0 / \mu_0$  是满足相同的环路定理的, 即

$$\left\{ \begin{array}{l} \oint_L \vec{B}_0 \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I_0 \\ \nabla \times \vec{B}_0 = \mu_0 \vec{j}_0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \oint_L \frac{\vec{B}_0}{\mu_0} \cdot d\vec{l} = \sum I_0 \\ \nabla \times \frac{\vec{B}_0}{\mu_0} = \vec{j}_0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I_0 \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{j}_0 \end{array} \right.$$

故只需证明因  $H$  和  $B_0 / \mu_0$  满足相同的高斯定理, 则可根据静磁场的惟一性定理, 确定  $H = B_0 / \mu_0$

20

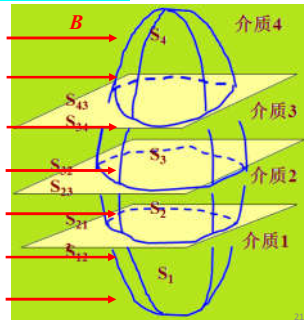
因为  $\oiint_S \frac{\vec{B}_0}{\mu_0} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \oiint_S \vec{B}_0 \cdot d\vec{S} = 0$  满足高斯定理

剩下只需证明:

$$\oiint_S \vec{H} \cdot d\vec{S} = 0$$

如图有四种介质, 因分界面与  $B$  平行, 故  $B_n = 0$ , 因而:

$$H_n = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} B_n = 0$$

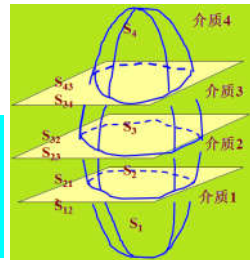


21

在  $i-j$  介质分界面上

$$\oiint_{S_j} \vec{H} \cdot d\vec{S} = 0, \quad (\because H_n = 0)$$

$$\therefore \oiint_{S_1} \vec{H} \cdot d\vec{S} = \oiint_{S_1+S_{12}} \vec{H} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\mu_0 \mu_{r1}} \oiint_{S_1+S_{12}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \text{介质1中}$$



$$\text{同理} \quad H_n = 0 \Rightarrow \oiint_{S_{21}} \vec{H} \cdot d\vec{S} = 0, \quad \oiint_{S_{23}} \vec{H} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\therefore \oiint_{S_2} \vec{H} \cdot d\vec{S} = \oiint_{S_2+S_{21}+S_{23}} \vec{H} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\mu_0 \mu_{r2}} \oiint_{S_2+S_{21}+S_{23}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \text{介质2中}$$

22

同理

$$\oiint_{S_3} \vec{H} \cdot d\vec{S} = 0, \quad \oiint_{S_4} \vec{H} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$$

$$\oiint_S \vec{H} \cdot d\vec{S} = (\oiint_{S_1} + \oiint_{S_2} + \oiint_{S_3} + \oiint_{S_4}) \vec{H} \cdot d\vec{S} = 0$$

即  $H$  也满足高斯定理, 因此

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}_0}{\mu_0} \quad \text{在介质分界面与 } B \text{ 平行(重合 } B_n=0, B=B_0 \text{) 的情况下是恒成立的}$$

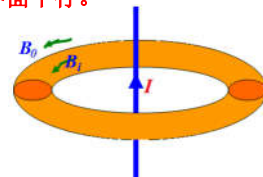
$$\text{此时} \quad \vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu_0 \mu_r \frac{\vec{B}_0}{\mu_0} = \mu_r \vec{B}_0$$

23

【例19】一圆环状磁介质与一无限长的直载流导线共轴, 设磁介质的磁导率为  $\mu$ , 长直导线内的电流强度为  $I$ , 求介质内外空间的磁感应强度的分布和介质表面的磁化电流。

【解】无限长导线电流  $I$  在真空中产生的  $B_0$  方向是以  $I$  为轴的同心圆, 即  $B_0$  的方向与磁介质/真空的分界面平行。

分界面处  $B_n = 0$



24

$\oint_L \vec{B}_0 \cdot d\vec{l} = B_0 2\pi r = \mu_0 I$

介质外的空间  $\vec{B}_0 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\tau$

介质分界面与  $B$  平行内 介质内的空间

$\vec{H} = \frac{\vec{B}_0}{\mu_0}$

$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu_0 \mu_r \frac{\vec{B}_0}{\mu_0} = \mu_r \vec{B}_0 = \frac{\mu_0 \mu_r I}{2\pi r} \vec{e}_\tau$

或者

$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = H 2\pi r = I$

$H = \frac{I}{2\pi r}$

$B = \mu_0 \mu_r H = \frac{\mu_0 \mu_r I}{2\pi r}$

25

面磁化电流密度

$\vec{i}' = (\vec{M}_1 - \vec{M}_2) \times \vec{n}$

$\vec{M}_2 = 0$  真空  $\vec{i}' = \vec{M}_1 \times \vec{n}$

$\vec{M}_1 = \chi_m \vec{H} = (\mu_r - 1) \frac{I}{2\pi r} \vec{e}_\tau$

$\vec{i}' = \vec{M}_1 \times \vec{n} = (\mu_r - 1) \frac{I}{2\pi r} \vec{e}_z$

$i'$  随  $r$  变化

26

【例20】如图，同轴导体圆柱面，通有反向的电流  $I$ ，柱面  $R_1$ - $R_2$  间充满相对磁导率为  $\mu_1$ ， $R_2$ - $R_3$  间充满  $\mu_2$ ， $R_3$ - $R_4$  间充满  $\mu_3$  的磁介质。求各区域的  $B$  及磁化电流面密度  $i'$ 。

【解】无介质时，由环路定理

$\oint_L \vec{B}_0 \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$

得  $B_0 = \begin{cases} 0, & r < R_1, r > R_4 \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, & R_1 < r < R_4 \end{cases}$

27

磁感应线  $B$  是以圆柱中轴线为中心的圆环，与介质界面平行，因此各分区充满各种介质后的磁感应强度为： $B = \mu_r B_0$

$\vec{i}' = (\vec{M}_1 - \vec{M}_2) \times \vec{n}$

$B(r) = \mu_r B_0 = \begin{cases} 0, & r < R_1, r > R_4 \\ \mu_1 B_0 = \frac{\mu_0 \mu_1 I}{2\pi r}, & R_1 < r < R_2 \\ \mu_2 B_0 = \frac{\mu_0 \mu_2 I}{2\pi r}, & R_2 < r < R_3 \\ \mu_3 B_0 = \frac{\mu_0 \mu_3 I}{2\pi r}, & R_3 < r < R_4 \end{cases}$

$\vec{M} = \chi_m \vec{H} = (\mu_r - 1) \frac{\vec{B}}{\mu_0 \mu_r} = \frac{(\mu_r - 1)}{2\pi r} I$

28

【例21】如图所示，一无限大薄金属板上均匀地分布着电流，其面电流密度为  $i_0$ ，在金属板的两侧各紧贴一相对介电常数为  $\mu_{r1}$  和  $\mu_{r2}$ 、无限大、有限厚的均匀磁介质板，试分别求二磁介质板内的磁感应强度、两介质板表面上的磁化面电流密度。

【解】无磁介质时，面电流  $i$  在两侧产生的磁感应强度为：

$\oint_L \vec{B}_0 \cdot d\vec{l} = 2B_0 \Delta l = \mu_0 (i_0 \Delta l)$

$B_0 = \frac{1}{2} \mu_0 i_0$

方向：与表面平行

29

$\vec{i}' = (\vec{M}_1 - \vec{M}_2) \times \vec{n}$

【解法一】设  $i'$  为磁化面电流密度，均匀各向同性介质中有：

介质1与金属板界面  $i'_1 = M_1 = \chi_{m1} H_1 = (\mu_{r1} - 1) H_1$

介质2与金属板界面  $i'_2 = M_2 = \chi_{m2} H_2 = (\mu_{r2} - 1) H_2$

由磁场的叠加原理以及无限大载流平面的磁感应强度公式，有：

有正、反两个方向的  $i'$

$B_1 = B_0 + B'_1 = \frac{1}{2} \mu_0 (i_0 + i'_1 + i'_1) = \mu_0 \mu_{r1} H_1 = \frac{\mu_0 \mu_{r1}}{\mu_{r1} - 1} i'_1$

$B_2 = B_0 + B'_2 = \frac{1}{2} \mu_0 (i_0 + i'_2 + i'_2) = \mu_0 \mu_{r2} H_2 = \frac{\mu_0 \mu_{r2}}{\mu_{r2} - 1} i'_2$

30

解出, 得:

$$i'_1 = (\mu_{r1} - 1) \frac{i_0}{2}$$

$$i'_2 = (\mu_{r2} - 1) \frac{i_0}{2}$$

代回到  $B$  的式子中, 得到:

$$B_1 = \frac{\mu_0 \mu_{r1}}{\mu_{r1} - 1} i'_1 = \mu_0 \mu_{r1} \frac{i_0}{2} = \mu_{r1} B_0$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 \mu_{r2}}{\mu_{r2} - 1} i'_2 = \mu_0 \mu_{r2} \frac{i_0}{2} = \mu_{r2} B_0$$

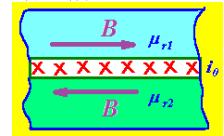
$$\bar{B} = \mu_r \bar{B}_0$$

31

【解法二】如图介质分界面与  $B$  平行, 所以:

$$\bar{B} = \mu_r \bar{B}_0$$

$i_0$  在真空中产生的磁感应强度为  $B_0 = \frac{1}{2} \mu_0 i_0$



所以各区磁感应强度为:

$$\bar{B}_1 = \mu_{r1} \bar{B}_0 = \frac{1}{2} \mu_0 \mu_{r1} i_0, \quad \bar{B}_2 = \mu_{r2} \bar{B}_0 = \frac{1}{2} \mu_0 \mu_{r2} i_0$$

磁化电流为

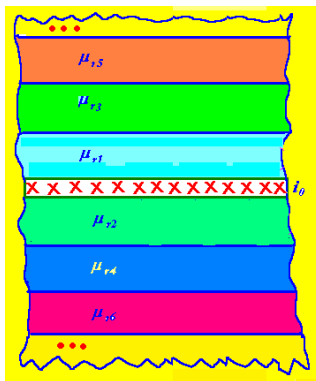
$$\bar{i}'_1 = \bar{M}_1 \times \bar{n} = \chi_m \bar{H}_1 \times \bar{n}$$

$$\bar{i}'_2 = \bar{M}_2 \times \bar{n} = \chi_m \bar{H}_2 \times \bar{n}$$

$$= \chi_m \frac{\bar{B}_1}{\mu_{r1} \mu_0} \times \bar{n} = \frac{(\mu_{r1} - 1)}{2} \bar{i}_0$$

$$= \chi_m \frac{\bar{B}_2}{\mu_{r2} \mu_0} \times \bar{n} = \frac{(\mu_{r2} - 1)}{2} \bar{i}_0$$

32



$B$  与界面平行

$$\bar{B} = \mu_r \bar{B}_0$$

$$\bar{B}_1 \neq \bar{B}_2 \neq \dots$$

$$\bar{H} = \frac{\bar{B}_0}{\mu_0}$$

$$\bar{H}_1 = \bar{H}_2 = \bar{H}_3 = \dots$$

载流金属板两边有若干层磁介质

33

## (2) 介质分界面与 $B$ 垂直情况

$$\because \bar{M} = \chi_m \bar{H} = (\mu_r - 1) \frac{\bar{B}}{\mu_r \mu_0}$$

分界面与  $B$  垂直, 即分界面上

$$B = B_n, \quad M = M_n$$

$$\bar{i}' = (\bar{M}_1 - \bar{M}_2) \times \bar{n} \quad M \text{ 只有垂直分量 } \theta = 0$$

$$\therefore i' = 0$$

介质分界面与  $B$  垂直时, 界面上无磁化电流

34

分界面  $\perp B$ , 故  $B = B_n$ , 而界面上  $B_n$  连续, 即:

$$B_1 = B_2 = \dots = B_i = B$$

由毕奥—萨伐尔定律  $B$  和  $B_0$  (无介质时传导电流产生的磁感应强度) 在大小上差一常数, 但具有相同的构形:

$$\bar{B} = \alpha \bar{B}_0$$

即介质的引入不改变磁感应强度的分布形式, 改变的仅仅是它的强度。这种情况下, 可去掉介质, 按真空情况处理, 算得真空下的  $B_0$ , 由环路定理确定系数  $\alpha$ , 再推算介质下的  $B$ :

$$\oint_L \frac{\bar{B}}{\mu_0 \mu_r} \cdot d\vec{l} = \sum I_0$$

$$\bar{B} = \alpha \bar{B}_0$$



$$\alpha = \frac{\sum I_0}{\oint_L \frac{\bar{B}_0}{\mu_0 \mu_r} \cdot d\vec{l}}$$

35

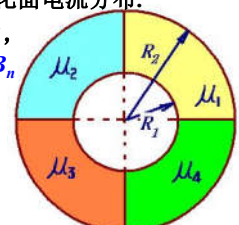
【例22】半径为  $R_1$  和  $R_2$  的导体构成同轴电缆。通一电流  $I$ , 内充 4 种介质, 各占 1/4。求介质内  $B$  和  $H$ , 传导面电流和磁化面电流分布。

【解】 $B$  方向为圆周切线方向, 与两介质分界面垂直, 故  $B = B_n$  介质界面  $B_n$  连续:

$$B_1 = B_2 = B_3 = B_4 = B$$

各磁介质区域磁感应强度相等,  $B$  有对称性

不是  $H$  有对称性!



由磁介质中的环路定理 ( $R_1 < r < R_2$ )

$$\oint_L \bar{H} \cdot d\vec{l} = \oint_L \frac{\bar{B}}{\mu_0 \mu_r} \cdot d\vec{l}$$

$$= \frac{B}{\mu_0 \mu_1} \frac{1}{2} \pi r + \frac{B}{\mu_0 \mu_2} \frac{1}{2} \pi r + \frac{B}{\mu_0 \mu_3} \frac{1}{2} \pi r + \frac{B}{\mu_0 \mu_4} \frac{1}{2} \pi r = I$$

36

令  $\frac{1}{\mu'} = \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_3} + \frac{1}{\mu_4} \Rightarrow B = \frac{2\mu_0\mu'I}{\pi r}$

或者先算真空下的  $B_0$   $B_0 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$

$\alpha = \frac{I}{\oint_L \frac{\vec{B}_0}{\mu_0 \mu_r} \cdot d\vec{l}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r \left( \frac{1}{\mu_0 \mu_1} + \frac{1}{\mu_0 \mu_2} + \frac{1}{\mu_0 \mu_3} + \frac{1}{\mu_0 \mu_4} \right) \frac{1}{2} \pi r} = 4\mu'$

$B = \alpha B_0 = 4\mu' \mu_0 \frac{I}{2\pi r} = \frac{2\mu_0\mu'I}{\pi r}$  两者相等

$\vec{H}_i = \frac{1}{\mu_0 \mu_i} \vec{B} \Rightarrow \begin{cases} \vec{H}_1 = \frac{\vec{B}}{\mu_0 \mu_1} = \frac{2\mu'I}{\pi \mu_1 r} \vec{e} \\ \vec{H}_2 = \frac{\vec{B}}{\mu_0 \mu_2} = \frac{2\mu'I}{\pi \mu_2 r} \vec{e} \\ \vec{H}_3 = \frac{\vec{B}}{\mu_0 \mu_3} = \frac{2\mu'I}{\pi \mu_3 r} \vec{e} \\ \vec{H}_4 = \frac{\vec{B}}{\mu_0 \mu_4} = \frac{2\mu'I}{\pi \mu_4 r} \vec{e} \end{cases}$

$B = \frac{2\mu_0\mu'I}{\pi r}$

$B_1 = B_2 = B_3 = B_4 = B$   $\vec{H}_1 \neq \vec{H}_2 \neq \vec{H}_3 \neq \vec{H}_4$

各区磁场强度  $H_i$  与磁介质有关, 不具有对称性

各区磁化强度 (与磁介质有关):

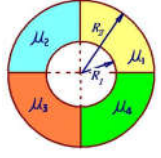
$$\begin{cases} M_1 = \chi_{m1} H_1 = (\mu_1 - 1) H_1 = \frac{2(\mu_1 - 1)\mu'I}{\pi \mu_1 r} \\ M_2 = \chi_{m2} H_2 = (\mu_2 - 1) H_2 = \frac{2(\mu_2 - 1)\mu'I}{\pi \mu_2 r} \\ M_3 = \chi_{m3} H_3 = (\mu_3 - 1) H_3 = \frac{2(\mu_3 - 1)\mu'I}{\pi \mu_3 r} \\ M_4 = \chi_{m4} H_4 = (\mu_4 - 1) H_4 = \frac{2(\mu_4 - 1)\mu'I}{\pi \mu_4 r} \end{cases}$$

两介质的交界面上, 尽管  $M_1 \neq M_2 \neq M_3 \neq M_4$

但是  $B = B_n, M = M_n$

$\vec{i}' = (\vec{M}_1 - \vec{M}_2) \times \vec{n} = 0$

两介质交界面上无磁化电流;  
磁化电流仅可能出现在介质和载流导体的界面



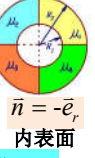
$\vec{i}'_0 = (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) \times \vec{n}$   $\vec{i}' = (\vec{M}_1 - \vec{M}_2) \times \vec{n}$

对  $r < R_1$ ,  $B = H = M = 0$ , 因此可求出  $r = R_1$  处的四个磁化面电流和四个传导面电流 (都与磁介质相关)

内表面  $\vec{n} = -\vec{e}_r$

$$\begin{cases} i_{01} = H_1|_{r=R_1} = \frac{1}{\mu_1} \frac{2\mu'I}{\pi R_1} \\ i_{02} = H_2|_{r=R_1} = \frac{1}{\mu_2} \frac{2\mu'I}{\pi R_1} \\ i_{03} = H_3|_{r=R_1} = \frac{1}{\mu_3} \frac{2\mu'I}{\pi R_1} \\ i_{04} = H_4|_{r=R_1} = \frac{1}{\mu_4} \frac{2\mu'I}{\pi R_1} \end{cases} \quad \begin{cases} i'_1 = M_1|_{r=R_1} = \frac{2(\mu_1 - 1)\mu'I}{\pi \mu_1 R_1} \\ i'_2 = M_2|_{r=R_1} = \frac{2(\mu_2 - 1)\mu'I}{\pi \mu_2 R_1} \\ i'_3 = M_3|_{r=R_1} = \frac{2(\mu_3 - 1)\mu'I}{\pi \mu_3 R_1} \\ i'_4 = M_4|_{r=R_1} = \frac{2(\mu_4 - 1)\mu'I}{\pi \mu_4 R_1} \end{cases}$$

$i_{01} \neq i_{02} \neq i_{03} \neq i_{04}$   $i'_1 \neq i'_2 \neq i'_3 \neq i'_4$

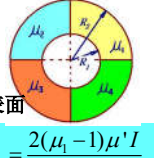


同理,  $r > R_2$ ,  $B = H = M = 0$ , 可求出  $r = R_2$  处的四个磁化面电流和四个传导面电流

外表面  $\vec{n} = \vec{e}_r$

$$\begin{cases} i_{01} = H_1|_{r=R_2} = \frac{1}{\mu_1} \frac{2\mu'I}{\pi R_2} \\ i_{02} = H_2|_{r=R_2} = \frac{1}{\mu_2} \frac{2\mu'I}{\pi R_2} \\ i_{03} = H_3|_{r=R_2} = \frac{1}{\mu_3} \frac{2\mu'I}{\pi R_2} \\ i_{04} = H_4|_{r=R_2} = \frac{1}{\mu_4} \frac{2\mu'I}{\pi R_2} \end{cases} \quad \begin{cases} i''_1 = M_1|_{r=R_2} = \frac{2(\mu_1 - 1)\mu'I}{\pi \mu_1 R_2} \\ i''_2 = M_2|_{r=R_2} = \frac{2(\mu_2 - 1)\mu'I}{\pi \mu_2 R_2} \\ i''_3 = M_3|_{r=R_2} = \frac{2(\mu_3 - 1)\mu'I}{\pi \mu_3 R_2} \\ i''_4 = M_4|_{r=R_2} = \frac{2(\mu_4 - 1)\mu'I}{\pi \mu_4 R_2} \end{cases}$$

同一载流导体可与多种磁介质相邻, 不同相邻面上的磁化面电流各异  $i''_1 \neq i''_2 \neq i''_3 \neq i''_4$





$$i = i_0 + i'$$

$$r = R_1 \Rightarrow i_1 = i_2 = i_3 = i_4 = \frac{2\mu' I}{\pi R_1}$$

$$i = i_0 + i''$$

$$r = R_2 \Rightarrow i_1 = i_2 = i_3 = i_4 = \frac{2\mu' I}{\pi R_2}$$

即 $r=R_1, r=R_2$ 处的磁化面电流和传导电流密度分布都不均匀(与磁介质有关);

但总面电流 $i=i'+i_0$ 的分布却是均匀的。

总面电流分布的这种对称性决定了总磁感应强度的对称性。

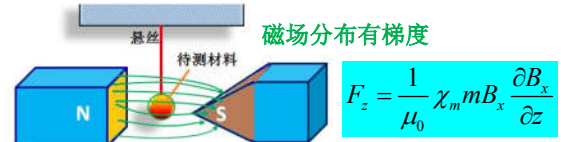
可是介质的引入破坏了磁场强度 $H$ 的轴对称性, 因此无法直接通过安培环路定理计算 $H$ 。

43

## § 5-2 磁性材料

### § 5.2.1 抗磁性、顺磁性和铁磁性

物质的磁性也可通过该物质在磁场中受到的力来定义



- 当材料被吸引到 $S$ 即时, 为顺磁性材料;
- 当材料被 $S$ 极排斥时, 为抗磁性材料;
- 由力的大小大致可判断为弱磁性材料或是强磁性材料。

44

### 1. 抗磁性材料

抗磁性的定义  $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$

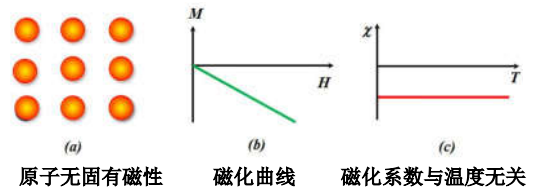
$$\chi_m < 0 \quad -(10^{-5} \sim 10^{-7}) \quad M \text{ 与 } H \text{ 反向} \quad \mu_r = 1 + \chi_m < 1$$

- 磁化率 $\chi_m$ 小于0, 且绝对值远小于1, 属于弱磁性材料。
- 抗磁性是一切物质都具有的;
- 但当物质中的其他磁性(如顺磁性或铁磁性)超过抗磁性时, 会主要考虑其他磁性而忽略抗磁性。
- 精确计算和理论分析时, 必须考虑抗磁性的影响。

45

### 抗磁性材料的基本特性

- 抗磁性物质的磁化系数 $\chi_m$ 一般不随温度变化(少数物质如石墨烯除外);
- 抗磁性物质的磁化系数 $\chi_m$ 一般也不随物质状态发生变化(个别例外, 如铋)



46

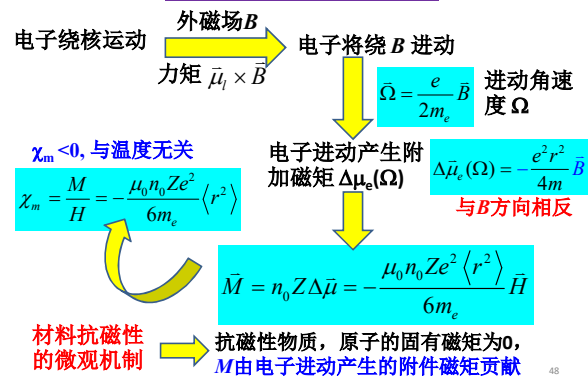
自然界中大多数物质都具有抗磁性

| 物质                             | 磁化率   | 物质                             | 磁化率    |
|--------------------------------|-------|--------------------------------|--------|
| CO <sub>2</sub>                | -21.0 | Hg                             | -24.1  |
| CO                             | -9.8  | Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> | -37.0  |
| SO <sub>2</sub>                | -18.2 | NaCl                           | -30.3  |
| Br <sub>2</sub>                | -73.5 | ZnO                            | -46.0  |
| NH <sub>3</sub>                | -18.0 | C <sub>2</sub> H <sub>2</sub>  | -12.5  |
| H <sub>2</sub> S               | -25.5 | C <sub>6</sub> H <sub>6</sub>  | -54.84 |
| SCl <sub>2</sub>               | -49.4 | C <sub>4</sub> H <sub>10</sub> | -57.4  |
| H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> | -39.8 | PbO                            | -42.0  |

(单位: 质量比磁化率,  $4\pi \times 10^{-6} \text{ cm}^3/\text{g}$ )

47

### 抗磁性的磁化机制



48

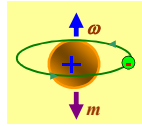


抗磁性磁介质分子的固有磁矩为零，这是因为抗磁性原子中的电子壳层是满壳层，每一壳层中的电子自旋磁矩互为反向平行而抵消，其轨道运动产生的轨道磁矩在无外磁场时也是相互抵消的，因此所有原子(或分子)的合磁矩为零。

电子的轨道磁矩  $\mu_l$

$$\mu_l = \pi r^2 I = -\pi r^2 \frac{e}{2\pi/\omega} = -\frac{er^2}{2} \omega$$

矢量形式 
$$\vec{\mu}_l = -\frac{er^2}{2} \vec{\omega}$$



49

在外磁场  $B$  中，该电子受到的力矩

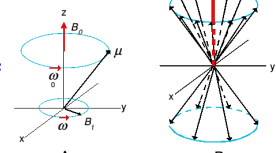
$$\vec{\tau} = \vec{\mu}_l \times \vec{B} = -\frac{er^2}{2} \vec{\omega} \times \vec{B} = \frac{er^2}{2} \vec{B} \times \vec{\omega}$$

该力矩作用下，电子将绕  $B$  进动。通常外磁场的洛伦兹力远小于分子内的库仑力，以至于进动角速度  $\Omega$  远小于电子绕核运动的角速度  $\omega$ 。由力学可推出：

$$\vec{\tau} = m_e r^2 \vec{\Omega} \times \vec{\omega}$$

代入上式得进动角速度  $\Omega$ ：

$$\vec{\Omega} = \frac{e}{2m_e} \vec{B}$$



电子轨道面的进动角速度总是与外磁场同向，与电子轨道的取向和电子旋转的方向、快慢无关。

50

- 电子进动将产生附加磁矩  $\Delta\mu_e(\Omega)$ ，该磁矩与  $\Omega$  反向，亦与  $B$  反向

$$\Delta\mu_e(\Omega) = -\frac{1}{2} er^2 \vec{\Omega} = -\frac{e^2 r^2}{4m} \vec{B}$$

$$\vec{\Omega} = \frac{e}{2m_e} \vec{B}$$

- 电子的总磁矩

$$\vec{\mu} = \sum [\vec{\mu}_e + \Delta\mu_e(\vec{\Omega})] = \sum \vec{\mu}_e + \sum \Delta\mu_e(\vec{\Omega})$$

对抗磁性物质 
$$\sum \vec{\mu}_e = 0$$

但  $\sum \Delta\mu_e(\vec{\Omega}) \neq 0$  且与磁场反向，呈现抗磁性  
因此，电子进动产生的附加磁矩是材料抗磁性的微观机制。

51

对全部电子轨道统计平均后，得到一个电子进动产生的附加磁矩为：

$$\Delta\mu_e = -\frac{e^2 \langle r^2 \rangle}{6m_e} \vec{B}$$

设一个分子中电子总数为  $Z$  (对单原子分子， $Z$  为原子序数)，单位体积中分子数目为  $n_0$ ，则

$$M = n_0 Z \Delta\mu_e = -\frac{n_0 Z e^2 \langle r^2 \rangle}{6m_e} \vec{B} = -\frac{\mu_0 n_0 Z e^2 \langle r^2 \rangle}{6m_e} \vec{H}$$

磁化率为：

$$\chi_m = -\frac{\mu_0 n_0 Z e^2 \langle r^2 \rangle}{6m_e}$$

对给定的  $n_0$ ， $\chi_m$  与温度无关

52

## 2. 顺磁性材料

### 顺磁性的定义

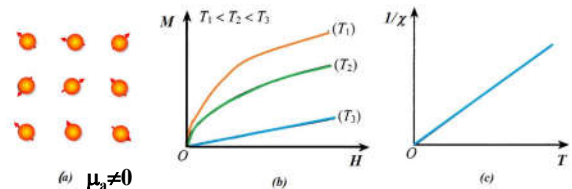
$$\chi_m > 0 \quad (10^{-4} \sim 10^{-5}) \quad M \text{ 与 } H \text{ 同向} \quad \mu_r = 1 + \chi_m > 1$$

$\chi_m$  值远小于1，属于弱磁性材料，如锰、铬、锂、钠等

### 顺磁性材料的基本特性

- 顺磁性介质分子具有固有磁矩 ( $\mu_n \neq 0$ )。
- 外磁场使每个分子磁矩都受到一个力矩，使分子磁矩转向外磁场方向  $M \neq 0$ 。
- 热运动阻止  $M$  转向  $H$  方向，温度越高，顺磁效应越弱。

53



$T$  减小， $\chi_m$  增大，顺磁性材料服从

居里定律 
$$\chi_m = \frac{C}{T}$$
 或 居里-外斯定律 
$$\chi_m = \frac{C}{T - T_C}$$

$C$  为居里常数， $T_C$  顺磁居里温度，温度低于  $T_C$  时材料表现出顺磁性特征。 $C$  和  $T_C$  可从实验获得

54

### 顺磁性分类

|                    |         |          |                              |
|--------------------|---------|----------|------------------------------|
| 顺磁性                | 一般顺磁性   | 居里顺磁性    | $\chi_m = \frac{C}{T}$       |
|                    |         | 居里-外斯顺磁性 | $\chi_m = \frac{C}{T - T_c}$ |
|                    | 泡利顺磁性   | 顺磁性      | $\chi_m(18^\circ\text{C})$   |
|                    | 范弗莱克顺磁性 | 锰        | 12.4                         |
|                    |         | 铬        | 4.5                          |
|                    |         | 铝        | 0.82                         |
| $(\times 10^{-5})$ |         |          |                              |
|                    | 空气*     | 30.36    |                              |

### 顺磁性的磁化机制

具有固有磁矩的分子在外加磁场中受力矩，向外场方向转向

$$\vec{L} = \vec{\mu}_m \times \vec{B} \quad \mu_m \text{ 为分子磁矩}$$

磁分子取向在有外场时满足 Boltzmann 分布

$$dn(\theta) = Ae^{\frac{\varepsilon_p}{KT}} \sin \theta d\theta$$

$A$  为归一化因子。磁矩在外场中的势能为：

$$\varepsilon_p = -\vec{\mu}_m \cdot \vec{B} = -\mu_m B \cos \theta$$

when  $|\varepsilon_p| \ll kT$   $k$  为波尔兹曼常数，取一级近似

$$e^{\frac{\varepsilon_p}{KT}} \approx 1 - \frac{\varepsilon_p}{KT} = 1 + \frac{\mu_m B \cos \theta}{KT} \quad \varepsilon_p = -\mu_m B \cos \theta$$

$$\therefore dn(\theta) = Ae^{\frac{\varepsilon_p}{KT}} \sin \theta d\theta = A \left( 1 + \frac{\mu_m B \cos \theta}{KT} \right) \sin \theta d\theta$$

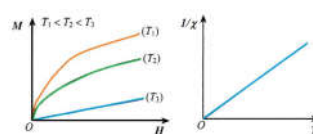
由归一化关系  $\int dn(\theta) = n_0$  得  $A = n_0 / 2$

$$dn(\theta) = \frac{n_0}{2} \left( 1 + \frac{\mu_m B \cos \theta}{KT} \right) \sin \theta d\theta$$

所以磁化强度  $M$  为：

$$M = \int \mu_m \cos \theta dn(\theta) \approx \frac{n_0 \mu_m^2}{3KT} B = \frac{n_0 \mu_0 \mu_m^2}{3KT} H = \chi_m H$$

系数  $\chi_m$  为： $\chi_m = \frac{\mu_0 n_0 \mu_m^2}{3KT} = \frac{C}{T}$  磁介质的磁化率与温度成反比



对气态，顺磁介质实验与理论符合，但对固态或液态磁介质，上式不完全符合

在量子力学中，可推出顺磁材料弱磁场下磁化率

$$\chi_m = \frac{\mu_0 n_0 g^2 S(S+1) \mu_B^2}{3kT} = \frac{C}{T}$$

### 顺磁材料的应用

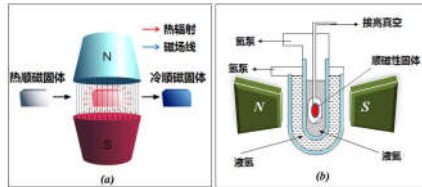
- (1) 通过顺磁性来研究电子组态；
- (2) 利用顺磁性的绝热去磁效应，可获得  $1 \sim 10^{-6} \text{K}$  的超低温；
- (3) 发展具有超低噪声的顺磁量子放大器以及顺磁共振成像技术等。

### 3. 磁制冷技术

| 温区   | 温度范围(K) | 材料磁特性   | 材料的磁效应 | 例子  |
|------|---------|---------|--------|---|
| 常温区  | ~300    | 磁临界温度特性 | 磁-热效应  | Gd和Gd合金   |
| 低温区  | 1-200   | 磁临界温度特性 | 磁-热效应  | Gd <sub>3</sub> Ca <sub>5</sub> O <sub>12</sub> 系 |
| 超低温区 | 0.001~1 | 顺磁性     | 绝热去磁   | Mn系和Cr系   |
| 极低温区 | <0.001  | 顺磁性     | 核绝热去磁  | <sup>3</sup> He, <sup>63</sup> Cu等                |

- 绝热去磁制冷技术是德拜(P. Denye, 获1936年诺贝尔化学奖)在1926年首先提出；
- 1933年加拿大科学家吉奥克(W. Giauque, 获1949年诺贝尔化学奖)首次获得应用，温度降到0.25K和0.13K；
- 1950年用该技术已达到了0.0014K；
- 1956年英国人西蒙和克尔梯用核去磁冷却法获得10<sup>-6</sup>K。

**绝热去磁方法的基本原理：**将顺磁性物质放在减压液氮冷却的腔内，加上磁场( $10^6 \text{ A/m}$ )进行等温磁化，抽出低压氮气而使顺磁体绝热，然后准静态地使磁场减小到很小的值。由于在绝热去磁条件下，吸收大量的热，故产生制冷效应。



目前用Cu核的最低致冷温度已经达到了 $2 \times 10^{-9} \text{ K}$ 。由于 $\text{PrNi}_5$ 合金具有超精细作用增强效应，可以使镨(Pr)核受到的超精细磁场比外磁场增强约14倍，这可以使磁铁体积减少，可以作为Cu核致冷的前一级致冷。

61

**作业** 5.10, 5.14, 5.15, 5.16

