上节课主要内容

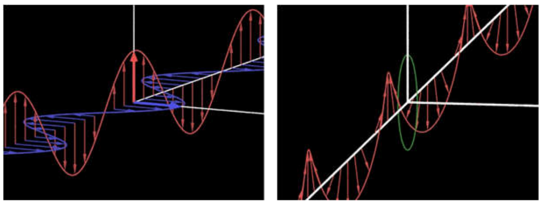
$$\begin{cases}\oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}=\sum q_0\\ \oint_l \vec{E}\cdot d\vec{l}=-\iint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}\\ \oiint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}=0\\ \oint_l \vec{H}\cdot d\vec{l}=\sum I_0+\iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S}\end{cases}\qquad \begin{cases}\nabla\cdot\vec{D}=\rho_0\\ \nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\\ \nabla\cdot\vec{B}=0\\ \nabla\times\vec{H}=\vec{j}_0+\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\vec{B}=\mu_0\mu_r\vec{H}\\ \vec{D}=\varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}\\ \vec{j}_0=\sigma\vec{E}\end{cases}\qquad \begin{cases}\vec{n}\cdot(\vec{D}_2-\vec{D}_1)=\sigma_0\\ \vec{n}\times(\vec{E}_2-\vec{E}_1)=0\\ \vec{n}\cdot(\vec{B}_2-\vec{B}_1)=0\\ \vec{n}\times(\vec{H}_2-\vec{H}_1)=\vec{i}_0\end{cases}$$

$$\vec{F}=q\left(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}\right)$$

1

§ 8.4 平面电磁波



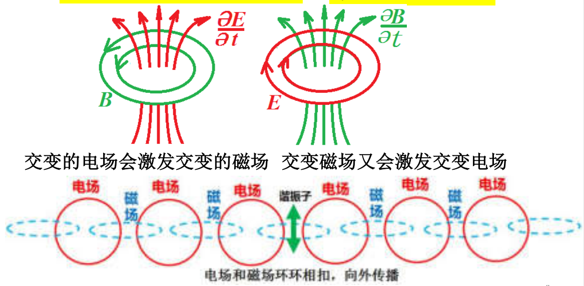
2

电磁波的预言和验证

- ***Maxwell***位移电流假设的实质是：随时间变化的电场和电流一样能激发磁场，这里的电流包括传导电流、极化电流和磁化电流。
- 涡旋电场假设的实质是：随时间变化的磁场会激发电场。
- 这两个假设相结合，就自然得出电磁场在空间中传播的结论，即导致电磁波的理论预言，这就是***Maxwell***的第一个预言。
- 该预言的实验证明，将间接为这两个假设提供有力的证据。

3

$$\begin{cases}\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l}=-\iint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}\\ \oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l}=\sum I_0+\iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S}\end{cases}\qquad \begin{cases}\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\\ \nabla\times\vec{H}=\vec{j}_0+\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\end{cases}$$



4

- 1864年12月8日，***Maxwell*** 在英国皇家学会宣读了他的论文《电磁场的动力学理论》，导出了电磁场的波动方程，得到电磁波的传播速度等于光速，从而推论光是电磁波的一种形式，揭示了光现象和电磁现象之间的联系。在这篇论文中用醒目的斜体字写道：“*我们不可避免地推论，光是媒介中起源于电磁场的横波*”。
- 1887年，德国物理学家赫兹用实验验证了电磁波的存在，证实了***Maxwell***的第一个预言。

5

§ 8.4.1 真空中自由空间的电磁波

- 对自由和无界真空，且 $\rho_0=0$，$j_0=0$，则：

$$\begin{cases}\nabla\cdot\vec{D}=\rho_0\\ \nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\\ \nabla\cdot\vec{B}=0\\ \nabla\times\vec{H}=\vec{j}_0+\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}\nabla\cdot\vec{D}=0\\ \nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\\ \nabla\cdot\vec{B}=0\\ \nabla\times\vec{H}=\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\end{cases}$$

$$\varepsilon_r=1,\ \mu_r=1 \Downarrow \begin{cases}\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}\\ \vec{B}=\mu_0\vec{H}\end{cases}$$

$$\nabla\times\vec{B}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

6

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\qquad \nabla\times\left(\nabla\times\vec{E}\right)=-\nabla\times\left(\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)=-\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\times\vec{B}\right)=-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\because\nabla\times(\nabla\times\vec{E})=\nabla(\nabla\cdot\vec{E})-\nabla^2\vec{E}=-\nabla^2\vec{E}$$

$$\therefore\nabla^2\vec{E}-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=0$$

$$\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}-\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\nabla^2\vec{E}=0$$

同理 $$\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}-\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\nabla^2\vec{B}=0$$

令 $v=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}=2.997\times10^8\,m/s=c$

正是光在真空中的传播速度！

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}-c^2\nabla^2\vec{E}=0\\[2mm]\dfrac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}-c^2\nabla^2\vec{B}=0\end{cases}$$

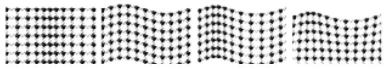
自由空间中电场和磁场的运动方程！ $\vec{E}(x,y,z,t)$ $\vec{B}(x,y,z,t)$

对任意量 ψ $\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-c^2\nabla^2\psi=0$ 是一个波动方程

- 因此，随时间变化的电场和磁场是以波的形式传播的，这就是电磁波的传播方程

一维波动方程 $\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=0$ $\qquad c=\frac{\omega}{k}$

其解为平面波： $\psi(x,t)=Ae^{ikx-i\omega t}+Be^{ikx+i\omega t}=Ae^{ik(x-ct)}+Be^{ik(x+ct)}$ $\qquad k=\frac{2\pi}{\lambda}$ k:波矢



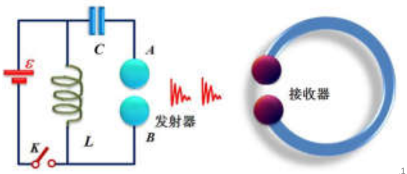
$$\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}-c^2\nabla^2\vec{E}=0\qquad\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}-c^2\nabla^2\vec{B}=0$$

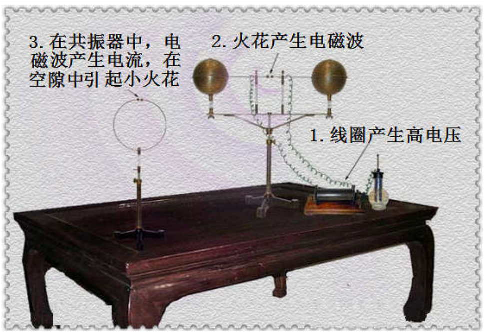
- 电场和磁场间的相互耦合关系导致了电磁波的存在。
- 电磁波在真空中以光速传播，光是电磁波。这是 ***Maxwell*** 做出的第二个成功预言；
- 与机械波不同的是，电磁波是电磁场振荡的传播，它不需要介质，在真空中同样可以传播。这一点是不可思议的。
- 认识到电磁场的物质性后，人们最终抛弃了以太假设，接受了电磁场也是客观存在的物质的结论。

§ 8.4.2 赫兹实验

- 赫兹(***H. Hertz***，***1857-1894***)，德国物理学家，于**1888**年**1**月**21**日，他完成了著名论文《论电动力学作用的传播速度》，这一天被人们定为实验证实电磁波存在的纪念日。
- 同年发表的《论电力辐射》及后来的两篇续篇，标志着赫兹对电磁波探索的成功完成，也标志着无线电、电视和雷达发展的起点。
- **1894**年赫兹因病去世，年仅**37**岁，为纪念他在电磁波方面的成就，频率的国际单位制单位赫兹**(Hz)**就是以他的名字命名的。

- 赫兹根据电容器经由电火花隙会产生振荡原理，设计了一套电磁波发生器：感应线圈的两端接在产生器的二铜棒上，当充电到一定程度时，***A***、***B***之间的间隙被火花击穿，电荷经由火花隙在黄铜球***A***、***B***之间震荡，相当于一个震荡的谐振子，频率高达10^8-10^9 Hz。
- 赫兹又设计了一简单的检波器来探测此电磁波：将一小段导线弯成圆形，线的两端点间留有小电火花隙。电磁波应在此小线圈上产生感应电压，从而在间隙处产生火花。





赫兹坐在一暗室内，检波器距振荡器**10**米远，通过调节检波器的方向和间隙大小，发现检波器的电火花隙间确有小火花产生。

- 赫兹在暗室远端的墙壁上覆盖一个可反射电波的锌板，入射波与反射波重叠应产生驻波，他以检波器在距振荡器不同距离处侦测加以证实。
- 赫兹先求出振荡器的频率，又以检波器量得驻波的波长，二者乘积即电磁波的传播速度。正如麦克斯韦预测的一样，电磁波传播的速度等于光速。
- 赫兹的实验实现了电磁波的发射和接收，成功验证了麦克斯韦电磁理论关于电磁波的预言。
- 赫兹在实验时曾指出，电磁波可以被反射、折射和如同可见光、热波一样的被偏振，明确指出光是一种电磁现象。

§ 8.4.3 平面电磁波的性质

对均匀各向同性介质，且 $\rho_0=0$，$j_0=0$ 时

$$\begin{cases}\vec D=\varepsilon_0\varepsilon_r\vec E\\ \vec B=\mu_0\mu_r\vec H\end{cases}$$

$$\begin{cases}\nabla\cdot\vec D=\rho_0\\ \nabla\times\vec E=-\dfrac{\partial\vec B}{\partial t}\\ \nabla\cdot\vec B=0\\ \nabla\times\vec H=\vec j_0+\dfrac{\partial\vec D}{\partial t}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\nabla\cdot\vec E=0,\nabla\cdot\vec H=0\\ \nabla\times\vec E=-\mu_0\mu_r\dfrac{\partial\vec H}{\partial t}\\ \nabla\times\vec H=\varepsilon_0\varepsilon_r\dfrac{\partial\vec E}{\partial t}\end{cases}$$

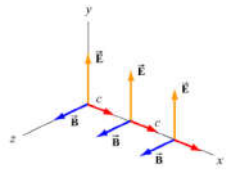
定态平面电磁波解可表示为复数形式：

$$\begin{cases}\vec E=\vec E_0e^{-i(\omega t-\vec k\cdot\vec r)}\\ \vec H=\vec H_0e^{-i(\omega t-\vec k\cdot\vec r)}\end{cases}$$

k为波矢，方向为波的传播方向

$$k=\frac{2\pi}{\lambda},\quad \nabla=i\vec k,\quad \frac{\partial}{\partial t}=-i\omega$$

$$\begin{cases}\vec k\cdot\vec E=0,\vec k\cdot\vec H=0\\ \vec k\times\vec E=\mu_0\mu_r\omega\vec H\\ \vec k\times\vec H=-\varepsilon_0\varepsilon_r\omega\vec E\end{cases}$$

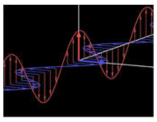


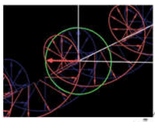
$$\begin{cases}\vec k\cdot\vec E=0,\vec k\cdot\vec H=0\\ \vec k\times\vec E=\mu_0\mu_r\omega\vec H\\ \vec k\times\vec H=-\varepsilon_0\varepsilon_r\omega\vec E\end{cases}$$

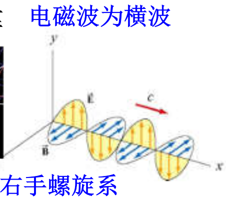
$$\vec k\perp\vec E,\vec k\perp\vec H,\vec E\perp\vec H$$

横波：振动方向与传播方向垂直
纵波：振动方向与传播方向平行

电磁波为横波







***E, H, k*三个矢量构成一个右手螺旋系**

两边用 $k\times$

$$\vec k\times\vec E=\mu_0\mu_r\omega\vec H\Rightarrow\vec k\times\left(\vec k\times\vec E\right)=\mu_0\mu_r\omega\vec k\times\vec H$$

$$\vec k\times(\vec k\times\vec E)=\vec k(\vec k\cdot\vec E)-k^2\vec E$$

$$\vec k\left(\vec k\cdot\vec E\right)-k^2\vec E=\mu_0\mu_r\omega\vec k\times\vec H$$

$$\vec k\cdot\vec E=0$$

$$-k^2\vec E=\mu_0\mu_r\omega\vec k\times\vec H$$

$$\vec k\times\vec H=-\frac{k^2}{\mu_0\mu_r\omega}\vec E$$

前面已有 $\vec k\times\vec H=-\varepsilon_0\varepsilon_r\omega\vec E$

$$\left(\varepsilon_0\varepsilon_r\omega-\frac{k^2}{\mu_0\mu_r\omega}\right)\vec E=0$$

该方程有非零解的条件是 E 前面的系数等于 0

$$\frac{\omega}{k}=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon_r\mu_0\mu_r}}=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}}=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon_r\mu_0\mu_r}}\qquad c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$$

$\because\vec k\times\vec E=\mu_0\mu_r\omega\vec H$ 又 $\vec k\perp\vec E$ 模为: $kE=\mu_0\mu_r\omega H$

$$\frac{\omega}{k}=\frac{E}{\mu_0\mu_r H}$$

$$\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon_r\mu_0\mu_r}E=\mu_0\mu_r H$$

电磁波的振幅 E_0 和 H_0 满足关系：

$$\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon_r}E_0=\sqrt{\mu_0\mu_r}H_0$$

$$\frac{E_0}{H_0}=\sqrt{\frac{\mu_0\mu_r}{\varepsilon_0\varepsilon_r}}\quad\text{或}\quad\frac{E_0}{B_0}=\sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon_r\mu_0\mu_r}}$$

- 在真空中有： $\dfrac{E_0}{B_0}=\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}=c$
- 介质中 $\dfrac{E_0}{B_0}=\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon_r\mu_0\mu_r}}=\dfrac{c}{n}$

  $n=\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}$ 为介质的折射率
- 电磁波传播速度 v $\quad v=\dfrac{\omega}{k}=\dfrac{c}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}}=\dfrac{c}{n}$
- 电场强度与磁感应强度的振幅之比为电磁波传播速度 v。

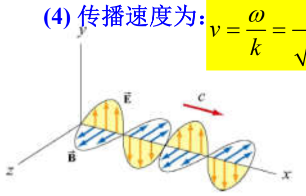
电磁波的性质概括为以下几点：

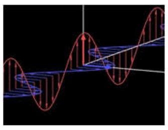
(1) 电磁波是横波，因为 $\vec{k}\perp\vec{E},\ \vec{k}\perp\vec{H}$

(2) 电场强度与磁场相垂直，且 ***E, H, k*** 三个矢量构成一个右手螺旋系。

(3) ***E*** 与 ***B*** 的幅度成比例 $\frac{E_0}{B_0}=\frac{c}{n}$

(4) 传播速度为: $v=\frac{\omega}{k}=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}}=\frac{c}{n}$ $\quad n=\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}$





§ 8.4.4 电磁波在导体中的传播

导体的基本特性是导体内无自由电荷积累，即

$$\rho_0=0,\ \vec{j}=\sigma\vec{E}$$

$$\begin{cases}\nabla\cdot\vec{D}=\rho_0\\ \nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\\ \nabla\cdot\vec{B}=0\\ \nabla\times\vec{H}=\vec{j}_0+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\nabla\cdot\vec{D}=0\\ \nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\\ \nabla\cdot\vec{B}=0\\ \nabla\times\vec{H}=\sigma\vec{E}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\end{cases}$$

对 $\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ 两边用∇×

$$\nabla\times\left(\nabla\times\vec{E}\right)=-\nabla\times\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\times\vec{B}\right)=-\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\times\mu\vec{H}\right)$$

$$\nabla\times\left(\nabla\times\vec{E}\right)=-\nabla^2\vec{E}\qquad \nabla\times\vec{H}=\sigma\vec{E}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

$$\nabla^2\vec{E}=\mu\sigma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}\qquad \mu=\mu_0\mu_r,\quad \varepsilon=\varepsilon_0\varepsilon_r$$

类似地，对 $\nabla\times\vec{H}=\sigma\vec{E}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ 两边用∇×

$$\nabla\times\left(\nabla\times\vec{H}\right)=\nabla\times\left(\sigma\vec{E}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)$$

$$\nabla\times\left(\nabla\times\vec{H}\right)=-\nabla^2\vec{H}=-\frac{1}{\mu}\nabla^2\vec{B}\qquad \nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\qquad \nabla\times\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}=\frac{\partial\left(\nabla\times\vec{D}\right)}{\partial t}=-\varepsilon\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2\vec{B}=\mu\sigma\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}+\varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}$$

$$\therefore\begin{cases}\nabla^2\vec{E}-\mu\sigma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}-\varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=0\\ \nabla^2\vec{B}-\mu\sigma\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}-\varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}=0\end{cases}$$

$\vec{E}$和$\vec{B}$ 满足的相同波动方程，该方程的标量形式为:

$$\nabla^2\psi-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-\mu\sigma\frac{\partial\psi}{\partial t}=0$$

阻尼项

如果只考虑一维沿 z 方向传播的电磁波，即

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-\mu\sigma\frac{\partial\psi}{\partial t}=0$$

其解为: $\psi(z,t)=\psi_0e^{-\beta z}e^{i(\alpha z-\omega t)}=\psi_0e^{(i\alpha-\beta)z-i\omega t}$

代入上式得 $(i\alpha-\beta)^2-\mu\varepsilon(-i\omega)^2-\mu\sigma(-i\omega)=0$

系数α和β满足:

$$\begin{cases}\alpha^2-\beta^2=\omega^2\mu\varepsilon\\ 2\alpha\beta=\omega\mu\sigma\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=\omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}+1\right]^{1/2}\\ \beta=\omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}-1\right]^{1/2}\end{cases}$$

对良导体有：$\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon}>>1$ 因此 $\alpha\approx\beta=\sqrt{\dfrac{\omega\mu\sigma}{2}}$

电磁波在导体中波幅降为 *1/e* 的深度称穿透深度 δ，即

$$\delta=\frac{1}{\beta}=\sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}=\sqrt{\frac{1}{\pi f\mu\sigma}}\qquad \omega=2\pi f$$

$$f\uparrow\mu\uparrow\sigma\uparrow\Rightarrow\delta\downarrow$$

对铜导体，*f=50Hz* 的电磁波，其穿透深度为 δ=0.9mm，可见电磁波很难在导体中传播。

导体腔依然可用来进行电磁屏蔽！

25

$$\psi(z,t)=\psi_0 e^{(i\alpha-\beta)z-i\omega t}$$

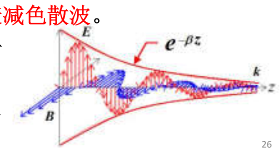
相移常数α：沿*k*方向的相移常数，表示单位长度上的相移变化，单位是：*rad/m*

波传播的相速度*v*：$v=\dfrac{\omega}{\alpha}=\sqrt{\dfrac{2}{\mu\varepsilon}}\left[\sqrt{1+\left(\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}+1\right]^{-1/2}$

(1)电磁波在导体中传播是要损耗的，但 ***E***、***B*** 和 ***k*** 矢量仍满足正交关系。

(2)导体中的电磁波是一衰减色散波。

(3)电场和磁场强度在任何时刻、任何地点不再同相，每一组正交分量之比不再等于波阻抗。



26

【例55】证明良导体内无自由电荷

【证明】$\nabla\cdot\vec D=\rho$ $\quad\varepsilon\nabla\cdot\vec E=\rho\quad$ $\vec E=\vec j/\sigma$

$$\nabla\cdot\vec j=\frac{\sigma}{\varepsilon}\rho$$

$$\nabla\cdot\vec j+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=-\frac{\sigma}{\varepsilon}\rho$$

$$\rho|_{t=0}=\rho_0$$

$$\rho(t)=\rho_0 e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t}=\rho_0 e^{-t/\tau}$$

$\tau=\dfrac{\varepsilon}{\sigma},\ (10^{-17}s)$ $\quad T=\dfrac{2\pi}{\omega}$

当 $\dfrac{t}{\tau}>>1$ 即 $\dfrac{\sigma}{\varepsilon\omega}>>1$ 为良导体 ⟹ $\rho(t)=0$

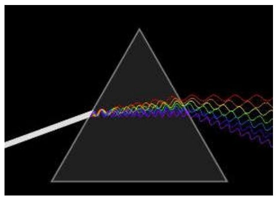
即良导体内无自由电荷积累

定态波动方程

- 无线电波在介质中传播时，如果该介质的介电常数 ε 或磁导率 μ 与频率ω无关，波的传播速度也与频率无关，这种介质称为非色散介质；
- 与此相反，如果介质的 ε 或传播速度 *v* 与频率有关，则称为色散介质

介质色散时

$$\vec D(\omega,r)=\varepsilon(\omega)\vec E(r)$$
$$\vec B(\omega,r)=\mu(\omega)\vec H(r)$$



- 单色波(频率单一，传播方向一定)

$$\begin{cases}\vec E(r,t)=\vec E(r)e^{-i\omega t}\\ \vec B(r,t)=\vec B(r)e^{-i\omega t}\end{cases}$$

$$\frac{\partial\vec D(r,t)}{\partial t}=\varepsilon\frac{\partial\vec E(r,t)}{\partial t}=-i\omega\varepsilon\vec E(r)e^{-i\omega t}=-i\omega\varepsilon\vec E(r,t)$$

$$\frac{\partial\vec B(r,t)}{\partial t}=-i\omega\vec B(r)e^{-i\omega t}-i\omega\vec B(r,t)=-i\omega\mu\vec H(r,t)$$

$$\begin{cases}\nabla\cdot\vec D=\rho_0\\ \nabla\times\vec E=-\dfrac{\partial\vec B}{\partial t}\\ \nabla\cdot\vec B=0\\ \nabla\times\vec H=\vec j_0+\dfrac{\partial\vec D}{\partial t}\end{cases}\quad \begin{matrix}\vec j_0=0\\ \rho_0=0\end{matrix}\ \Longrightarrow\ \begin{cases}\nabla\cdot\vec E=0\\ \nabla\times\vec E=-\dfrac{\partial\vec B}{\partial t}=i\omega\mu\vec H\\ \nabla\cdot\vec H=0\\ \nabla\times\vec H=-i\omega\varepsilon\vec E\end{cases}$$

29

$$\begin{cases}\nabla\cdot\vec E=0\\ \nabla\times\vec E=-\dfrac{\partial\vec B}{\partial t}=i\omega\mu\vec H\\ \nabla\cdot\vec H=0\\ \nabla\times\vec H=-i\omega\varepsilon\vec E\end{cases}$$

$$\nabla\times(\nabla\times\vec E)=i\omega\mu\nabla\times\vec H=\omega^2\mu\varepsilon\vec E$$
$$\nabla\times(\nabla\times\vec E)=\nabla(\nabla\cdot\vec E)-\nabla^2\vec E=-\nabla^2\vec E$$

令 $k=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$

$$\nabla^2\vec E+k^2\vec E=0$$

再由 $\nabla\times\vec E=-\dfrac{\partial\vec B}{\partial t}=i\omega\mu\vec H$

$$\vec H=-\frac{i}{\omega\mu}\nabla\times\vec E\ \Longrightarrow\ \vec B=\mu\vec H=-\frac{i}{\omega}\nabla\times\vec E$$

30

- 即单色波下麦克斯韦方程组改写为：

$$\begin{cases}\nabla^2\vec{E}+k^2\vec{E}=0\\ \nabla\cdot\vec{E}=0\\ \vec{B}=-\dfrac{i}{\omega}\nabla\times\vec{E}\end{cases}$$

类似地可得

$$\begin{cases}\nabla^2\vec{B}+k^2\vec{B}=0\\ \nabla\cdot\vec{B}=0\\ \vec{E}=\dfrac{i}{\omega\mu\varepsilon}\nabla\times\vec{B}\end{cases}$$

$$k=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$$

31

电磁波辐射

1. 计算辐射场磁矢势的一般公式

设电荷、电流分布为

$$J(\vec{x}',t)=J(\vec{x}')e^{-i\omega t}$$
$$\rho(\vec{x}',t)=\rho(\vec{x}')e^{-i\omega t}$$

- 电磁作用具有一定的传播速度，某点 x 在某时刻 t 的场值，决定于较早时刻 $t-r/c$ 的电荷、电流分布。场点 x 的势，时间上总是落后于激发它的源，因而叫做推迟势。

变化电流分布 $J(x',t)$ 激发的磁矢势为

$$\vec{A}(\vec{x})=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_v\frac{J(\vec{x}')e^{ikr}}{r}dV'$$

$$k=\omega/c$$

$$\vec{A}(\vec{x},t)=\vec{A}(\vec{x})e^{-i\omega t}$$

32

$$\left.\begin{aligned}\vec{B}(\vec{x},t)&=\nabla\times A(\vec{x},t)\\ \vec{A}(\vec{x},t)&=\vec{A}(\vec{x})e^{-i\omega t}\end{aligned}\right\}\ \vec{B}(\vec{x},t)=\vec{B}(\vec{x})e^{-i\omega t}$$

由磁矢势可推出磁场

$$\frac{\partial}{\partial t}=-i\omega$$
$$\frac{\omega}{k}=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}}$$
$$c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$$

由 $\nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}+\varepsilon_0\mu_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

$\vec{J}=0$ 的区域

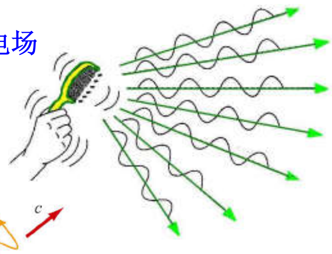
$$\vec{E}(\vec{x},t)=\frac{ic}{k}\nabla\times\vec{B}(\vec{x},t)$$

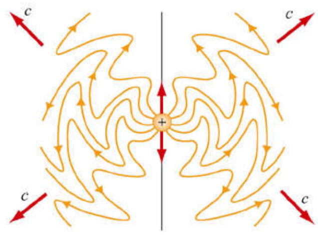
由磁矢势可进一步推出电场

电场和磁场都是时谐的电磁场

33

点电荷振荡产生的电场





34

2. 偶极辐射

$$\vec{p}=\iiint\vec{x}'\rho(\vec{x}',t)dV' \qquad \dot{\vec{p}}=\frac{dp}{dt}=\iiint J(\vec{x}',t)dV'$$

用电偶极矩 p 表示偶极辐射的矢势

$$\vec{A}(\vec{x})=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_v\frac{J(\vec{x}')e^{ikr}}{r}dV'=\frac{\mu_0e^{ikr}}{4\pi r}\dot{\vec{p}}$$

近场区：$r<<l$

$$\begin{cases}\vec{E}=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0r^3}\left[3\vec{e}_r\left([\vec{p}]\cdot\vec{e}_r\right)-[\vec{p}]\right]\\ \vec{B}=\dfrac{\mu_0}{4\pi r^2}[\vec{p}]\times\vec{e}_r\end{cases}$$

远场区：$r>>l$

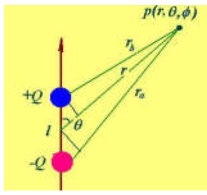
$$\begin{cases}\vec{E}=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0c^2r}\vec{e}_r\times(\vec{e}_r\times\ddot{\vec{p}})\\ \vec{B}=\dfrac{\mu_0}{4\pi cr}\vec{e}_r\times\ddot{\vec{p}}\end{cases}$$

35

赫兹振子

$$\vec{p}=Q_0le^{-i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}\vec{e}_z$$

$$\ddot{\vec{p}}=-\omega^2Q_0le^{-i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}\vec{e}_z$$



远场区赫兹振子电场和磁场随时间的变化

$$\begin{cases}\vec{E}=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0c^2r}\vec{e}_r\times(\vec{e}_r\times\ddot{\vec{p}})\\ \vec{B}=\dfrac{\mu_0}{4\pi cr}\vec{e}_r\times\ddot{\vec{p}}\end{cases}$$

$$\vec{E}(r,t)=-\frac{\omega^2lQ_0}{4\pi\varepsilon_0c^2r}\sin\theta e^{-i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}\vec{e}_\theta$$

$$\vec{B}(r,t)=-\frac{\mu_0\omega^2lQ_0}{4\pi cr}\sin\theta e^{-i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}\vec{e}_\phi$$

36

辐射能流、角分布和辐射功率

赫兹振子的电场和磁场

$$\ddot{\vec{p}} = -\omega^2 Q_0 l e^{-i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}\vec{e}_z$$

$$\vec{E}(r,t) = -\frac{\omega^2 l Q_0}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\sin\theta e^{-i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}\vec{e}_\theta$$

$$\vec{B}(r,t) = -\frac{\mu_0\omega^2 l Q_0}{4\pi c r}\sin\theta e^{-i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}\vec{e}_\phi$$

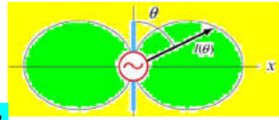
能流密度矢量(坡印亭矢量) $\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H}$

$$\bar{\vec{S}} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\vec{E}^*\times\vec{H}\right) = \frac{|\ddot{\vec{p}}|^2}{32\pi^2\varepsilon_0 c^3 r^2}\sin^2\theta\vec{n} = \frac{\omega^4 p_0^2}{32\pi^2\varepsilon_0 c^3 r^2}\sin^2\theta\vec{n}$$

平均能流密度矢量(辐射能流的平均值)

37

$$\bar{\vec{S}} = \frac{\omega^4 p_0^2}{32\pi^2\varepsilon_0 c^3 r^2}\sin^2\theta\vec{n}$$

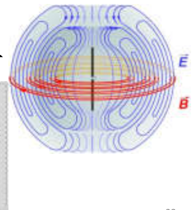


(1) 与 r^2 成反比 $\bar{\vec{S}} \propto 1/r^2$

(2) 发射能量具有很强的方向性 $\bar{\vec{S}} \propto \sin^2\theta$

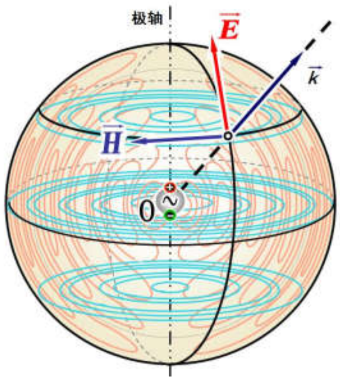
电偶极矩横断面 θ=π /2， 辐射最强

电偶极矩横断面 θ=0，π， 没有辐射



这是为什么赫兹在暗室中需要调节检波器的方向来探测电磁波

38



偶极辐射产生的球面波示意图

- 总辐射功率

$$P = \oint\left|\bar{\vec{S}}\right| r^2 d\Omega = \frac{\omega^4 p_0^2}{32\pi^2\varepsilon_0 c^3}\oint\sin^2\theta d\Omega = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\omega^4 p_0^2}{3c^3}$$

特点： $P \propto \omega^4$

振子频率变高，辐射功率迅速增大

40

- 原则上，任意一个 ***LC*** 共振电路都可以作为发射电磁波的振源，只需不断地供给能量。
- 通常的 ***LC*** 振荡电路的辐射效率很低，因为：

(1)绝大部分电场和磁场能量集中在 ***LC*** 电路内部，在 ***L***、***C*** 元件上交替传递和转换，无法脱离电路向外辐射；

(2)电磁波在单位时间内辐射的能量正比于频率的 **4** 次方，只有频率足够高，才能把电磁能量有效地发射出去。 $P \propto \omega^4$

41

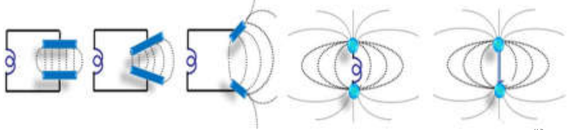
- ***LC*** 电路的固有振荡频率为：

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

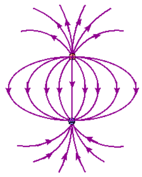
- 对一般 ***LC*** 来说，f_0 很低，为了有效地把能量发送出去，应尽量减小 ***L*** 和 ***C*** 的值，来提高 f_0。
- 另一方面，为提高辐射效率，必须使 ***LC*** 电路尽量开放，使电场和磁场能脱离电路，向外辐射。

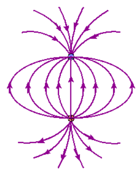
42

- 将电容器极板的距离逐渐增大，同时把自感线圈 *L* 逐渐拉开，最后变成一条直线。
- 电路变成直线时，电场和磁场就向空间散开，且电路中的 *L*、C 都很小，因而振荡频率高，可获得高辐射效率。
- 电路变成直线时形成的直线振荡电路，电流在其中来回流动，两端出现正、负交替的等量异号电荷，这样的电路称作振荡电偶极子，或叫偶极振子。它已适合做发射电磁波的有效振源了。

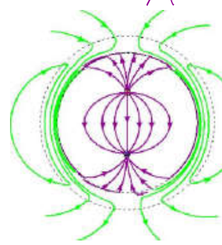


电偶极子的正电荷在上面



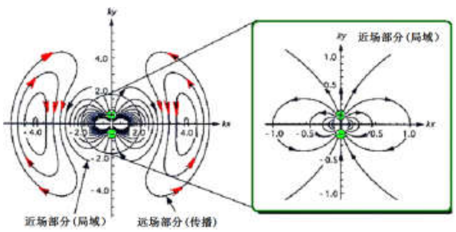


电偶极子的负电荷在上面

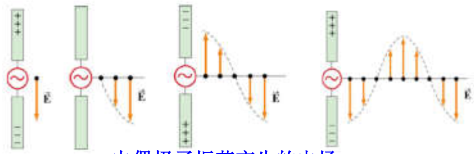


正、负电荷交替出现在上面，力线分布构形相同，但方向相反。

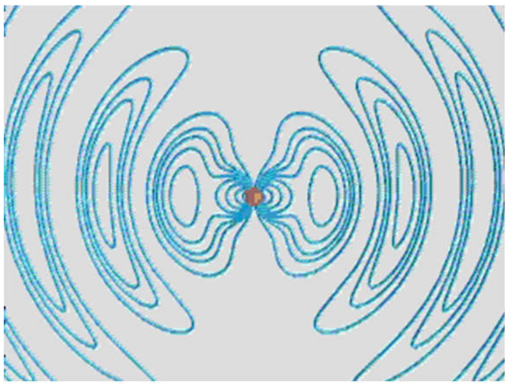
由于电力线不能相交，同时电力线在无电荷区域必须连续，因而两构形之间区域的电力线如图所示。



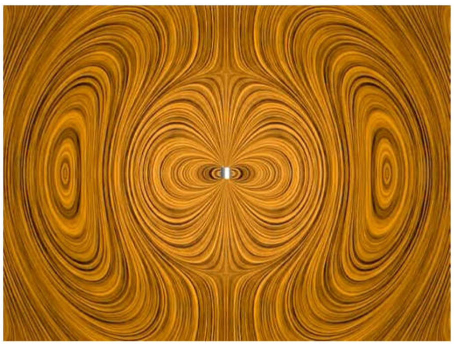
电力线构成闭合的涡形，一个个逐步向外扩展



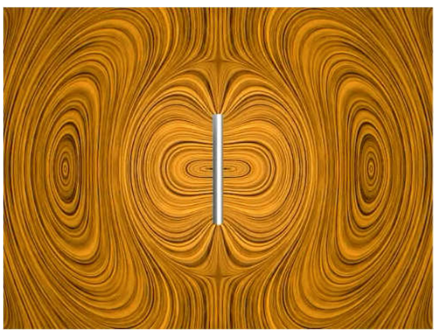
电偶极子振荡产生的电场



46



47



作业：8.19，8.20

48