

上节课主要内容

真空自由空间中 ($\rho_0=0$, $j_0=0$) 电场和磁场的运动方程是波动方程

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 \vec{E} = 0 \\ \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 \vec{B} = 0 \end{cases} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

平面电磁波的性质

$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \\ \vec{H} = \vec{H}_0 e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \end{cases} \quad \begin{cases} \nabla = i\vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial t} = -i\omega \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{k} \cdot \vec{E} = 0, \vec{k} \cdot \vec{H} = 0 \\ \vec{k} \times \vec{E} = \mu_0 \mu_r \omega \vec{H} \\ \vec{k} \times \vec{H} = -\epsilon_0 \epsilon_r \omega \vec{E} \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{k} \perp \vec{E} \\ \vec{E} \perp \vec{H} \\ \vec{H} \perp \vec{k} \end{cases}$$

$$\frac{E_0}{B_0} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r}} = \frac{c}{n} \quad n = \sqrt{\epsilon_r \mu_r} \quad v = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n}$$

电磁波在导体中的传播

导体中 $\rho = 0, \vec{j} = \sigma \vec{E}$

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{E} - \mu\sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \\ \nabla^2 \vec{B} - \mu\sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \end{cases}$$

穿透深度 $\delta = \frac{1}{\beta} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}$ 电磁波很难在导体中传播

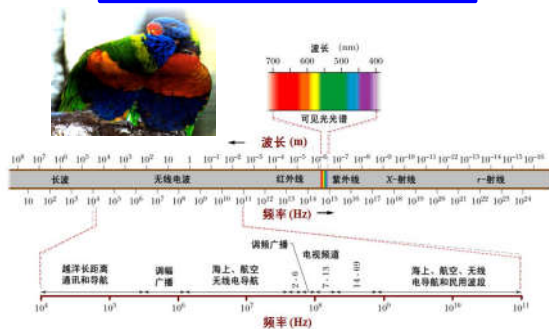
单色波下麦克斯韦方程组

$$\frac{\partial}{\partial t} = -i\omega, \quad k = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$$

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{E} = 0 \\ \vec{B} = -\frac{i}{\omega} \nabla \times \vec{E} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{B} + k^2 \vec{B} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{E} = \frac{i}{\omega\mu\epsilon} \nabla \times \vec{B} \end{cases}$$

§ 8.4.5 电磁波谱



- 实验发现了不同频率和波长的电磁波；
- 电磁波谱：电磁波按频率和波长的顺序排列起来。

电磁波的范围： 10^{26} -10 Hz, 10^{-18} - 10^7 m

交流电频率：50Hz, 6×10^6 m

无线电波长： 10^6 m ~ 10^{-4} m

红外光波长：7600-700 μ m

可见光波长：7000-4000 埃

紫外光波长：4000-50 埃

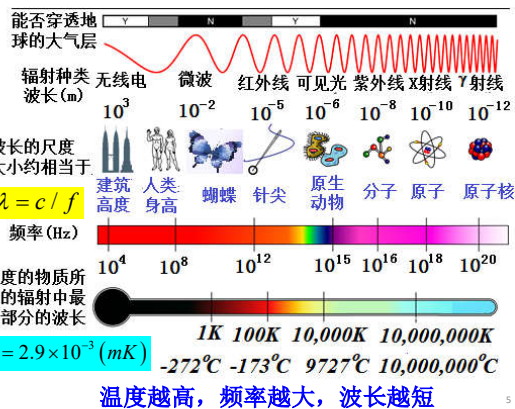
X射线波长：100-0.01 埃

同步辐射光：1 μ m ~ 0.1 nm

γ 辐射： 10^{-10} m ~ 10^{-18} m

真空中波长和频率的关系为：

$$\lambda = c / f$$



1. X 射线

- 1895年伦琴发现X射线，其特征是波长很短(0.01-10 nm)，是介于紫外线和 γ 射线间的电磁辐射。
- 超硬X射线($\lambda < 0.01$ nm)
- 硬X射线($0.01 \text{ nm} < \lambda < 0.1 \text{ nm}$)
- 软X射线($0.1 \text{ nm} < \lambda < 1 \text{ nm}$)

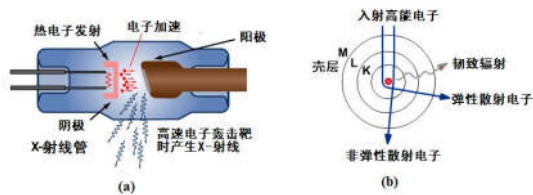
X 射线可由原子中最靠内层的电子跃迁产生；

1912年，德国物理学家劳厄发现了 X 射线通过晶体时产生衍射现象，证明了 X 射线的波动性和晶体内部结构的周期性。

1912年，22岁的小布拉格提出了著名的布拉格公式：

$$2d \sin \theta = n\lambda$$

1913年，老布拉格设计出第一台 X 射线分光计，并利用这台仪器，发现了特征 X 射线。



- ✚ **X射线的产生机制：**从阴极发射的热电子，经加速电压加速后撞击阳极，阳极材料的原子内层电子被高能电子碰撞发生散射，留下空穴，高能态的电子跃迁到低能态的空穴过程中，其携带的能量以**韧致辐射的形式从原子中发射出来，就是X射线。**
- ✚ 阳极通常采用高熔点金属(如W, Fe, Ni)，阴极一般是W丝。

7

✚ X射线的物理特性：

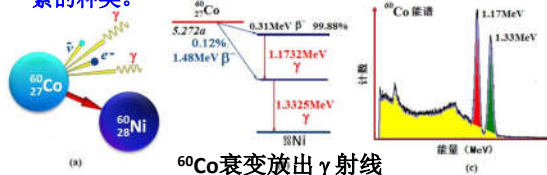
- ① **穿透作用：**X射线因其**波长短，能量大**，表现出很强的穿透能力。
- ② **电离作用：**物质受X射线照射时，可使**核外电子脱离原子轨道产生电离。**
- ③ **荧光作用：**X射线照射到某些化合物如磷、铂氰化钡、硫化锌镉、钨酸钙等时，可使**物质发生荧光**（可见光或紫外线），荧光的强弱与X射线量成正比。
- ④ **热作用：**物质所吸收的X射线能大部分被**转变成热能**，使物体温度升高。
- ⑤ **干涉、衍射、反射、折射作用。**

这些作用在X射线显微镜、波长测定和物质结构分析中都得到应用。

8

2. γ 射线

- ✚ γ 射线是高频电磁波(10^{26}Hz)，能量很高，**穿透力很强**；
- ✚ 在宇宙射线和高能加速器中可观察到。许多放射性同位素核在衰变中放出 γ 射线。对 γ 射线的研究可**探索原子核的内部结构。**
- ✚ 不同的核素在衰变过程中放出的 γ 射线的能量是确定的，因此可以通过测量 γ 射线来**分析材料的放射性同位素的种类。**



9

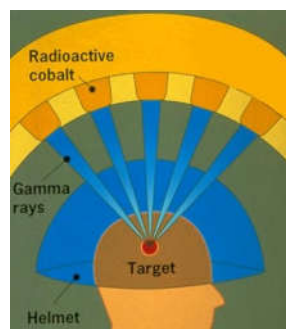
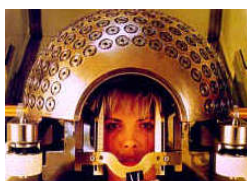
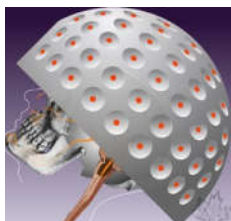
- ✚ γ 射线在医学中有很应用，例如 **γ 刀**。

- ✚ γ 刀并不是真正的手术刀，它是一个布满准直器的半球形头盆，头盆内能射出201条Co60高剂量的 γ 射线，精确地定位于颅内某一位位。

- γ 刀的**定位极准确**，误差常小于0.5 mm；
- 单独一条对组织几乎没有损伤。
- 201条射线从不同位置聚集在一起可**致死性地摧毁靶点组织。**



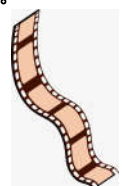
10



11

3. 紫外线

- ✚ 紫外线的波长比紫光还短，波长范围在**5 nm-400 nm**。
- ✚ 1801年，德国物理学家里特发现日光光谱的紫端外侧一段能够使含有溴化银的**照相底片感光**，从而发现了紫外线的存在。
- ✚ 一切高温物体发出的光中，都有紫外线。
- ✚ 自然界中主要的**紫外线光源是太阳**。
- ✚ 紫外线可以用来**灭菌**。

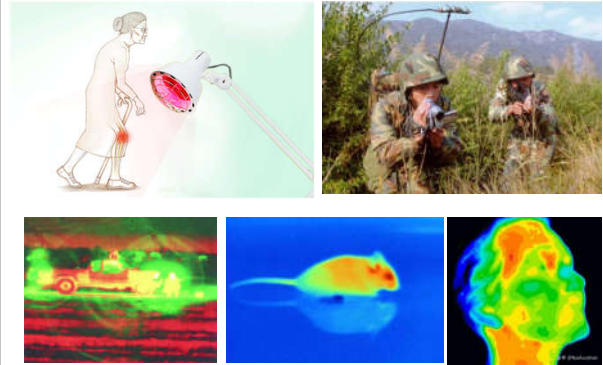


4. 红外线

- 红外线是一种波长比红光的波长还长的**不可见光**，其波长范围很宽 **$760-7\times 10^5\text{ nm}$** 。
- 红外线是英国物理学家**赫谢尔**于1800年研究光谱中各种色光的**热效应**时发现的。
- 红外线的主要特征是**热作用强(红外加热)**。
- 一切物体都在不停地辐射红外线，物体温度越高，辐射红外线的本领越强。根据这个原理制成的**红外线夜视仪**能够在黑暗的环境中，把肉眼看不清的物体分辨出来。

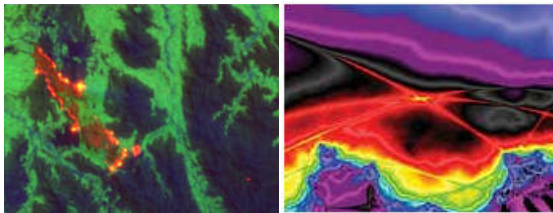


13



红外线夜视仪

14



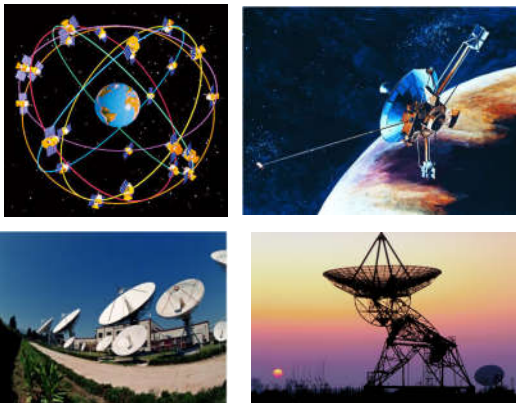
- 红外线还具有**穿透云雾能力强**的特点。利用灵敏的红外探测器，吸收物体发出的红外线，再利用其它电子仪器对吸收的信号进行处理，可显示被测物体的形状和特征，称为**红外遥感**。
- 利用红外遥感技术可监视森林火灾、预报风暴和寒潮等。

15

5. 微波

- 波长从1 m 到1 mm范围内的电磁波，频率范围 **$3\times 10^8-3\times 10^{11}\text{ Hz}$** 。
- 微波波段又可分为：**分米波、厘米波和毫米波**。
- 微波具有**似光性、穿透性、信息性和非电离性**的特点。广泛地用于卫星通信、多路通信、天文学研究和微波波谱学研究。

| | | | | |
|-----|-----|---------|-------------|--------------------------|
| 分米波 | UHF | 1-0.1 m | 300-3000MHz | 对流层散射通信 微波接力通信 |
| 厘米波 | SHF | 10-1 cm | 3-30GHz | 大容量微波接力通信、数字通信、卫星通信、波导通信 |
| 毫米波 | EHF | 10-1 mm | 30-300 GHz | 穿越大气层时的通信 |



17

- 微波加热原理**：材料中的**极性分子**(典型的如水分子、蛋白质、核酸、脂肪、碳水化合物等)随**交变电场的变化而不断改变方向**。在这个过程中，由于分子间的相互碰撞，将使**电能转化为分子的动能**，然后再转化为热能，导致物料在短时间内温度迅速升高、加热或熟化。

- 微波炉的磁控管的谐振腔结构决定了所发射的微波频率是**2455MHz**。



18

6. 无线电

| 波段 | 符号 | 波长范围 | 频率范围 | 应用范围 |
|-----|-----|------------------------------|--------------|----------------------------------|
| 超长波 | VLF | $10^5\text{--}10^4\text{ m}$ | 3-30 kHz | 潜艇通信、海上导航 |
| 长波 | LF | $10^4\text{--}10^3\text{ m}$ | 30-300 kHz | 大气层内中等距离通信、地下岩层通信、海上导航 |
| 中波 | MF | 1000-100 m | 300-3000 kHz | 广播、海上导航 |
| 短波 | HF | 100-10 m | 3-30 MHz | 远距离短波通信、短波广播 |
| 超短波 | VHF | 10-1 m | 30-300 MHz | 电离层散射通信；飞机、导弹、卫星通信；电视、雷达、导航、移动通信 |
| 分米波 | UHF | 1-0.1 m | 300-3000 MHz | 对流层散射通信、微波接力通信 |
| 厘米波 | SHF | 10-1 cm | 3-30 GHz | 大容量微波接力通信、数字通信、卫星通信、波导通信 |
| 毫米波 | EHF | 10-1 mm | 30-300 GHz | 穿越大气层时的通信 |

微波

§ 8.5 电磁场能量和能量传输

- 麦克斯韦方程组作为电磁场的普遍规律，不仅揭示了**电磁波的存在**，预言了**光就是电磁波**，而且揭示了**电磁场具有能量和动量**；
- 能量和动量是物质的普遍属性，从而麦克斯韦方程组揭示了**电磁场的物质性**。
- 对电磁场的研究，不仅在于其自身的运动规律，还在于它和其它物质的相互作用，这一相互作用的实质是**电磁运动形式和其它运动形式之间的相互转换**。

§ 8.5.1 电磁场的能量

- 设一个电荷密度为 ρ 的带电体，在电磁场作用下，以速度 \mathbf{v} 运动，则 $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$
- dt 时间内，电荷 ρdV 移动了距离 $d\mathbf{l}$ ， $d\mathbf{l} = \mathbf{v}dt$ ，则**电磁场对电荷所作的元功**为：

$$da = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \rho dV (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v}dt = \rho dV \mathbf{E} \cdot \mathbf{v}dt = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} dV dt$$

$$\frac{da}{dt} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} dV$$

$$\frac{dA}{dt} = \iiint_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} dV$$
- 电磁场在单位时间内对整个空间传导电流所作的功为：

- 从麦克斯韦方程组的两个方程来**寻求功与电磁场矢量之间的关系**

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2)$$

$$\mathbf{E} \cdot (1) - \mathbf{H} \cdot (2)$$

$$[\mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) - \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E})] = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{B} \quad \downarrow \quad \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad \text{各向同性线性介质}$$

$$-\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon}{2} E^2 + \frac{1}{2\mu} B^2 \right)$$

- 为描述电磁波的能量传播，引入**能流密度矢量**（也称坡印亭矢量），定义

$$\mathbf{S} \equiv \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

- 电磁场的**能量密度** $\omega = \frac{1}{2}(\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) = \frac{1}{2} \left(\epsilon E^2 + \frac{1}{\mu} B^2 \right)$

$$\text{代入} \quad -\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon}{2} E^2 + \frac{1}{2\mu} B^2 \right) + \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$$

$$\text{得} \quad -\nabla \cdot \mathbf{S} = \frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \quad \text{或} \quad -\frac{\partial \omega}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{S} + \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$$

$$-\nabla \cdot \mathbf{S} = \frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$$

对 V 空间求积分

$$-\iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{S}) dV = \iiint_V \left(\frac{\partial \omega}{\partial t} \right) dV + \iiint_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} dV$$

$$\iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{S}) dV = \oint_S \mathbf{S} \cdot d\mathbf{s} \quad \downarrow \quad W = \iiint_V \omega dV \quad \frac{dA}{dt} = \iiint_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} dV$$

$$-\oint_S \mathbf{S} \cdot d\mathbf{s} = \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{dA}{dt} \quad \text{总电磁能量守恒方程}$$

从边界注入体积内的电磁能量，等于体积内总电磁能量 W 的增加和电磁场对体积内运动电荷所做的功 A 之和。

$$W = \iiint_V \omega dV = \frac{1}{2} \iiint_V (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) dV = \frac{1}{2} \iiint_V \left(\epsilon E^2 + \frac{B^2}{\mu} \right) dV$$

W 为体积 V 内总电磁能量

考察两种情况：

(1) 若体积 V 为整个空间，电磁扰动只存在于有限范围的情况，则边界没有电磁能量的注入：

$$\oint_S \vec{S} \cdot d\vec{s} = 0$$

因此

$$-\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{dA}{dt} = \iiint_V \vec{j} \cdot \vec{E} dV$$

全空间电磁能量守恒定律：电磁场在单位时间内对传导电流所做的功，等于电磁场本身能量的减少

25

(2) 若体积 V 为电磁场的有限区域

利用欧姆定律 $\vec{j} = \sigma \vec{E}$

$$-\oint_S \vec{S} \cdot d\vec{s} = \frac{\partial W}{\partial t} + \iiint_V \vec{j} \cdot \vec{E} dV = \frac{\partial W}{\partial t} + \iiint_V \frac{j^2}{\sigma} dV$$



通过闭合边界
曲面 S 流入 V
内的电磁能量



V 内电磁场
能量的增加



V 内导体上
消耗的能量
(焦耳热)

有限空间内的电磁能量守恒定律

26

§ 8.5.2 电磁场的能流

电磁波的能量来自波源，能量流动的方向就是波传播的方向 k 。

能流密度 S (即波的强度 I)：单位时间内通过垂直于波传播方向的单位面积上的平均能量 P 。

$$\langle S \rangle = I = \bar{P} / A = \omega v \quad v \text{ 为能量传播速度，真空中 } v=c$$

能流密度是矢量 $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ 方向：电磁波传播方向
(又叫坡印亭矢量) 可以证明 $|\vec{S}| = |\vec{E} \times \vec{H}| = \omega v$

单位时间内通过介质中面积 A 的平均能量 P 为：

$$\bar{P} = SA = \omega v A$$

27

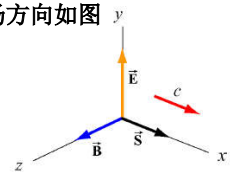
真空中

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \quad |\vec{S}| = |\vec{E} \times \vec{H}| = \frac{EB}{\mu_0}$$

对平面电磁波，设电场磁场方向如图

$$\vec{E} = E_0 \cos(kx - \omega t) \vec{e}_y$$

$$\vec{B} = B_0 \cos(kx - \omega t) \vec{e}_z$$



则能流密度矢量为

$$\begin{aligned} \vec{S} &= \frac{1}{\mu_0} [E_0 \cos(kx - \omega t) \vec{e}_y] \times [B_0 \cos(kx - \omega t) \vec{e}_z] \\ &= \frac{E_0 B_0}{\mu_0} \cos^2(kx - \omega t) \vec{e}_x \end{aligned}$$

能流密度的方向正是波的传播方向

28

波的强度 I ：定义为能流密度 S 对时间平均值

$$I = \langle S \rangle = \frac{E_0 B_0}{\mu_0} \langle \cos^2(kx - \omega t) \rangle$$

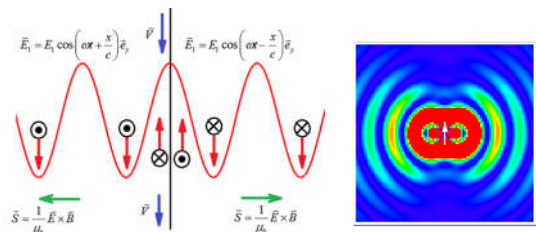
$$\langle \cos^2(kx - \omega t) \rangle = \frac{1}{2}$$

$$\frac{E_0}{B_0} = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}} = c$$

真空中平面电磁波的电场和磁场的振幅满足关系

$$I = \langle S \rangle = \frac{E_0 B_0}{2\mu_0} = \frac{E_0^2}{2c\mu_0} = \frac{cB_0^2}{2\mu_0}$$

29



谐振子振动产生平面电磁波的能流密度传播示意图

30

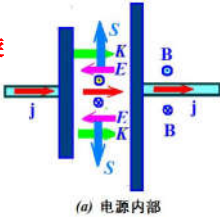
1. 电磁能量在电路中的传输

(1) 电源内部:

- 磁场 B 方向: 与电流 I 成右手螺旋
- 电场 E 方向: 电源内部, 由正极指向负极(与电流密度 j 相反, 与非静电力 K 方向一致)

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B})$$

能流密度矢量垂直于 j 向外, 即电源向外部空间输出能量



(a) 电源内部

31

(2) 电源以外的导线内部 $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ E 与 j 方向一致

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B})$$

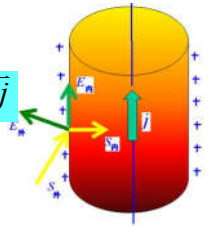
故能流密度矢量垂直于 j 的方向、指向导线内

(3) 电源以外的导线外部

$$\vec{E}_{\text{外}} = E_{\text{外}n} \hat{n} + E_{\text{外}t} \hat{\tau} \quad E_{\text{外}t} \hat{\tau} // \vec{j}$$

$$\vec{S}_{\text{外}n} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E}_{\text{外}t} \times \vec{B})$$

导体表面外的能流密度的法向分量指向导体内部



(b) 导线内外部

32

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad j \text{ 一定, } \sigma \text{ 越大 } E_{\text{外}t} = E_{\text{内}t} = E_{\text{内}} \text{ 越小}$$

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B})$$

导体内能流密度 $S_{\text{内}}$ 越小, 导体外能流密度的法向分量 $S_{\text{外}n}$ 也越小

$\sigma \rightarrow \infty$ 的极限情形下

$$\sigma \rightarrow \infty, E_{\text{外}t} \rightarrow 0, S_{\text{外}n} \rightarrow 0$$

$$\vec{S}_{\text{外}} \approx S_{\text{外}t} \hat{\tau} // \vec{j}$$

$\sigma \rightarrow \infty$ 时, 导体外的能流密度 $S_{\text{外}}$ 与导体表面平行



(b) 导线内外部

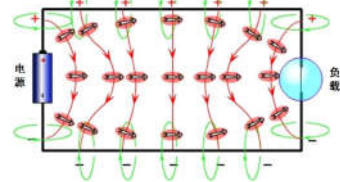
33

- ✦ 在靠近电源正极的导线表面上带正电, 在靠近电源负极的导线表面上带负电。

- ✦ S 的切向分量的方向, 需分两个情形来讨论:

- 导体表面带正电荷的地方, $E_{\text{外}}$ 的法向分量向外, $S_{\text{外}}$ 的切向分量与电流平行;
- 在导体表面带负电的地方, $E_{\text{外}}$ 的法向分量向内, $S_{\text{外}}$ 的切向分量与电流反平行。

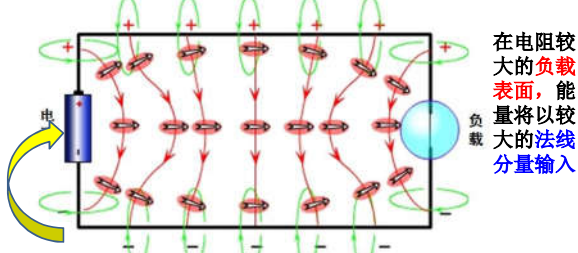
$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B})$$



34

整个电路中能量传输

在电阻很小的导线表面基本上沿切线前进, 流向负载



能量从电源向周围空间发出

电磁场能量不是通过电流沿导线内部从电源传给负载!

在电阻较大的负载表面, 能量将以较大的法线分量输入

35

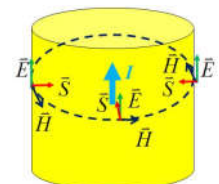
【例56】半径为 a 的长直导线载有电流 I , I 沿轴线方向并均匀地分布在横截面上, 试证明(1)在导线表面上, 能流密度处处垂直于表面向里; (2)导线内消耗的焦耳热等于 S 输入的能量。

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{\vec{j}}{\sigma} = \rho \vec{j} \\ j &= \frac{I}{S} = \frac{I}{\pi a^2} \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} \vec{E} &= \rho \frac{I}{\pi a^2} \vec{e}_l \\ \vec{E} &= \rho \frac{I}{\pi a^2} \vec{e}_l \end{aligned} \right\} \quad \vec{E} = \rho \frac{I}{\pi a^2} \vec{e}_l \quad e_l \text{ 为电流方向}$$

导线表面的磁场强度为:

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = I \quad \vec{H} = \frac{I}{2\pi a} \vec{e}_\phi$$

E_ϕ 与 e_l 成右手螺旋关系



所以导线表面的能流密度矢量(坡印廷矢量)为:

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

$$\vec{S} = \rho \frac{I}{\pi a^2} \vec{e}_l \times \left(\frac{I}{2\pi a} \vec{e}_\phi \right) = -\rho \frac{I^2}{2\pi^2 a^3} \vec{e}_n$$

\vec{e}_n 为导体表面的法线矢量

即导体表面能流密度处处垂直于表面向里

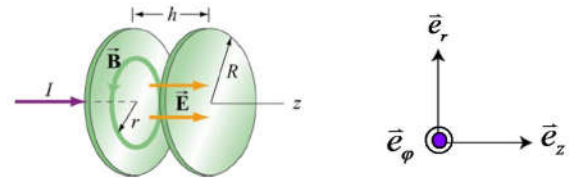
(2) 单位时间由 S 输入长为 l 的导线中的能量为:

$$P = -\oint_S \vec{S} \cdot d\vec{A} = -\vec{S} \cdot 2\pi a l \vec{e}_n = \frac{\rho I^2 l}{\pi a^2} = I^2 R \quad R = \rho \frac{l}{\pi a^2}$$

即导线内消耗的焦耳热等于从导线侧面输入的能量
因此电磁能量是通过导体周围的介质传播的, 导线只是起引导能量传输方向的作用。

37

2. 电容充电时的能量传输



两圆盘平面组成的电容器充电过程的坡印廷矢量

38

电容器极板间的电场强度为:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_z = \frac{Q}{\epsilon_0 \pi R^2} \vec{e}_z$$

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I_0 + \iint \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \iint \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

B 的方向为围绕导线的圆周的方向 $\vec{B} = B \vec{e}_\phi$

电容器内部

$$r < R \quad B \cdot 2\pi r = 0 + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \left(\frac{Q}{\epsilon_0 \pi R^2} \pi r^2 \right) = \frac{\mu_0 r^2}{R^2} \frac{dQ}{dt}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 r}{2\pi R^2} \frac{dQ}{dt} \vec{e}_\phi$$

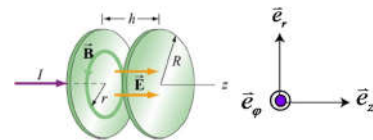
39

能流密度(坡印廷矢量)为:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B}) = \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{Q}{\epsilon_0 \pi R^2} \vec{e}_z \right) \times \left(\frac{\mu_0 r}{2\pi R^2} \frac{dQ}{dt} \vec{e}_\phi \right) = - \left(\frac{Qr}{2\epsilon_0 \pi^2 R^4} \right) \left(\frac{dQ}{dt} \right) \vec{e}_r$$

充电过程, $dQ/dt > 0$: 能流密度矢量沿垂直于电容器轴线的方向(径向)向内。

即电容器充电过程中, 电容器内部电场的能量是从电容器侧面不断的流入得到的。



40

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 r}{2\pi R^2} \frac{dQ}{dt} \vec{e}_\phi \quad \omega_m = \frac{B^2}{2\mu} \quad \text{若 } dQ/dt \text{ 线性变化, 则磁场 } B \text{ 及磁场能量 } W_m \text{ 不随时间变化}$$

$$\text{充电到 } Q \text{ 时, 电容器存储的电场能为: } W_e = \omega_e V = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 (\pi R^2 h) = \frac{Q^2 h}{2\pi R^2 \epsilon_0}$$

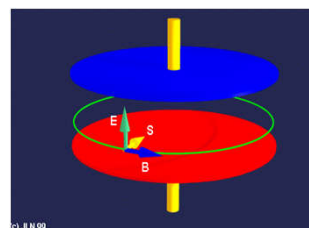
$$\text{单位时间能量的增加为: } \frac{dW_e}{dt} = \frac{Qh}{\epsilon_0 \pi R^2} \left(\frac{dQ}{dt} \right)$$

从电容器边界流入的能量为:

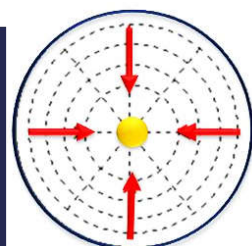
$$-\oint_S \vec{S} \cdot d\vec{s} = \left(\frac{Qr}{2\epsilon_0 \pi^2 R^4} \frac{dQ}{dt} \right) (2\pi R h) = \frac{Qh}{\epsilon_0 \pi R^2} \left(\frac{dQ}{dt} \right)$$

S 为能流密度, s 为面积

41

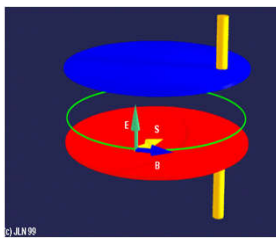


导线位于圆形极板的中心处的对称型电容器充电过程:



能流密度矢量对称地从侧面流到内部

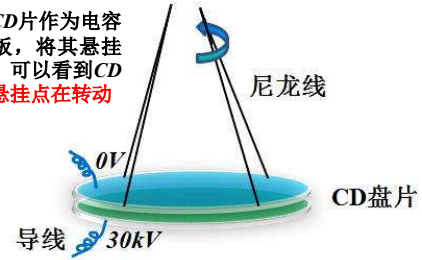
42



导线不处于圆盘中心位置时，电容器充电过程中能流密度矢量非对称地、偏心地流动，必然引起一个附加的角动量

43

用两张CD片作为电容器的极板，将其悬挂后充电，可以看到CD盘片沿悬挂点在转动



能流密度矢量的非对称流动引起的附加角动量使圆盘电容器发生转动

44



45

3. 螺线管中的能量传输

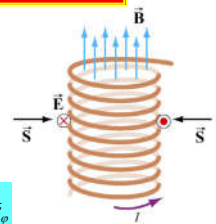
螺线管内的磁场: $\vec{B} = \mu_0 n I \vec{e}_z$

为简化计, 设电流随时间为线性变化

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \iint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s} \quad E 2\pi r = -\mu_0 n \left(\frac{dI}{dt} \right) \pi r^2$$

螺线管内的电场: $\vec{E} = -\frac{\mu_0 n r}{2} \left(\frac{dI}{dt} \right) \vec{e}_\phi$

$$\begin{aligned} \text{能流密度: } \vec{S} &= \vec{E} \times \vec{H} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} \\ &= -\frac{\mu_0 n^2 r I}{2} \left(\frac{dI}{dt} \right) \vec{e}_r \quad \text{沿径向向内} \end{aligned}$$



46

线圈在充电过程中产生的感应电动势:

$$\varepsilon = -N \frac{d\Phi_B}{dt} = -(nI) \left(\frac{dB}{dt} \right) \pi r^2 = -\mu_0 \pi n^2 r^2 l \left(\frac{dI}{dt} \right)$$

线圈内电场能量为: $W_e = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} V = \left(\frac{\varepsilon E^2}{2} \right) (\pi r^2 l) = \frac{1}{8} \varepsilon \mu_0^2 \pi n^2 r^4 l \left(\frac{dI}{dt} \right)^2$

设 dI/dt 线性变化, 故电场能量不随时间变化 $dW_e/dt=0$

线圈内磁场能量为: $W_m = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} V = \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right) (\pi r^2 l) = \frac{1}{2} \mu_0 \pi n^2 I^2 r^2 l$

磁场能量变化率为: $\frac{dW_m}{dt} = \mu_0 \pi n^2 I r^2 l \left(\frac{dI}{dt} \right) = I |\varepsilon|$

从线圈侧面流入到线圈内部能量为: $\vec{S} \cdot d\vec{s} = \frac{\mu_0 n^2 r I}{2} \left(\frac{dI}{dt} \right) \cdot (2\pi r l) = \mu_0 \pi n^2 I r^2 l \left(\frac{dI}{dt} \right)$ 两者相等

$$\oint \vec{S} \cdot d\vec{s} = \frac{\mu_0 n^2 r I}{2} \left(\frac{dI}{dt} \right) \cdot (2\pi r l) = \mu_0 \pi n^2 I r^2 l \left(\frac{dI}{dt} \right)$$

47

电磁场的动量

根据狭义相对论, 能量和动量是密切联系着的:

$$\begin{cases} E = mc^2 \\ \vec{P} = m\vec{v} \end{cases} \quad m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

由此容易得到, 相对论动量和能量之间的关系:

$$E^2 = P^2 c^2 + m_0^2 c^4$$

光子的静止质量为 0 ($m_0=0$), 所以动量为:

$$P = \frac{E}{c} \quad \text{此处 } E \text{ 是能量, 不是电场}$$

48

电磁场的动量密度

在真空中:

$$\omega = \frac{1}{2}(\vec{D} \cdot \vec{E} + \vec{B} \cdot \vec{H}) \quad \frac{E_0}{B_0} = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}} = c$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad \rightarrow \quad \omega = \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0} \right) = \epsilon_0 E^2$$

所以与真空中的平面波相联系的、单位体积的电磁波动量密度(单位体积内的动量)为:

$$\vec{g} = \frac{\omega}{c} = \frac{\epsilon_0 E^2}{c} = \frac{1}{c^2} |\vec{E} \times \vec{H}|$$

大小: 正比于能量密度
方向: 沿电磁波的传播方向, 即能流密度方向

$$\vec{g} = \frac{1}{c^2} (\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{D} \times \vec{B} = \frac{\vec{S}}{c^2}$$

49

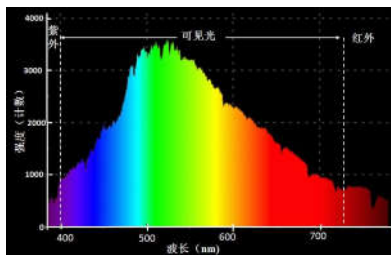
能量密度 $\omega = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} + \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H}$

能流密度 $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$

动量密度 $\vec{g} = \vec{D} \times \vec{B} = \frac{\vec{S}}{c^2} \quad g = \frac{\omega}{c}$

50

§ 8.5.3 太阳光的能量传输



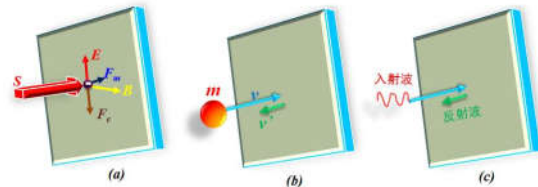
太阳光是由于太阳发生热核聚变反应而产生的剧烈光辐射。太阳辐射至地球的光谱主要集中在可见光部分 0.4-0.76μm(红、橙、黄、绿、蓝、靛、紫)、红外线及紫外线。

51

光压

电磁场既具有能量又具有动量, 是物质存在的一种形式。

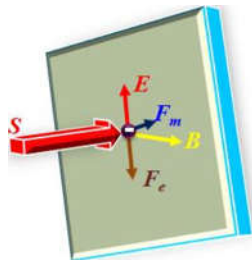
如图, 平面电磁波垂直地射在一块金属平板上, 有一部分电磁波被反射。设入射波的传播方向为 z 方向, E 和 H 分别沿 x 和 y 方向。



52

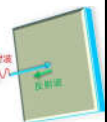
- 金属表面附近的自由电子将在电场 E 的作用下沿 x 方向往复运动, 形成传导电流;
- 由于电子的运动方向与磁场垂直, 它将受到一个洛伦兹力, F 沿 $\vec{v} \times \vec{B}$ 的方向, 即垂直于表面。

于是在电磁波的作用下, 金属板将受到一个朝 $+z$ 方向的压力, 或者说产生光压(强) p 。



53

反射系数 $R = \frac{S_{\text{反}}}{S_{\text{入}}}$ $S_{\text{入}}$: 入射光的能流密度 $S_{\text{反}}$: 反射光的能流密度



设透射光全部被吸收, 其动量全部转移给物体

则反射过程中, 位于横截面 ΔA 内的光束在 Δt 时间内的动量变化为:

$$\Delta G = \Delta V (\vec{g}_{\text{入}} - \vec{g}_{\text{反}}) = \Delta A \cdot c \Delta t (\vec{g}_{\text{入}} - \vec{g}_{\text{反}})$$

$$= \Delta A \cdot c \cdot \Delta t \left(\frac{\vec{S}_{\text{入}}}{c^2} - \frac{\vec{S}_{\text{反}}}{c^2} \right)$$

$$= \frac{\Delta A \cdot \Delta t}{c} (1 + R) \vec{S}_{\text{入}} \quad S_{\text{入}} \text{ 和 } S_{\text{反}} \text{ 方向相反}$$

$$\vec{g} = \frac{\vec{S}}{c^2}$$

动量密度

54

✦ 设光压强为 p ，则光施加在物体表面压力的冲量为：

$$F \cdot \Delta t = p \Delta A \cdot \Delta t$$

✦ 该冲量应等于 Δt 时间内电磁波的动量的改变 ΔG

$$p \Delta A \cdot \Delta t = \frac{\Delta A \cdot \Delta t}{c} (1+R) S_{\lambda} \rightarrow p = \frac{1}{c} (1+R) S_{\lambda}$$

✦ 对一个周期平均，得平均光压强(简称光压)为

$$\bar{p} = (1+R) \frac{\bar{S}_{\lambda}}{c} = (1+R) \bar{\omega} = (1+R) \frac{EH}{c} \quad \bar{\omega} = \frac{\bar{S}}{c}$$

$$\begin{cases} \text{全反射: } R=1, p=2\bar{\omega} \\ \text{全吸收: } R=0, p=\bar{\omega} \end{cases}$$

55

【例57】当太阳光垂直照射到地面上时，每分钟射到地面每平方厘米上的能量为 1.94 cal, 1cal=4.1868J, 试求(1)地面上太阳光的电场强度 E 和磁场强度 H 的振幅 E_0 和 H_0 ; (2)垂直于光的全吸收面所承受的光压; (3)太阳光作用在整个地球上的力。

【解】(1)太阳光照到地球表面时近似为平面波，设其平面电磁波的电场为 $\vec{E} = \vec{E}_0 \sin \omega t$

能量
密度

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_e + \omega_m \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \mu_0 H^2 \\ &= \epsilon_0 E^2 \\ &= \epsilon_0 E_0^2 \sin^2 \omega t \end{aligned}$$

$$\therefore \sqrt{\epsilon_0} E = \sqrt{\mu_0} H$$

56

其平均值为: $\bar{\omega} = \frac{1}{T} \int_0^T \omega dt = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{T} \int_0^T \sin^2 \omega t dt = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2$

t 时间内射到 $1m^2$ 面积上的太阳光的能量为:

$$\bar{W} = \bar{\omega} V = \bar{\omega} \cdot ct \cdot 1 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 ct \quad \text{太阳光的电场强度达 } 1000 \text{ V/m!}$$

$$E_0 = \sqrt{\frac{2\bar{W}}{\epsilon_0 ct}} = \sqrt{\frac{2 \times 1.94 \times 10^4 \times 4.1868}{8.854 \times 10^{-12} \times 3 \times 10^8 \times 60}} = 1.01 \times 10^3 \text{ (V/m)}$$

$$H_0 = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0 = \sqrt{\frac{8.854 \times 10^{-12}}{4\pi \times 10^{-7}}} \times 1.01 \times 10^3 = 2.68 \text{ (A/m)}$$

57

(2)求垂直于光的全吸收面所承受的光压

全吸收 $R=0$ $\bar{p} = (1+R) \bar{\omega} = \bar{\omega} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 = 4.51 \times 10^{-6} \text{ (N/m}^2\text{)}$

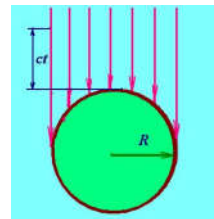
(3)求太阳光作用在整个地球上的力

t 时间内射到地球上的太阳光的动量为: $g = \frac{S}{c^2}$

$$G = g \Delta V = g \pi R^2 ct = \frac{S}{c} \pi R^2 t$$

这些动量全部被地球吸收，故地球受到太阳光的作用力为:

$$F = \frac{G}{t} = S \frac{\pi R^2}{c}$$



58

代入数据,

$$F = \frac{1.94 \times 4.1868}{1 \times 10^{-4} \times 60} \times \frac{\pi \times (6.4 \times 10^6)^2}{3 \times 10^8} = 5.8 \times 10^8 \text{ N}$$

相比太阳对地球的万有引力:

$$\begin{aligned} F_G &= G \frac{mM}{r^2} = 6.67 \times 10^{-11} \times \frac{6 \times 10^{24} \times 2 \times 10^{30}}{(1.5 \times 10^{11})^2} \\ &= 3.6 \times 10^{22} \text{ N} \end{aligned}$$

是微不足道的。

59

作业

8.21、8.23、8.24、8.25、8.28

Thank you!

60