上节课主要内容

- 电场强度定义 $\vec{E}(r)=\frac{\vec{F}}{q_0}$
- 电荷元 $dq=\rho dV=\sigma dS=\lambda dl$
- 叠加原理求场强

$$\vec{E}(r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i\frac{q}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3}(\vec{r}-\vec{r}_i)$$

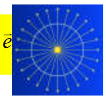
$$\vec{E}(r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{V'}\frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}(\vec{r}-\vec{r}\,')dV'$$

$$\vec{E}(r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint_{S'}\frac{\sigma(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}(\vec{r}-\vec{r}\,')dS'$$

$$\vec{E}(r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{L'}\frac{\lambda(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}(\vec{r}-\vec{r}\,')dl'$$

1

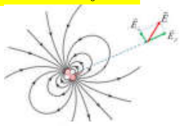
- 点电荷或均匀带电球体(外)电场 $\vec{E}(r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{e}$



- 电偶极子及其电场 $\vec{p}=q\vec{l}$

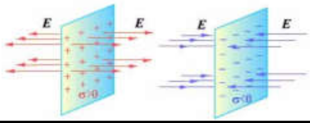
中垂线上 $\vec{E}_\perp=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}}{r^3}$ 延长线上 $\vec{E}_{//}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\vec{p}}{r^3}$

空间任一点 $\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3\vec{e}_r(\vec{p}\cdot\vec{e}_r)-\vec{p}}{r^3}$



- 无限大平面电场

$E=\pm\frac{\sigma_e}{2\varepsilon_0}$



2

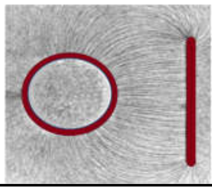
§ 1-4 高斯定理

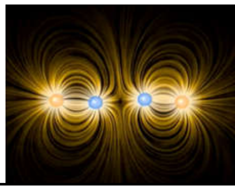
§ 1.4.1 电场线与电通量

3

一、电场线

- 电场是一个矢量场，空间中每一点的电场都可由电场强度矢量来描述；
- 若已知电荷分布，则空间各点的场强原则上都可求出；
- 为了形象化地把客观存在的电场表示出来，常引入电场(力)线这一辅助工具。





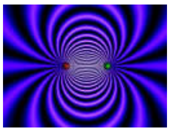
4

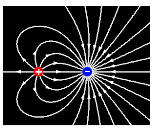
1. 电场线的定义

- 方向：电场(力)线上每一点的切线方向与相应点场强方向一致。
- 大小：电场(力)线的数密度与该点的场强的大小成正比。
- 电场(力)线的数密度：通过垂直于场强方向的单位面积的电场(力)线的条数。

$$E=\Delta N/\Delta S_\perp$$

- 凡是电场(力)线密集的地方，场强就大，电场(力)线稀疏的地方，场强就小。





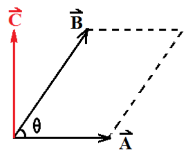
5

2. 电场线的性质

- 电场线起自正电荷或无限远处，终止于负电荷、或无限远，不会在没有电荷的地方中断或相交；
- 某些情况下存在电场强度为零的点，这类点称为电场的中性点，电场线只能无限逼近但却无法抵达电场为零的中性点；
- 若体系正负电荷一样多，则正电荷发出的电力线全部终止于负电荷；
- 不同电场线可以交于点电荷处，除此之外，电场线之间不会相交(否则电场强度就不是唯一的)；
- 静电场中的电力线不会形成闭合曲线。

6

矢量的叉乘



$$\vec{C}=\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}=C_x\vec{e}_x+C_y\vec{e}_y+C_z\vec{e}_z$$

$$\vec{C}=\vec{A}\times\vec{B}=AB\sin\theta\vec{e}_n$$
$$=(A_x\vec{e}_x+A_y\vec{e}_y+A_z\vec{e}_z)\times(B_x\vec{e}_x+B_y\vec{e}_y+B_z\vec{e}_z)$$
$$=(A_yB_z-A_zB_y)\vec{e}_x+(A_zB_x-A_xB_z)\vec{e}_y+(A_xB_y-A_yB_x)\vec{e}_z$$

右手螺旋法则

① 两个矢量 $\vec{A}$ 和 $\vec{B}$ 的叉乘仍是矢量;
② 方向垂直于$\vec{A}$和 $\vec{B}$ 构成的平面;
③ 大小为以 $\vec{A}$ 和 $\vec{B}$ 矢量为边的平行四边形面积

7

3. 电场线方程

$$\vec{E}\times d\vec{l}=0$$

电场线上每一点的切线的方向与相应点场强的方向一致 θ=0

直角坐标系

$$\vec{E}=E_x\vec{e}_x+E_y\vec{e}_y+E_z\vec{e}_z$$
$$d\vec{l}=dx\vec{e}_x+dy\vec{e}_y+dz\vec{e}_z$$

$$\vec{E}\times d\vec{l}=(E_ydz-E_zdy)\vec{e}_x+(E_zdx-E_xdz)\vec{e}_y+(E_xdy-E_ydx)\vec{e}_z=0$$

$$E_ydz-E_zdy=0$$
$$E_zdx-E_xdz=0$$
$$E_xdy-E_ydx=0$$

$$\Rightarrow\quad \frac{dx}{E_x}=\frac{dy}{E_y}=\frac{dz}{E_z}$$

8

柱坐标系

$$\frac{dr}{E_r}=\frac{dz}{E_z}=\frac{rd\theta}{E_\theta}$$

球坐标系

$$\frac{dr}{r\sin\theta E_r}=\frac{d\theta}{\sin\theta E_\theta}=\frac{d\varphi}{E_\varphi}$$

电偶极子的电场线方程: $r=c\sin^2\theta$

电四极子、电八极子、复杂电荷分布的电力线方程?

9

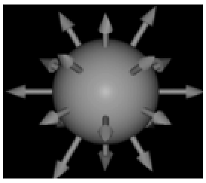
4. 一些典型电荷分布的电力线

- 点电荷的电力线:

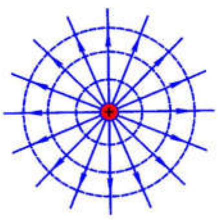
正点电荷的电力线是各个方向均匀射出 N 根，同一球面相同面积的ΔS_1、ΔS_2有相同根数的电力线穿过。

电场线的数密度为:

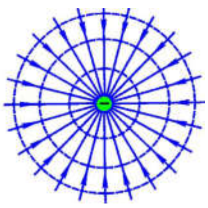
$$\frac{N}{4\pi r^2}$$



10

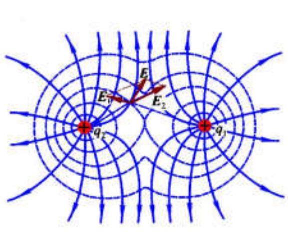


正点电荷的电力线

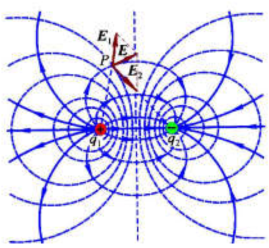


负点电荷的电力线

11

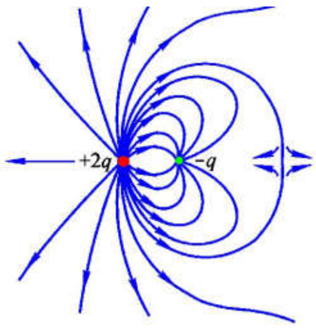


两等量正点电荷的电力线分布

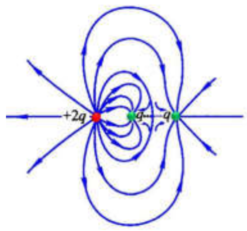


两等量异号点电荷的电力线分布

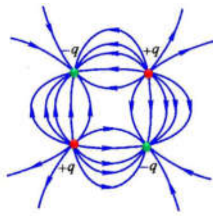
12



两不等量异号点电荷的电力线分布

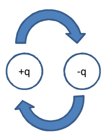


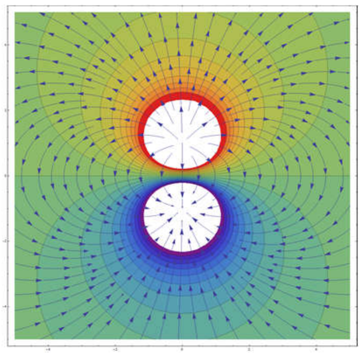
2q，*-q*，*-q*三点电荷电场的电力线分布



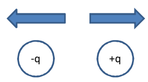
位于正方形四角上的四个点电荷的电力线分布

二维电偶极子绕轴旋转时的电场线和等势面图

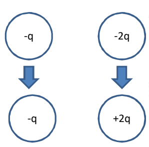


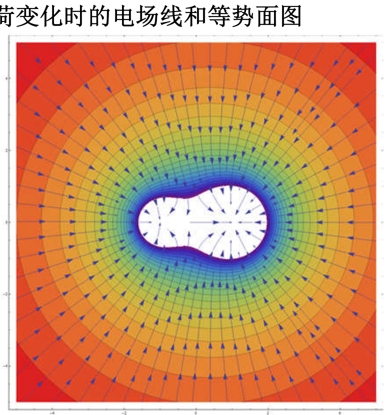


二维电偶极子相互远离时的电场线和等势面图

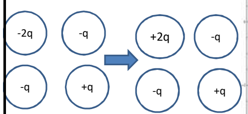


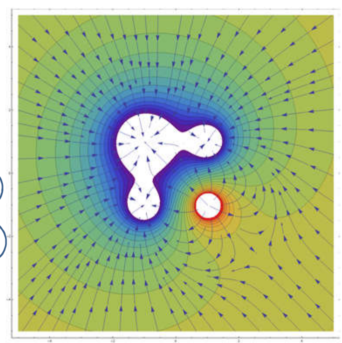
电荷变化时的电场线和等势面图



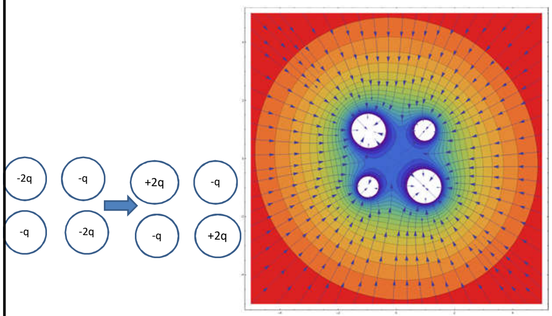


电荷变化时的电场线和等势面图

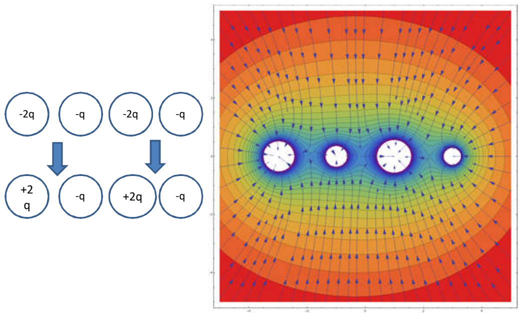




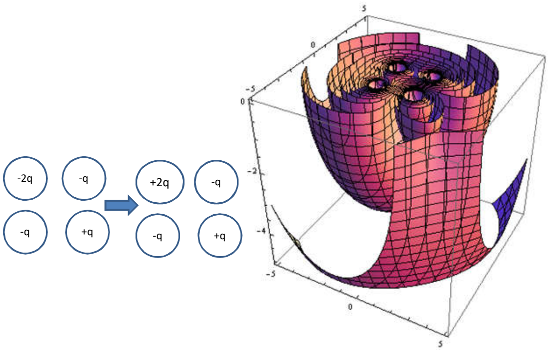
电荷变化时的电场线和等势面图



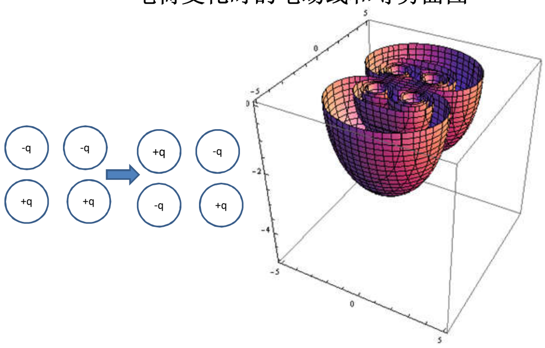
电荷变化时的电场线和等势面图



电荷变化时的电场线和等势面图



电荷变化时的电场线和等势面图

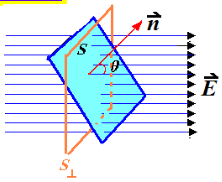


二、电通量

1、电场线的根数

电场线的密度为

$$E \propto \Delta N \,/\, \Delta S_{\perp}$$



取比例系数为1，则 $\Delta N = E \cdot \Delta S_{\perp}$

当 E 与 ΔS 不垂直时，ΔS 的法线与 E 不平行，则有：

$$\Delta N = \vec{E} \cdot \Delta \vec{S}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\theta$$
$$= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

点乘后得到的是标量

2、电通量

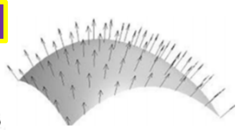
(1) 定义 穿过某一曲面的电场线的根数

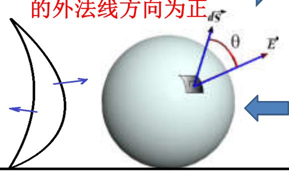
$$\Delta\Phi = \Delta N = \vec{E} \cdot \Delta\vec{S} = E\Delta S\cos\theta$$

电通量的正负取决于电场线与曲面的法线方向的夹角 θ

(2) 曲面法线方向的规定

开曲面：凸侧方向的外法线方向为正





闭曲面：外法线方向为正，内法线方向为负

(3) 电通量的特点

电场线不均匀或曲面不规则时，电通量可以由积分计算：

$$\Phi = \iint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \iint_S E\cos\theta dS$$

由电场的叠加原理可推出电通量也满足叠加原理：

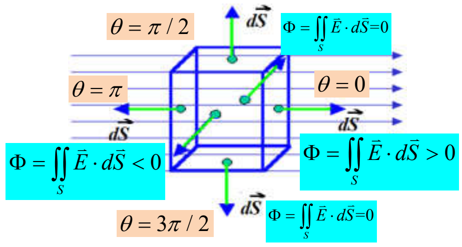
$$\Phi = \iint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \iint \sum_i \vec{E}_i\cdot d\vec{S} = \sum_i \iint \vec{E}_i\cdot d\vec{S} = \sum_i \Phi_i$$

电通量是标量

(4) 通过闭合曲面的电通量

通过闭合曲面的电通量是通过该闭合曲面的净电场线数目。

如果闭合曲面内无电荷，则曲面内没有电场线发出或终止，通过闭合曲面的总电通量是零。



§ 1.4.2 高斯定理

德国数学家、物理学家
Karl Friedrich Gauss (1777-1855)

1. 数学之王—Gauss

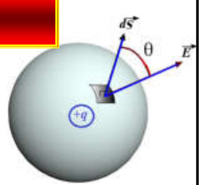
高斯(Gauss)是德国数学家， 也是物理学家。高斯是近代数学奠基者之一，在历史上影响之大，可以和阿基米德、牛顿、欧拉并列。

高斯的数学研究几乎遍及所有领域，在数论、代数学、非欧几何、复变函数和微分几何等方面都做出了开创性的贡献。

由于高斯在数学、天文学、大地测量学和物理学中的杰出研究成果，他被选为许多科学院和学术团体的成员。“数学之王”的称号是对他一生恰如其分的赞颂。

2. 高斯定理

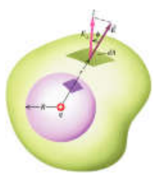
(1) 对任意曲面的电通量



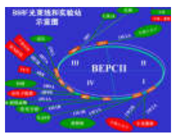
假定电场由一电量为 q 的点电荷产生，dS是曲面上的任一面元，它的位置由径矢 r 表示，r 的起点取在点电荷上。电场对 dS 的通量为：

$$d\Phi = \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{e}_r\cdot d\vec{S}}{r^2}$$

$$\Phi = \iint \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

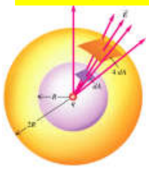


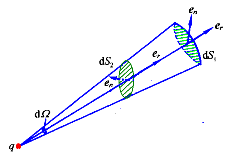
(2) 立体角

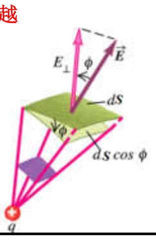


$$d\Omega = \frac{dS_0}{r^2} = \frac{\vec{e}_r\cdot d\vec{S}}{r^2}$$

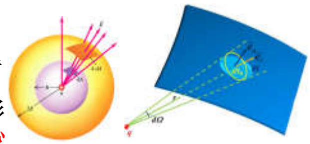
半径越小、面积越大，立体角越大







以 q 所在处为中心、r 为半径作一球面，则 $e_r\cdot dS$ 就是面元 dS 在球面上的投影 dS_0，dS_0/r^2 为 dS_0 对球心所张的立体角 $d\Omega$

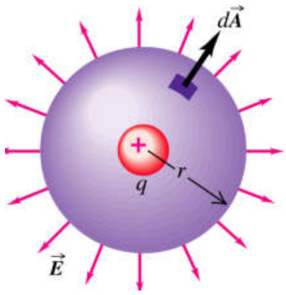


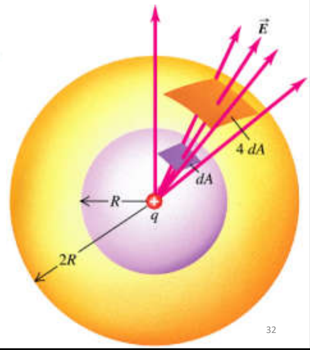
$$d\Omega=\frac{dS_0}{r^2}=\frac{\vec{e}_r\cdot d\vec{S}}{r^2}$$

$d\Omega$ 的正负由 dS 与 r 的夹角而定，所以点电荷的通量为：

$$\Phi=\iint_S \vec{E}.d\vec{S}=\iint_S\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{e}_r\cdot d\vec{S}}{r^2}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\iint_S d\Omega$$

Φ与 r 无关，只与立体角有关



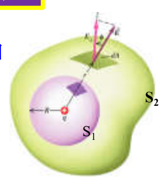


$$\oint\!\!\oint_S d\Omega=4\pi$$

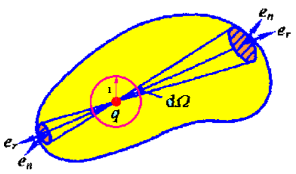
与半径无关

(3)点电荷在曲面内部

封闭曲面对曲面内任一点张的立体角和单位球面对q张的立体角相同，均为4π



$$\oint\!\!\oint_{S1} d\Omega=\oint\!\!\oint_{S2} d\Omega=4\pi$$



$$\Phi=\oint\!\!\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint\!\!\oint_S\frac{\vec{e}_r\cdot d\vec{S}}{r^2}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint\!\!\oint_S d\Omega=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}4\pi$$

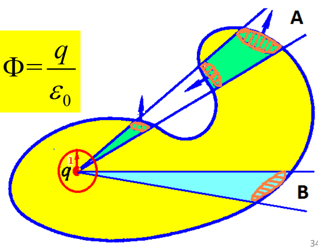
$$\therefore\ \Phi=\frac{q}{\varepsilon_0}$$

点电荷在曲面的内部，从电荷q发出的电场线将在A区域穿过曲面三次，三次穿进穿出对应的面元对q点张的立体角值$d\Omega$相同，穿出为正，穿入为负，故净穿出一次。在B区域只穿过曲面一次。

只要电荷在曲面内部，穿进穿出的次数总是奇数次。该曲面对q点张的立体角与单位圆相同，为 4π。

$$\oint\!\!\oint_S d\Omega=4\pi\qquad \Phi=\frac{q}{\varepsilon_0}$$

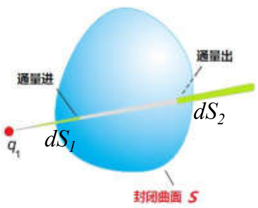
与曲面形状、大小无关



(4) 点电荷在曲面外部

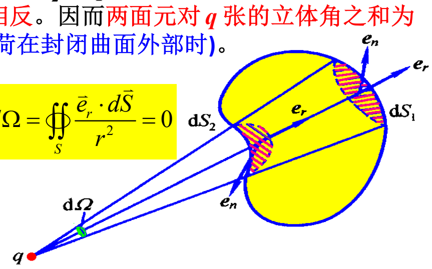
若点电荷在封闭曲面外部，则任一面元 dS_1 对 q 所张的立体角，必与另一面元 dS_2 对 q 张的立体角大小相等。

$$d\Omega=\frac{\vec{e}_r\cdot d\vec{S}_1}{r_1^2}=-\frac{\vec{e}_r\cdot d\vec{S}_2}{r_2^2}$$



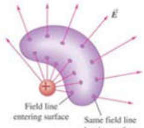
对任一闭合曲面，由于规定外法线方向为正，因此，dS_1 和 dS_2 对 q 张的立体角不仅大小相等，而且正负相反。因而两面元对 q 张的立体角之和为零(点电荷在封闭曲面外部时)。

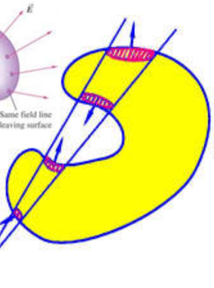
$$\Omega=\oint\!\!\oint_S d\Omega=\oint\!\!\oint_S\frac{\vec{e}_r\cdot d\vec{S}}{r^2}=0$$



$$\Phi=\oint\!\!\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint\!\!\oint_S\frac{\vec{e}_r\cdot d\vec{S}}{r^2}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint\!\!\oint_S d\Omega=0$$

当曲面如图所示，电力线穿进穿出曲面多次，但只要电荷在曲面的外面，穿进穿出的次数总是偶数，每穿进和穿出一次，其立体角的净贡献为零，这样总立体角贡献亦为零。上面的结论仍然成立。

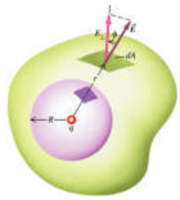




$$\Omega=\oint\!\!\!\oint_S d\Omega=\oint\!\!\!\oint_S \frac{\vec{e}_r\cdot d\vec{S}}{r^2}=0 \qquad \Phi=\oint\!\!\!\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=0$$

(5) 高斯定理

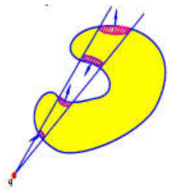
综上所述，对一个点电荷的电场：



点电荷在曲面内部时，曲面对电荷所张的立体角为 4π；

$$\Omega=4\pi \qquad \Phi=q/\varepsilon_0$$

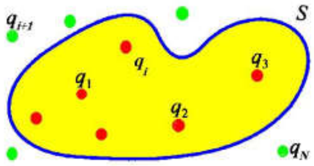
点电荷在曲面外部时，曲面对电荷所张的立体角为 **0**。



$$\Omega=0 \qquad \Phi=0$$

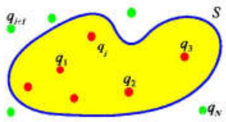
若空间有一组点电荷 q_1，q_2，q_3，…，q_N; 对一任意形状的封闭曲面 S，总电场 E 对封闭曲面的电通量为各个点电荷产生的电场 E_i 对曲面 S 的电通量之和

$$\oint\!\!\!\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=\oint\!\!\!\oint_S\left(\sum_{i=1}^{N}\vec{E}_i\right)\cdot d\vec{S}=\sum_{i=1}^{N}\oint\!\!\!\oint_{S_i}\vec{E}_i\cdot d\vec{S}$$



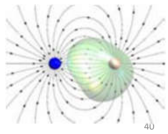
静电场的高斯定理：电场对任意封闭曲面的电通量只决定于被包围在封闭曲面内部的电荷，且等于包围在封闭曲面内电量代数和除以 ε_0，与封闭曲面外的电荷无关。

$$\oint\!\!\!\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N(S内)} q_i$$



若包围在 S 面内的电荷具有一定的体分布，电荷体密度为 $\rho(r)$，则高斯定理写成

$$\oint\!\!\!\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V \rho(r)\,dV=\frac{Q}{\varepsilon_0}$$



3. 高斯定理的讨论

- 高斯定理表明静电场是有源场

  电荷是静电场的源。高斯定理给出了场和场源的一种联系，这种联系是场强对封闭曲面的通量与场源间的联系，并非场强本身与源的联系。

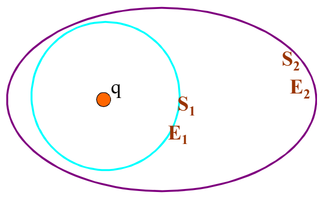
- 高斯面上的电荷问题

  高斯面把电荷区分为面内、面外两种。点电荷是否可能正好处在高斯面上？

  这是不可能的，因为点电荷是一理想模型，只有点电荷的线度 l 远小于电荷与高斯面间的距离 d (l<<d)，才能视为点电荷。

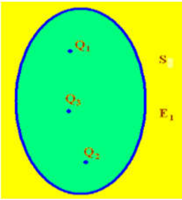
- 高斯定理中的电场(E)问题

  - 高斯定理中的电场 E 是空间全部电荷所产生的，不管这电荷是在曲面内部或在曲面外部。
  - 同一高斯面上的 E 的大小可能相同，也可能不同
  - 高斯面可以任意选取
  - 为了计算方便通常会取一些具有特殊对称性的面。



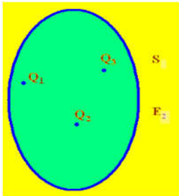
高斯定理表明的只是电通量和电荷的关系

- 如果在高斯面内部或外部电荷分布发生改变，则空间电场分布将发生变化，高斯面上的电场也会发生变化；
- 但只要内部总电荷数不变，高斯定理指出，电场对该封闭曲面的电通量并无变化。



$$\Phi_1 = \Phi_2$$

$$E_1 \neq E_2$$



43

高斯定理的微分形式

数学上 $\oiint_S \vec{A}\cdot d\vec{S} = \iiint_V \nabla\cdot\vec{A}dV$ 　$\vec{A}$ 为任意矢量，V是封闭曲面S对应的体积

$$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \iiint_V \nabla\cdot\vec{E}dV = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V \rho dV$$

高斯定理可以写成微分形式：

$$\nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

表明电场线不会在没有电荷的空间产生或消失。

44

散度的定义

设有矢量场$\vec{A}$，在场中任一点 P 处，作一个包含 P 点在内的任一闭合曲面 S，S 所限定的体积为 ΔV，当体积 ΔV 以任意方式缩向 P 点时，取下列极限(如果极限存在）

$$div\vec{A} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oiint_S \vec{A}\cdot d\vec{S}}{\Delta V}$$

则称此极限为矢量场$\vec{A}$ 在点 P 处的散度(divergence)，记作

$$div\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

45

引进微分算子"∇"，在直角坐标系中：

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z$$

相当于一个矢量

$$\vec{A} = A_x\vec{e}_x + A_y\vec{e}_y + A_z\vec{e}_z$$

$$\nabla\cdot\vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z\right)\left(A_x\vec{e}_x + A_y\vec{e}_y + A_z\vec{e}_z\right)$$

$$\nabla\cdot\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

对任意矢量求散度得到的是一个标量

46

柱坐标系中

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z$$

$$\nabla\cdot\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rA_r\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(A_\varphi\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(A_z\right)$$

球坐标系中

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi$$

$$\nabla\cdot\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2A_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta A_\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(A_\varphi\right)$$

4. 高斯定理与库仑定律的关系

(1) 高斯定理来源于库仑定律

- 高斯定理是静电场的一条重要基本定理；
- 它是从库仑定律导出来的；
- 它主要反映了库仑定律的平方反比律，即$1/r^2$；
- 如果库仑定律不服从平方反比律，我们就不可能得到高斯定理。

下面我们来证明！

48

【证明】若 $F \propto \frac{1}{r^{2+\delta}},\ \Rightarrow\ E=\frac{F}{q_0} \propto \frac{1}{r^{2+\delta}}$

则 $\Phi = \oint\!\!\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint\!\!\oint \frac{1}{r^{2+\delta}}dS = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint\!\!\oint \frac{d\Omega}{r^{\delta}}$

亦即：$\Phi = \Phi(r)$ 若 $\delta>0$，则 $\Phi(\infty)=0$ 电通量消失

则高斯定理不成立！

- 证明高斯定理的正确性，是证明库仑定律中平方反比律的一种间接方法；
- 直接用扭秤法证明平方反比律的精度非常低，通过高斯定理证明平方反比律可获得非常高的精度。

(2) 高斯定理比库仑定律更普遍

- 高斯定理是库仑定律为基础导出的，但其使用范围远远超出静电场，它对随时间变化的电场也成立。
- 库仑定律决定点电荷的静电场具有平方反比律、径向性和球对称性，加上叠加原理可以推广到任意的静电场。
- 运动点电荷，由于在运动方向上的特殊性，破坏了球对称性

匀速运动的点电荷的电场为：

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\frac{1-\beta^2}{\left(1-\beta^2\sin^2\theta\right)^{3/2}}\vec{e}_r$$

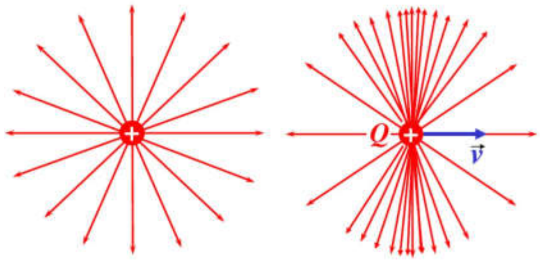
$\beta = v/c$

v为电荷运动速度，c为光速，θ为r方向与v方向间的夹角

仍满足高斯定理！

静止点电荷：电场球对称
库仑定律成立

运动点电荷：电场轴对称(不再具有球对称)；
库仑定律不成立



高斯定理都成立！

后面章节还会讲到，变化的磁场将产生涡旋电场，在涡旋场中任取一闭合曲面S，有：

$$\oint\!\!\oint \vec{E}_{涡旋}\cdot d\vec{S} = 0$$

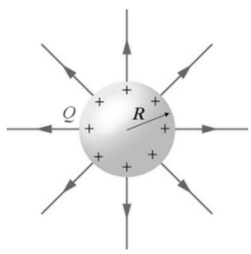
即涡旋电场也满足高斯定理。

但涡旋电场不满足库仑定律(涡旋电场不具有径向性和球对称性)

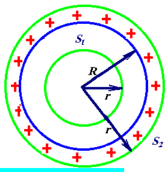
- 库仑定律不但说明电荷间的相互作用力服从平方反比律，而且说明电荷间的作用力是有心力。
- 认为高斯定理与库仑定律完全等价，或认为从高斯定理出发可以导出库仑定律的看法是欠妥的，因为高斯定理并没有反映静电场是有心力场这一特性。
- 实际上，不增添附加条件，如点电荷的电场方向沿径向并具有球面对称性等，并不能从高斯定理导出库仑定律。
- 因此，在静电场范围内，库仑定律比高斯定理包含更多的物理信息。

5. 高斯定理应用举例

【例9】求均匀带电球面产生的电场。已知球面的半径为R，电量为Q。



【解】根据球对称性可以判定，不论在球内还是在球外，场强的方向必定沿球的半径，与球心等距离的各点的场强大小应相等。取球面为高斯面：



当$r<R$时，作S_1的高斯面，有：$\oint\!\!\oint_{S_1} \vec{E}\cdot d\vec{S} = E\oint\!\!\oint_{S_1} dS = E4\pi r^2 = \frac{0}{\varepsilon_0} = 0$

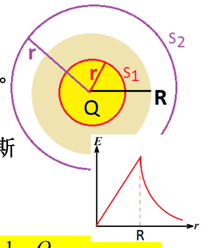
$E=0, \quad (r<R)$ 球内没有电场！

当$r>R$时，作S_2的高斯面，有：$\oint\!\!\oint_{S_2} \vec{E}\cdot d\vec{S} = E\oint\!\!\oint_{S_2} dS = E4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$

$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}, \quad (r>R)$ 与Q位于球心时值相同

55

【例10】求均匀带电球体产生的电场。已知球面的半径为R，电量为Q。



【解】电场具有球对称性，取球面为高斯面，$r>R$ 时，作S_2的高斯面，有：

$\oint\!\!\oint_{S_2} \vec{E}\cdot d\vec{S} = E\oint\!\!\oint_{S_2} dS = E4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$ ➡ $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^3}\vec{r}, \quad (r>R)$

与Q位于球心时值相同

$r<R$ 时，作S_1的高斯面，有：

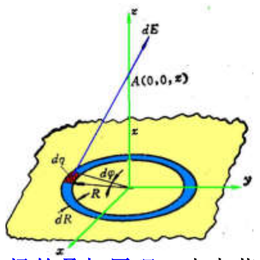
$\oint\!\!\oint_{S_1} \vec{E}\cdot d\vec{S} = E4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$

$q = \rho V = \frac{Q}{4\pi R^3/3}\cdot 4\pi r^3/3$ ➡ $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\vec{r} \quad (r<R)$

随 r 线性增加

56

【例11】 求无限大均匀带电平面的电场



上节课用电场的叠加原理，由电荷元的电场叠加计算得到了无限大带电平面的电场为$E=\sigma/2\varepsilon_0$，是均匀电场，与点到表面距离无关。实际上可以用更简单的方法 — 高斯定理求解。

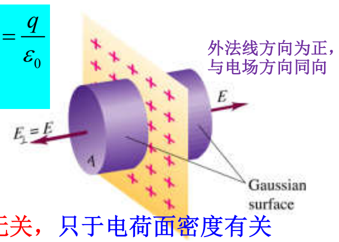
57

【解】根据对称性，可以判定无限大带电平面的电场应垂直于表面，离平面等距离处电场强度相同。取一圆柱形高斯面，圆柱的两底面离带电平面等距，圆柱侧面θ=π/2，电通量为0，只有两底面有电通量。

$\oint\!\!\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = 0 + 2E\Delta S = \frac{q}{\varepsilon_0}$

$q = \sigma\Delta S$

$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$



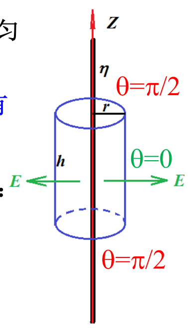
均匀电场，与距离无关，只于电荷面密度有关

与前面由电荷元的电场积分得到结果相同

58

【例12】 求线电荷密度为 η 的均匀带电无限长细棒所产生的电场

【解】由对称性分析得：电场具有轴对称性，电场方向垂直于细棒。取一圆柱形高斯面，上、下底面θ=π/2，无电通量，侧面有电通量：



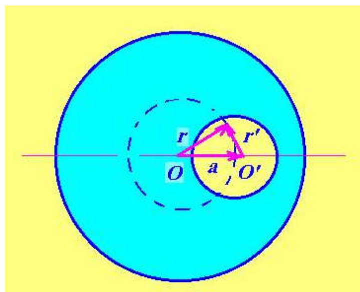
$\oint\!\!\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = 0 + E\cdot 2\pi rh = \frac{q}{\varepsilon_0}$

$q = \eta h$

$\vec{E} = \frac{\eta}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{e}_r$

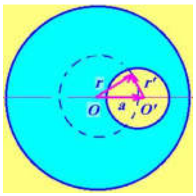
59

【例13】求均匀带电球体中所挖出的球形空腔中的电场强度。球体电荷密度为ρ，球体球心到空腔中心的距离为a。



60

【解】将空腔看作是同时填满+ρ 和 -ρ 的电荷，腔内任一点的电场由一个电荷密度为+ρ 的实心大球和一个电荷密度为 -ρ 的实心小球的场叠加而成



O为球心，带+ρ大球产生的电场 E_+

$$\oint\!\!\!\oint_S \vec{E}_+\cdot d\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\rho\frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow \vec{E}_+=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}$$

O'为球心，-ρ小球产生的电场 E_-

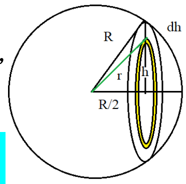
$$\vec{E}_-=-\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}\,'$$

$\vec{a}$ 为矢量，方向由O指向O'的矢量

总电场 $$\vec{E}=\vec{E}_++\vec{E}_-=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}(\vec{r}-\vec{r}\,')=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{a}$$

空腔内电场是均匀的！

【例14】一个半径为R的均匀带电球体，电荷密度为ρ。设想有一平面与球体相截，球心与此平面的垂直距离为$R/2$，求球体与平面相截的圆面上的电通量ϕ为多少？



【解法1】利用积分法求解

由前面例题知球内一点电场为 $\vec{E}=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}$

通过半径为h、宽度为dh的圆环的通量为 $dS=2\pi hdh$

$$d\phi=\vec{E}\cdot d\vec{S}=EdS\cos\theta=\frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\cdot 2\pi hdh\cdot\frac{R/2}{r}=\frac{\pi\rho R}{3\varepsilon_0}hdh=\frac{\pi\rho R}{6\varepsilon_0}d\left(h^2\right)$$

总电通量为：

$$h_{\max}=\sqrt{R^2-\left(\frac{R}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}R$$

$$\phi=\int d\phi=\int_{h=0}^{\sqrt{3}/2R}\frac{\pi\rho R}{6\varepsilon_0}d\left(h^2\right)=\frac{\pi\rho R^3}{8\varepsilon_0}$$

【解法2】巧利用高斯定理求解

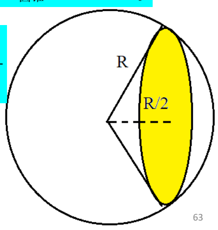
以截面为底，以圆心为顶点，做一个圆锥，该圆锥面为高斯面

电场沿径向，侧面θ=π/2，通量为0

$$\phi=\iint_{底面}\vec{E}\cdot dS=\oint\!\!\!\oint_{圆锥}\vec{E}\cdot dS-\iint_{侧面}\vec{E}\cdot dS=\oint\!\!\!\oint_{圆锥}\vec{E}\cdot dS=\frac{Q}{\varepsilon_0}$$

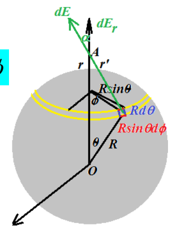
$$Q=\rho V=\rho\left(\frac{1}{3}\cdot\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}R\right)^2\cdot\frac{R}{2}\right)=\frac{\pi\rho R^3}{8}$$

$$\phi=\frac{Q}{\varepsilon_0}=\frac{\pi\rho R^3}{8\varepsilon_0}$$



【例15】考察半径为R的带电球壳，总电量为Q，假设静电力服从n次方反比律，试计算距离球心r处的电场。

【解】取球壳上一面元dS，其大小为:



$$dS=Rd\theta\cdot R\sin\theta d\phi=R^2\sin\theta d\theta d\phi$$

$$dq=\sigma dS \qquad \sigma=\frac{Q}{4\pi R^2}$$

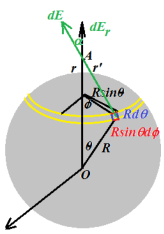
$$dE=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r'^n}$$

r'为面元到A点的距离

电场与距离的n次方成反比

$OA=r$ $$r'^2=r^2+R^2-2rR\cos\theta$$

根据对称性，电场沿半径方向

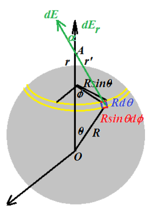


$$dE_r=dE\cos\alpha$$

$$\cos\alpha=\frac{r-R\cos\theta}{\left(r^2+R^2-2rR\right)^{1/2}}$$

$$dE_r=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma R^2\sin\theta d\theta d\phi}{\left(r^2+R^2-2rR\cos\theta\right)^{n/2}}\cdot\frac{r-R\cos\theta}{\left(r^2+R^2-2rR\right)^{1/2}}$$

$$E_r=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{2\pi}\frac{\sigma R^2\sin\theta\left(r-R\cos\theta\right)}{\left(r^2+R^2-2rR\cos\theta\right)^{n+1/2}}d\phi$$



作积分变量代换，令：

$$u=r^2+R^2-2rR\cos\theta, \qquad du=2rR\sin\theta d\theta$$

则上面积分可以写成：

$$E_r=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{(r-R)^2}^{(r+R)^2}\frac{\pi\sigma R\left(u+r^2-R^2\right)}{2r^2u^{\left(n+1/2\right)}}du$$

于是得到：$E_r=\dfrac{2\pi\sigma R}{4\pi\varepsilon_0 r^2(3-n)(1-n)}\left\{(r+R)^{2-n}\left[r(2-n)-R\right]-(r-R)^{2-n}\left[r(2-n)+R\right]\right\}\qquad(r>R)$

$E_r=\dfrac{2\pi\sigma R}{4\pi\varepsilon_0 r^2(3-n)(1-n)}\left\{(r+R)^{2-n}\left[r(2-n)-R\right]+(R-r)^{2-n}\left[r(2-n)+R\right]\right\}\qquad(r<R)$

讨论：

(1) 如果 $n=2$, 则球壳内($r<R$)电场, $E_r=0$；

(2) 如果 $1<n<2$, 则球壳内电场 $E_r>0$;

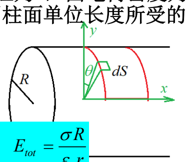
(3) 如果 $n>2$, 则球壳内电场 $E_r<0$.

(2) (3)情况下，球壳对置于其内部的电荷均有作用力。

因此精确测量导体球内电荷受力情况就可以断平方反比律的成立精度。

67

【例16】一无限长均匀带电的圆柱面，半径为R，面电荷密度为σ, 假设沿轴线将其切开，求其中一半圆柱面单位长度所受的力。



【解】在圆柱面上取带电面元 dS，它处于除它本身外的其它所有面积的面电荷产生的电场中，受到电场力dF。

由高斯定理求整个圆柱面的电场：

$$r>R\quad E_{tot}\times 2\pi rl+0+0=\frac{\sigma 2\pi Rl}{\varepsilon_0}\quad E_{tot}=\frac{\sigma R}{\varepsilon_0 r}$$

$$r<R\quad E_{tot}=0$$

E_{tot}中包含了面元dS产生的电场，必须减掉

设小面元 dS 产生的电场为 dE。当 $r\to R$ 时，相当于无限大带电平面，面元两边电场垂直于面元，方向相反

$$dE=\begin{cases}\sigma/2\varepsilon_0 & r>R\\ -\sigma/2\varepsilon & r<R\end{cases}$$

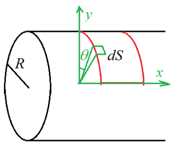
内外不连续

故带电面元 dS 受到的外电场为 E_{tot}-dE

$$E_{tot}-d\mathrm{E}=\begin{cases}\dfrac{\sigma R}{\varepsilon_0 r}-\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}=\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0} & (r=R+)\\ 0-\left(-\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right)=\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0} & (r=R-)\end{cases}$$

内外连续

带电面电荷元$dq=\sigma dS$ 受到的力dF



$$dF=dq\left(E_{tot}-dE\right)=\sigma dS\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

沿径向

$$dS=Rd\theta dx$$

由对称性，一半圆柱面的合力应该沿图中 y 方向

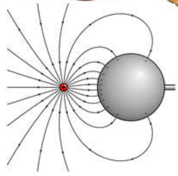
$$dF_y=dF\cos\theta=\frac{R\sigma^2}{2\varepsilon_0}\cos\theta d\theta dx$$

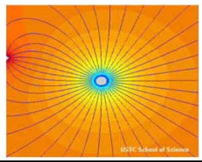
单位长度受力 $$F=\int dF_y=2\int_0^{\pi/2}\frac{R\sigma^2}{2\varepsilon_0}\cos\theta d\theta\int_0^1 dx=\frac{R\sigma^2}{\varepsilon_0}$$

问　题

1.一些奇异曲面的电通量问题讨论

2.电力线方程以及复杂电荷体系的电力线计算和绘图





3. 运动电荷的电场

70