第二部分 分布式算法

汪炀

第二次课

中国科学技术大学计算机系
国家高性能计算中心（合肥）

§2.1.1 系统

2.异步系统

- **异步：**msg传递的时间和一个处理器的两个相继步骤之间的时间无固定上界

  例如，Internet中，email虽然常常是几秒种到达，但也可能要数天到达。当然msg延迟有上界，但它可能很大，且随时间而改变。

  因此异步算法设计时，须使之独立于特殊的计时参数，不能依赖于该上界。

- **执行片断**

  一个异步msg传递系统的一个执行片断 α 是一个有限或无限的序列：

  $C_0, \Phi_1, C_1, \Phi_2, C_2, \Phi_3, \ldots$, (C_0不一定是初始配置)

  这里C_k是一个配置，　Φ_k是一个事件。若 α 是有限的，则它须结束于某个配置，且须满足下述条件：

§2.1.1 系统

- 若 Φ_k =del(i,j,m)，则m必是C_{k-1}里的$outbuf_i[l]$的一个元素，这里l是p_i的信道$\{p_i,p_j\}$的标号

  从C_{k-1}到C_k的唯一变化是将m从C_{k-1}里的$outbuf_i[l]$中删去，并将其加入到C_k里的$inbuf_j[h]$中，h是p_j的信道$\{p_i,p_j\}$的标号。

  即：传递事件将msg从发送者的输出缓冲区移至接收者的输入缓冲区。

- 若Φ_k =comp(i)，则从C_{k-1}到C_k的变化是

  ①改变状态：转换函数在p_i的可访问状态(在配置C_{k-1}里)上进行操作，清空$inbuf_i[l]$，$(1\leq l\leq r)$

  ②发送msg：将转换函数指定的消息集合加到C_k里的变量$outbuf_i$上。(Note:发送send，传递delivery之区别)

  即： p_i以当前状态(在C_{k-1}中)为基础按转换函数改变状态并发出msg。

§2.1.1 系统

- **执行：**一个执行是一个执行片断C_0，Φ_1，C_1，Φ_2，…，这里C_0是一个初始配置。
- **调度：**一个调度(或调度片段)总是和执行(或执行片断)联系在一起的，它是执行中的事件序列：Φ_1，Φ_2，…。

  并非每个事件序列都是调度。例如，del(1,2,m)不是调度，因为此事件之前，p_1没有步骤发送(send)m。

  若局部程序是确定的，则执行(或执行片断)就由初始配置C_0和调度(或调度片断)σ唯一确定，可表示为exec(C_0, σ)。

§2.1.1 系统

- **容许执行：**(满足活跃性条件)
  异步系统中，若某个处理器有无限个计算事件，每个发送的msg都最终被传递，则执行称为容许的。
  Note: 无限个计算事件是指处理器没有出错，但它不蕴含处理器的局部程序必须包括一个无限循环
  非形式地说：一个算法终止是指在某点后转换函数不改变处理器的状态。

- **容许的调度：**
  若它是一个容许执行的调度。

§2.1.1 系统

3.同步系统

在同步模型中，处理器按锁步骤(lock-step)执行：

执行被划分为轮，每轮里，①每个处理器能够发送一个msg到每个邻居，这些msg被传递。②每个处理器一接到msg就进行计算。

虽然特殊的分布系统里一般达不到，但这种模型对于设计算法非常方便，因为无需和更多的不确定性打交道。当按此模型设计算法后，能够很容易模拟得到异步算法。

- **轮：**在同步系统中，配置和事件序列可以划分成不相交的轮，每轮由一个传递事件(将outbuf的消息传送到信道上使outbuf变空)，后跟一个计算事件(处理所有传递的msg)组成。

§2.1.1 系统

- **容许的执行：**指无限的执行。
  因为轮的结构，所以
  每个处理器执行无限数目的计算步，
  每个被发送的msg最终被传递

- **同步与异步系统的区别**
  在一个无错的同步系统中，一个算法的执行只取决于初始配置
  但在一个异步系统中，对于相同的初始配置及无错假定，因为处理器步骤间隔及消息延迟均不确定，故同一算法可能有不同的执行。

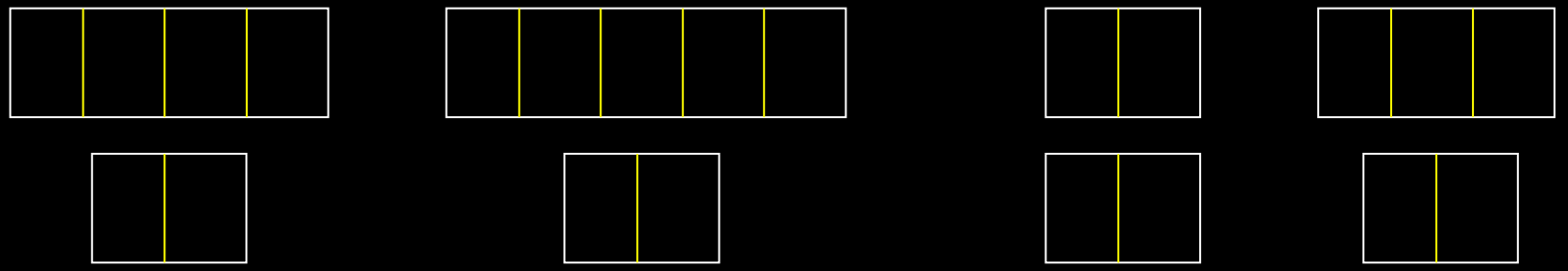
§2.1.2 复杂性度量

- **分布式算法的性能：**
  - 消息复杂度
  - 时间复杂度
  - 空间复杂度
  - 性能衡量：最坏性能、期望性能
- **终止：**假定每个处理器的状态集包括终止状态子集，每个的p_i的转换函数对终止状态只能映射到终止状态

当所有处理机均处于终止状态且没有msg在传输时，称系统(算法)已终止。

§2.1.2 复杂性度量

- **算法的msg复杂性(最坏情况)**：算法在所有容许的执行上发送msg总数的最大值(同步和异步系统)
- **消息复杂度度量**
  - 消息复杂度：消息总数/消息中总的位数长度



  - 消息总数：4/4
  - 消息位数总长度(位复杂度)：14/8

§2.1.2 复杂性度量

- **时间复杂度**

①同步系统：最大轮数，即算法的任何容许执行直到终止的最大轮数。

②异步系统：假设：①节点计算任何有限数目事件的时间为0；②一条消息发送和接收之间的时间至多为1个时间单位，定义为：所有计时容许执行中直到终止的最大时间。

- **计时执行(timed execution)**

指：每个事件关联一个非负实数，表示事件发生的时间。时间起始于零，且须是非递减的。但对每个单个的处理器而言是严格增的。

若执行是无限的，则执行的时间是无界的。因此执行中的事件可根据其发生时间来排序

不在同一处理器上的多个事件可以同时发生，在任何有限时间之前只有有限数目的事件发生。

§2.1.2 复杂性度量

- **消息的延迟**
  - 发送msg的计算事件和处理该msg的计算事件之间所逝去的时间
  - 它主要由msg在发送者的outbuf中的等待时间和在接收者的inbuf中的等待时间所构成

- **异步算法的时间复杂性**

  定义中，每个msg延时至多为1，但实际中，至多1个时间单位会很难计算，因此修改假设：

  ①一条消息发送和接收之间时间恰好为1个时间单位
  ②一条消息发送和接收之间时间介于α和1之间(0< α<1)
  ③假设消息传递的延迟满足某种概率分布，并由此来计算

§2.1.3 伪代码约定

在形式模型中，一个算法将根据状态转换来描述。但实际上很少这样做，因为这样做难于理解。

实际描述算法有两种方法：

①叙述性：对于简单问题

②伪码形式：对于复杂问题

§ 2.1.3 伪代码约定

- **异步算法：**对每个处理器，用中断驱动来描述异步算法。

  在形式模型中，每个计算事件1次处理所有输入缓冲区中的msgs。而在算法中，一般须描述每个msg是如何逐个处理的

  异步算法也可在同步系统中工作，因为同步系统是异步系统的一个特例。

  一个计算事件中的局部计算的描述类似于顺序算法的伪代码描述。

- **同步算法：**逐轮描述
- **伪代码约定：**

—在p_i的局部变量中，无须用i做下标，但在讨论和证明中，加上下标i以示区别。

—“//”后跟注释

§2.2 生成树上的广播和汇集

- **为什么广播和汇集算法**

  信息收集（敛播/汇集）及分发(广播)是许多分布式算法的基础。故通过介绍这两个算法来说明模型、伪码、正确性证明及复杂性度量等概念。

- **为什么生成树上？**

  由于分布式系统中，每个节点并不知道全局拓扑状态，但某些算法需要在特定的结构下才能达到最优。例如：广播/敛播在树结构下才能达到消息复杂度最优，因此构造生成树是必要的，且是其他算法的基础。

§2.2 生成树上的广播和汇集

■生成树

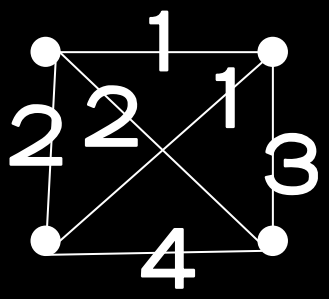
一个无向连通图G的生成树(Spanning Tree)是指满足下列条件的G的子图T：

①G和T具有相同的顶点数；

②在T中有足够的边能够连接G的所有顶点且不出现回路。

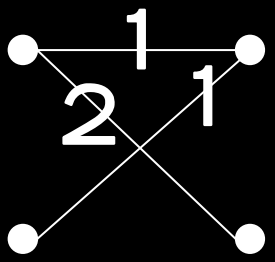
■最小生成树

如果图的每一条边都指定有一个权，那么所有的边权最小的生成树，就成为最小代价生成树(Minimum Cost Spanning Tree, MCST)，简称最小生成树(MST)。



生成树一共有16棵

最小生成树

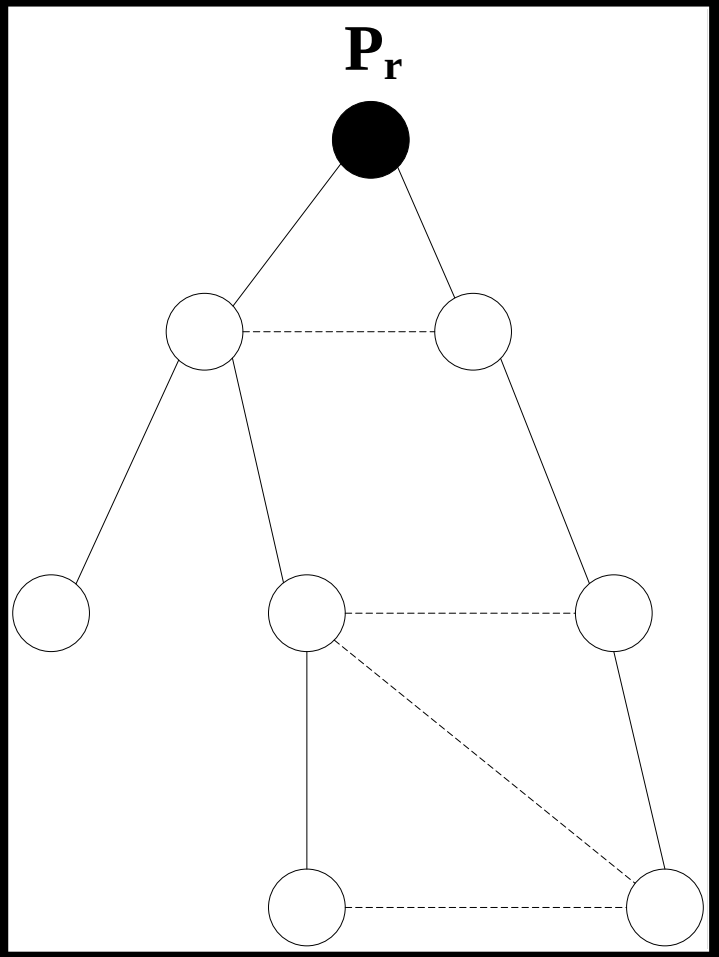


§2.2 生成树上的广播和汇集

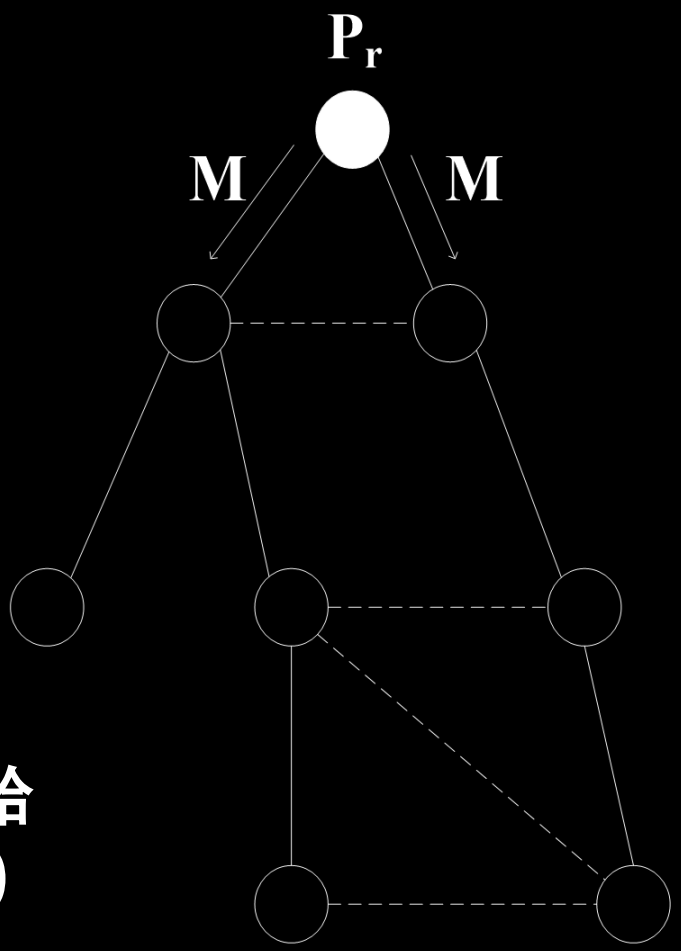
§2.2.1 广播 (Broadcast)

假定网络的生成树已给定。某处理器p_r希望将消息M发送至其余处理器。

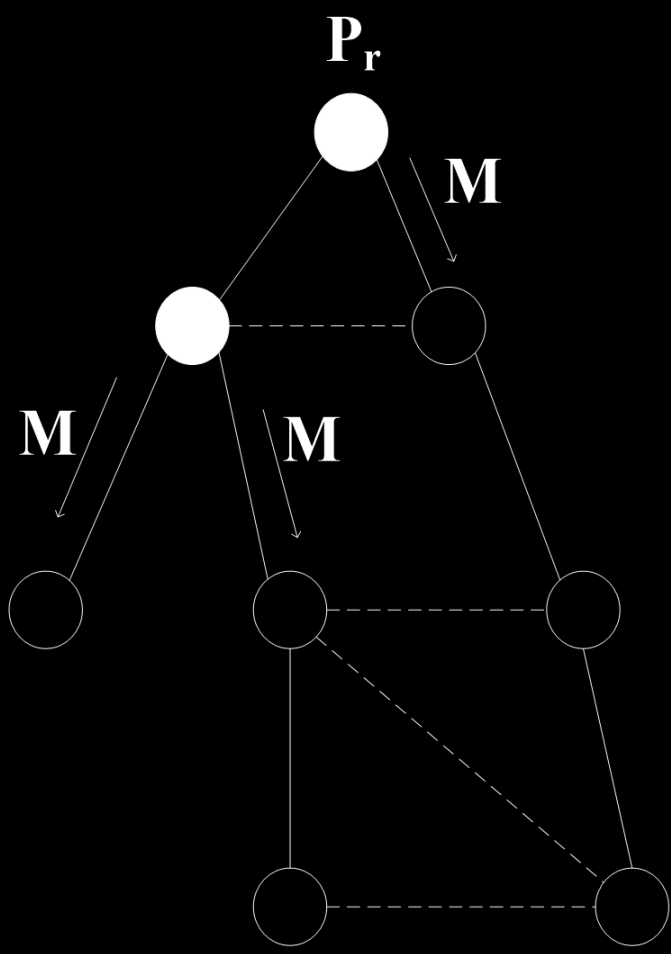
假定生成树的**根为p_r**，每个处理器有一个信道连接其双亲(p_r除外)，有若干个信道连接其孩子。



§2.2.1 广播



（a）



（b）

- 根 p_r 发送M给所有孩子。(a)
- 当某节点收到父节点的M时，发送M到自己的所有孩子(b)。

树边，信道
非树边
已收到M的结点
未收到M的结点

§2.2.1 广播

1.伪码算法

Alg2.1 Broadcast

p_r: if(i=r): /发动者。假设初始化时M已在传输状态

1. upon receiving no msg: //pr发送M后执行终止
2. terminate; //将terminated置为true。

p_i($i \neq r, 0 \leq i \leq n-1$):

3. upon receiving M from parent:
4. send M to all children;
5. terminate;

2.用状态转换来分析算法

- 每个处理器p_i包含状态

—变量$parent_i$：表示处理器p_i双亲节点的标号或为nil(若i=r)

—变量$children_i$：p_i的孩子节点标号的集合

—布尔变量$terminated_i$：表示p_i是否处于终止状态

§2.2.1 广播

- 初始状态
  - parent和children的值是形成生成树时确定的
  - 所有terminated的值均为假
  - $outbuf_r[\ j\ ]$，$\forall\ j \in children_r$持有消息M，注意j不是信道标号，而是r的邻居号。（任何系统中，均假定各节点标号互不相等）
  - 所有其他节点的outbuf变量均为空。
- comp(i)的结果

  若对于某个k，M在$inbuf_i[k]$里，则M被放到$outbuf_i[\ j\ ]$里，$\forall\ j \in children_i$

§2.2.1 广播

- p_i进入终止状态

  将$terminated_i$置为true； 若i=r且$terminated_r$为false， 则$terminated_r$立即置为true，否则空操作。

- 该算法对同步及异步系统均正确，且在两模型中，msg和时间复杂度相同。

- Msg复杂度

  无论在同步还是异步模型中，msg M在生成树的每条边上恰好发送一次。

  因此，msg复杂性为n-1，即O(n)。

  时间复杂度为h，即O(h)，其中h为生成树的高度。

§2.2.1 广播

输入：根节点上的消息<m>

输出：每个节点都收到消息<m>

Code for P_i

```
Begin
  while (receiving no message) do
     (1) if i=r then  \\此节点为根节点
       (1.1) send <m> to all children
       (1.2) terminates
      end if
  end while
  while (receiving <m> from Pj) do
    (1) send <m> to all children
    (2) terminates
  end while
end
```

说明：
本算法中While并不代表循环，而是代表满足条件时，节点所做的动作

§2.2.1 广播

- **时间复杂性：**

①同步模型：时间由轮来度量。

Lemma2.1 在同步模型中，在广播算法的每个容许执行里，树中每个距离p_r为t的处理器在第t轮里接收消息M。

pf：对距离t使用归纳法。

归纳基础：t=1，p_r的每个孩子在第1轮里接收来自于p_r的消息M

归纳假设：假设树上每个距p_r为t-1≥1的处理器在第t-1轮里已收到M。

归纳步骤：设p_i到p_r距离为t，设p_j是p_i的双亲，因p_j到p_r的距离为t-1，由归纳假设，在第t-1轮p_j收到M。由算法描述知，在第t轮里p_i收到来自于p_j的消息M

Th2.2 当生成树高度为d时，存在一个消息复杂度为n-1，时间复杂度为d的同步广播算法

§2.2.1 广播

②异步模型

Lemma2.3 在异步模型的广播算法的每个容许执行里，树中每个距离p_r为t的处理器至多在时刻t接收消息M。

pf： 对距离t做归纳。

对t=1，初始时，M处在从p_r到所有距离为1的处理器p_i的传输之中，由异步模型的时间复杂性定义知，p_i至多在时刻1收到M。

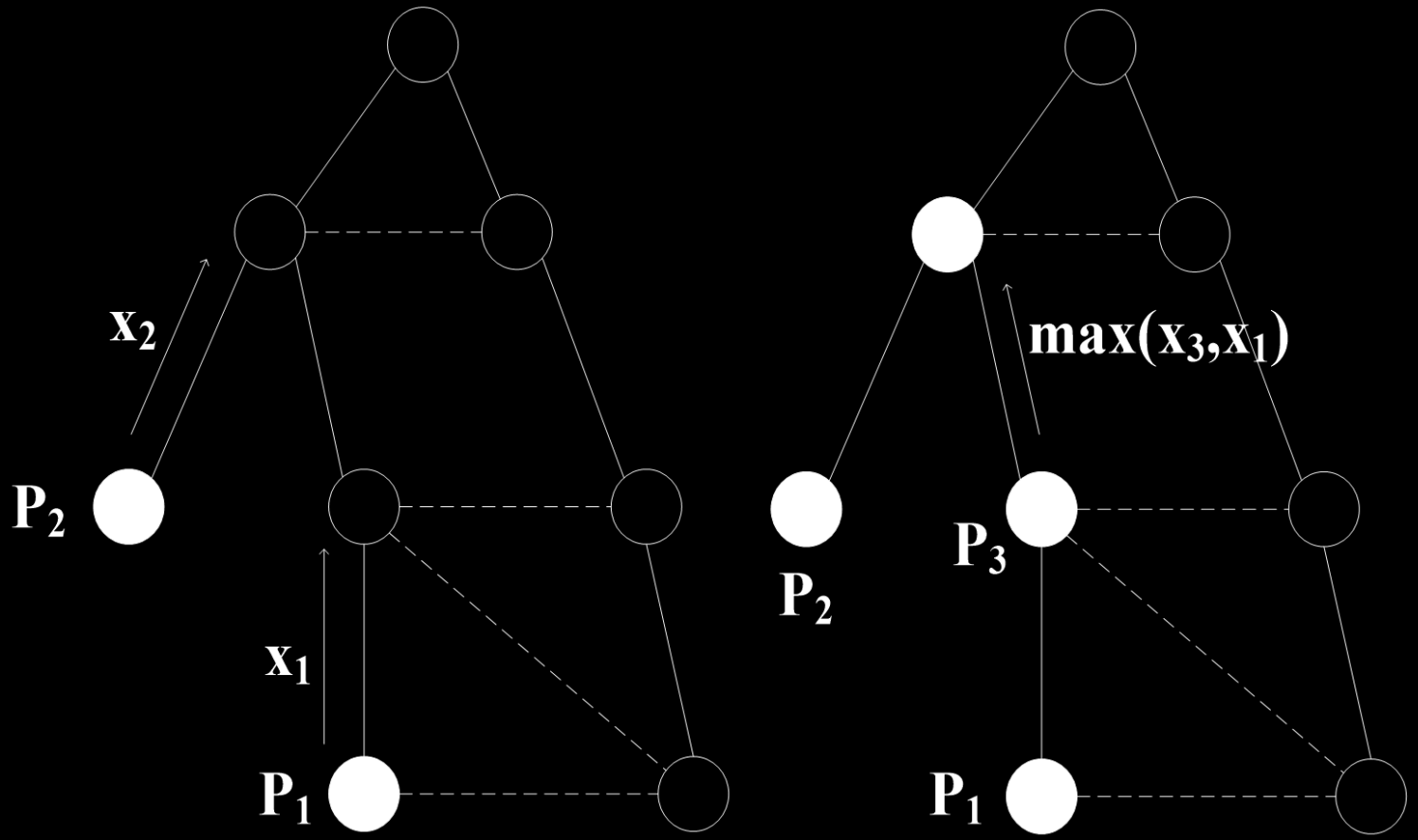
$p_i \in$ {距p_r为t的处理器}，设p_j是p_i的双亲，则p_j与p_r的距离为t-1，由归纳假设知，p_j至多在时刻t-1收到M，由算法描述知，p_j发送给p_i的M至多在t时刻到达。

Th2.4 同Th2.2

§ 2.2.2 convergecast(汇集，敛播)

与广播问题相反，汇集是从所有结点收集信息至根。为简单起见，先考虑一个特殊的变种问题：

假定每个p_i开始时有一初值x_i，我们希望将这些值中最大者发送至根p_r。



§2.2.2 convergecast(汇集，敛播)

- **算法**

每个叶子结点p_i发送x_i至双亲。//启动者

对每个非叶结点p_j，设p_j有k个孩子$p_{i1},\ldots,p_{ik}$，p_j等待k个孩子的msg $v_{i1},v_{i2},\ldots,v_{ik}$，当$p_j$收到所有孩子的msg之后将$v_j=\max\{x_j,v_{i1},\ldots,v_{ik}\}$发送到$p_j$的双亲。

换言之：叶子先启动，每个处理器p_i计算以自己为根的子树里的最大值v_i，将v_i发送给p_i的双亲。

- **复杂性**

Th2.5 当生成树高为d时，存在一个异步的敛播方法，其msg复杂性为n-1，时间复杂度为d。(与Th2.2相同)

- **广播和敛播算法用途：**初始化某一信息请求(广播发布)，然后用敛播响应信息至根。

下次继续！