中 国 科 学 技 术 大 学

2014--2015 学年第二学期《电动力学》考试参考答案

一、填空与简答题 (共 20 分)

1. $\begin{cases} \nabla\cdot\vec{E}=\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}, & \nabla\times\vec{E}=-\partial_t\vec{B} \\ \nabla\cdot\vec{B}=0, & \nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{j}+\mu_0\varepsilon_0\partial_t\vec{E} \end{cases}$

2. $c=\dfrac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}=3\times10^8\ \text{m/s}$

4. 宇宙射线中 μ 子的衰变；光行差；原子弹；GPS 等等

5. $\sin\theta=\sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1}$

6. 一

7. 第一种情形：粒子 2 相对于粒子 1 的速度：$\vec{v}_{21}=-\dfrac{40}{41}c\hat{x}=-\vec{v}_{12}$

   第二种情形：粒子 2 相对于粒子 1 的速度：$\vec{v}_{21}=-0.8c\hat{x}-0.48c\hat{y}=-\vec{v}_{12}$

8. 由于 $E^2-c^2B^2>0$ 是 Lorentz 变换下的不变量，因此不能找到使电场为零的参考系；不过可找到使得磁场为零的参考系，该参考系相对于以速度 $\hat{z}\,cB/E$ 运动。

二、计算题：本大题共 4 题，每题 20 分。请在题后空处写出必要的推理计算过程。

1. **解：** 设波导管横截面的边长分别为a和b($a>b$)，电磁波沿z轴方向传播。如此，电磁波的电场强度具有如下形式

$$\vec{E}(x_1,x_2,x_3,t)=\vec{E}_0(x_1,x_2)e^{i(k_3x_3-\omega t)} \tag{1.1}$$

$\vec{E}_0$的各个直角分量需要通过求解理想导体边界条件下Helmhotz方程得到。结论是：

$$E_{01}=A_1\cos\frac{m\pi x_1}{a}\sin\frac{n\pi x_2}{b},\quad E_{02}=A_2\sin\frac{m\pi x_1}{a}\cos\frac{n\pi x_2}{b},\quad E_{03}=A_3\sin\frac{m\pi x_1}{a}\sin\frac{n\pi x_2}{b} \tag{1.2}$$

上式中的参数m、n 是一系列非负整数。由高斯定理$\nabla\cdot\vec{E}=0$知：

$$\frac{m\pi A_1}{a}+\frac{n\pi A_3}{b}-ik_3A_3=0 \tag{1.3}$$

此外，

$$\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2+k_3^2=\frac{\omega^2}{c^2} \tag{1.4}$$

这里的c是电磁波的传播速度。波导管中电磁波的磁感应强度由下式给出：

$$\vec{B}=-\frac{i}{\omega}\nabla\times\vec{E}$$

其纵向分量具体表为：

$$B_{03}=-\frac{i}{\omega}\left(\partial_1E_{02}-\partial_2E_{01}\right)=-\frac{i}{\omega}\left(\frac{m\pi A_2}{a}-\frac{n\pi A_1}{b}\right)\cos\frac{m\pi x_1}{a}\cos\frac{n\pi x_2}{b} \tag{1.5}$$

对于TM 波，$B_3=0$。所以，

$$mbA_2=naA_1 \tag{1.6}$$

模式为TM_{m0}的横磁波要求$n=0$但$m\neq0$。由(1.6)得到$A_2=0$。把$n=0=A_2$代入电场表达式(1.2)我们看到$\vec{E}=0$，从而$\vec{B}=0$。所以，TM_{m0}波是不存在的。同理，TM_{0n}波也不存在。波导管中能够传播的电磁波的纵向波数k_3必须是实数。从而按(1.3) 我们有：

$$\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\leq\frac{\omega^2}{c^2} \tag{1.7}$$

对于频率为 $f=3\sqrt{2}\times10^{10}$ Hz 的微波，

$$\frac{\omega^2}{c^2}=\left(\frac{2\pi f}{c}\right)^2=8\pi^2\ \mathrm{cm}^{-2} \tag{1.8}$$

所以当$a=0.6$ cm、$b=0.4$ cm 时，不等式(1.8) 化为：

$$\frac{m^2}{9}+\frac{n^2}{4}\leq0.32 \tag{1.9}$$

此不等式的解不唯一，即或者$(m,n)=(1,0)$，或者$(m,n)=(0,1)$。这两个模式分别是横电波TE_{10}与横电波TE_{01}。

2. **解：**计算辐射电磁场的场量时，$\nabla \sim ik\hat{r}$、$\partial_t \sim -i\omega = -ikc$。故此磁偶极辐射的磁感应强度是：

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \frac{\mu_0 k^2 e^{ik(r-ct)}}{4\pi r}\hat{r} \times (\vec{m} \times \hat{r}) = \frac{\mu_0 k^2 e^{ik(r-ct)}}{4\pi r}\left[\vec{m} - (\vec{m}\cdot\hat{r})\hat{r}\right] \tag{2.1}$$

因为辐射区不存在非零的电荷、电流分布，故有 $\nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c^2}\partial_t \vec{E}$。所以，此磁偶极辐射的电场强度是：

$$\vec{E} = -c\hat{r} \times \vec{B} = \frac{\mu_0 c k^2 e^{ik(r-ct)}}{4\pi r}\vec{m} \times \hat{r} \tag{2.2}$$

平均能流密度矢量：

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2\mu_0}\mathrm{Re}\left(\vec{E} \times \vec{B}^*\right) = \frac{\mu_0 c k^4}{32\pi^2 r^2}\left[|\vec{m}|^2 - (\vec{m}\cdot\hat{r})(\vec{m}^*\cdot\hat{r})\right]\hat{r} \tag{2.3}$$

取 $\vec{m}$ 沿z轴方向，使得 $\hat{r}$ 对应的极角为 θ，则可以把上式改写为：

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{\mu_0 c k^4}{32\pi^2 r^2}|\vec{m}|^2 \sin^2\theta\hat{r} \tag{2.4}$$

总辐射功率求得为：

$$P = \oiint_S \left(\hat{r}\cdot\langle\vec{S}\rangle\right) r^2 d\Omega = \frac{\mu_0 c k^4}{32\pi^2}|\vec{m}|^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin^3\theta d\theta = \frac{\mu_0 c k^4}{12\pi}|\vec{m}|^2 \tag{2.5}$$

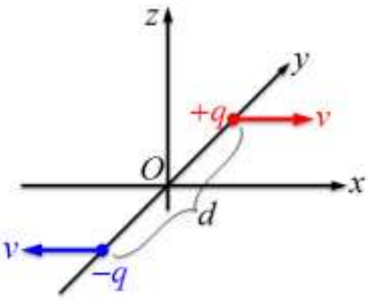
3. **解：**

	参考系 Σ	参考系 Σ' ($+q$ 静止)	参考系 Σ'' ($-q$ 静止)
$-q$ 在 $+q$ 处产生的 $\vec{E}$	$-\gamma E_0 \hat{y}$	$-\gamma^2\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)E_0\hat{y}$	$-E_0\hat{y}$
$-q$ 在 $+q$ 处产生的 $\vec{B}$	$\frac{v}{c^2}\gamma E_0 \hat{z}$	$\frac{2v}{c^2}\gamma^2 E_0\hat{z}$	0
$-q$ 对 $+q$ 的作用力 $\vec{F}$	$-\gamma q E_0\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)\hat{y}$	$-q\gamma^2\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)E_0\hat{y}$	$-qE_0\hat{y}$

其中，$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$，$E_0 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 d^2}$。

方法一：利用匀速运动点电荷电磁场的分布 $\vec{E}=\dfrac{Q\hat{R}}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\dfrac{1-\beta_0^2}{\left(1-\beta_0^2\sin^2\theta\right)^{3/2}}$ and $\vec{B}=\dfrac{\vec{v}_0\times\vec{E}}{c^2}$。

在三个参考系中均有 $Q=-q$、$\theta=\pi/2$、$\hat{R}=\hat{y}$、$R=d$，差别仅在于负电荷速度不同，设 $\vec{v}_0=v_0\hat{x}$ 及 $E_0=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 d^2}$，则有



$$\vec{E}=-\gamma_0 E_0\hat{y}\ \text{ and }\ \vec{B}=-\frac{v_0 E}{c^2}\hat{z}=-\frac{v_0}{c^2}\gamma_0 E_0\hat{z}\ \text{ where }\ \gamma_0=\frac{1}{\sqrt{1-v_0^2/c^2}}$$

参考系 Σ 中，$v_0=-v$，因而

$$\vec{E}=-\gamma E_0\hat{y}\ \text{ and }\ \vec{B}=\frac{v}{c^2}\gamma E_0\hat{z}\ \text{ where }\ \gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\vec{F}=q\left(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}\right)=\gamma qE_0\left(-\hat{y}+\frac{v^2}{c^2}\hat{x}\times\hat{z}\right)=-\gamma qE_0\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)\hat{y}$$

参考系 Σ' 中，$v_0=\dfrac{-v-v}{1+v^2/c^2}=-\dfrac{2v}{1+v^2/c^2}\ \Rightarrow\ \gamma_2=\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{4v^2/c^2}{\left(1+v^2/c^2\right)^2}}}=\gamma^2\left(1+\dfrac{v^2}{c^2}\right)$，

$$\vec{E}=-\gamma^2\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)E_0\hat{y}\ \text{ and }\ \vec{B}=\frac{2v}{c^2}\gamma^2 E_0\hat{z}$$

$$\vec{F}=q\vec{E}=-q\gamma^2\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)E_0\hat{y}$$

参考系 Σ'' 中，$v_0=0$，

$$\vec{E}=-E_0\hat{y}\ \text{ and }\ \vec{B}=0$$

$$\vec{F}=q\vec{E}=-qE_0\hat{y}$$

方法二：利用场的变换。注意到 Σ 相对于 Σ'' 中沿着 x 轴正方向以速度 v 运动，Σ' 相对于 Σ 中沿着 x 轴正方向以速度 v 运动。

在参考系 Σ'' 中，

$$\vec{E}''=-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 d^2}\hat{y}=-E_0\hat{y}\ \text{ and }\ \vec{B}''=0\ \text{ where }\ E_0=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 d^2}$$

因而

$$\vec{F}=q\vec{E}''=-qE_0\hat{y}$$

参考系 Σ 相对于 Σ'' 中沿着 x 轴正方向以速度 v 运动；

$$\vec{E}=\gamma\left(\vec{E}''+\vec{v}\times\vec{B}''\right)=\gamma\vec{E}''=-\gamma E_0\hat{y}$$

$$\vec{B}=\gamma\left(\vec{B}''-\frac{1}{c^2}\vec{v}\times\vec{E}''\right)=-\gamma\frac{\vec{v}\times\vec{E}''}{c^2}=\frac{v}{c^2}\gamma E_0\hat{z}$$

$$\vec{F}=q\left(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}\right)=\gamma qE_0\left(-\hat{y}+\frac{v^2}{c^2}\hat{x}\times\hat{z}\right)=-\gamma qE_0\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)\hat{y}$$

参考系 Σ' 相对于 Σ 中沿着 x 轴正方向以速度 v 运动；

$$\vec{E}'=\gamma\left(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}\right)=-\gamma^2E_0\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)\hat{y},\quad \vec{B}'=\gamma\left(\vec{B}-\frac{1}{c^2}\vec{v}\times\vec{E}\right)=\frac{2v}{c^2}\gamma^2E_0\hat{z}$$

$$\vec{F}=q\vec{E}'=-\gamma^2qE_0\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)\hat{y}$$

4. **解：**(1) 由于没有自由电荷，因而

$$\nabla\cdot\vec{D}=\nabla\cdot\left(\varepsilon\vec{E}\right)=\vec{E}\cdot\nabla\varepsilon+\varepsilon\nabla\cdot\vec{E}=0 \qquad (4.1)$$

介电常数只依赖于 r，所以 $\nabla\varepsilon=\frac{d\varepsilon}{dr}\hat{r}$，将该式以及 $\vec{E}=-\nabla\varphi$ 代入上式得到

$$0=\nabla\varphi\cdot\hat{r}\frac{d\varepsilon}{dr}+\varepsilon\nabla^2\varphi \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{1}{\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{dr}+\nabla^2\varphi=0$$

因而有

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{d\ln\varepsilon}{dr}+\nabla^2\varphi=0 \qquad (4.2)$$

(2) 由于外场沿着 z 轴方向，该问题具有绕着 z 轴的转动对称性，这意味着 $\partial\varphi/\partial\phi=0$，即 $\varphi=\varphi(r,\theta)$。而 Legendre 多项式 $P_n(\cos\theta)$ 构成了极角 $\theta\in[0,\pi]$ 函数的完备集，故对任一特定的 r，$\varphi(r,\theta)$ 可以展开为 Legendre 多项式的级数，系数一般为 r 的函数，所以 φ 可以表示为

$$\varphi(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(r)P_n(\cos\theta) \qquad (4.3)$$

注：如果即依赖于 r，也依赖于 θ，那么完备性仍成立，φ 仍可以表示上面的形式。不过 $\varphi_n(r)$ 满足的方程相互耦合，求解变得非常困难。

(3) 当 $r<R$ 时有 $\frac{d\ln\varepsilon}{dr}=-\frac{2}{r}$。将(4.3)代入方程(4.2)并利用提示得到

$$\begin{aligned}\nabla^2\varphi+\frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{d\ln\varepsilon}{dr}&=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\varphi_n}{dr}\right)-\frac{2}{r}\frac{d\varphi_n}{dr}-\frac{n(n+1)}{r^2}\varphi_n\right]P_n\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{d^2\varphi_n}{dr^2}-\frac{n(n+1)}{r^2}\varphi_n\right]P_n=0\end{aligned}$$

为使得该方程对于所有的 $r<R$ 和 θ 都成立，括号中的系数必须恒等于零。因而

$$\frac{d^2\varphi_n}{dr^2}-\frac{n(n+1)}{r^2}\varphi_n=0$$

该方程一般解为 $$\varphi_n=A_nr^{n+1}+\frac{B_n}{r^n}$$

当 $r>R$ 时有 $\frac{d\ln\varepsilon}{dr}=0$，类似可得

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\varphi_n}{dr}\right)-\frac{n(n+1)}{r^2}\varphi_n=0$$

该方程一般解为 $$\varphi_n=C_nr^n+\frac{D_n}{r^{n+1}}$$

(4) 在区域 $r<R$ 内解有限意味着系数 $B_n=0$；而当 $r\to\infty$ 时 $\varphi\to -E_0r\cos\theta$ 意味着除 $C_1=-E_0$ 之外其余的 $C_n=0$。

电势在处连续意味着

$$\begin{cases}A_nR^{n+1}=\dfrac{D_n}{R^{n+1}} & \text{for } n\neq 1\\ A_1R^2=-E_0R+\dfrac{D_1}{R^2} & \text{for } n\neq 1\end{cases}$$

在 $r=R$ 处，由于 ε 连续，因而 φ 连续，由此得到

$$\begin{cases}(n+1)A_nR^n=-(n+1)\dfrac{D_n}{R^{n+2}} & \text{for } n\neq 1\\ 2A_1R=-E_0-2\dfrac{D_1}{R^3} & \text{for } n\neq 1\end{cases}$$

由以上两组边值关系得到当 $n\neq 1$ 时 $A_n=0=D_n$，以及

$$A_1=-\frac{3E_0}{4R},\quad D_1=\frac{E_0R^3}{4}\quad\left(\text{and}\ \ C_1=-E_0\right)$$

所以

$$\varphi(r,\theta)=\begin{cases}-\dfrac{3E_0r^2}{4R}\cos\theta & \text{for } r<R\\ E_0\cos\theta\left(\dfrac{R^3}{4r^2}-r\right) & \text{for } r>R\end{cases}$$

(5) 由于 $r>R$ 处的电势等于外场的电势 $\varphi_{\text{ext}}=-E_0r\cos\theta$ 加上介质球中极化电荷的贡献

$$\varphi_p(r,\theta)=\frac{E_0R^3}{4r^2}\cos\theta$$

如果令 $\vec{p}=\pi\varepsilon_0R^3E_0\hat{z}$，则极化电荷在球外贡献的电势就是电偶极子 $\vec{p}$ 的电势

$$\varphi_p(r,\theta)=\frac{\vec{p}\cdot\hat{r}}{4\pi\varepsilon_0r^2}$$

因而介质球的总电偶极矩为 $\vec{p}=\pi\varepsilon_0R^3E_0\hat{z}$。

或者由于介质球内无自由电荷，因而总电荷即为束缚电荷，其分布为

$$\rho'=-\varepsilon_0\nabla^2\varphi=-\varepsilon_0\left[\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\varphi_1}{dr}\right)-\frac{2}{r^2}\varphi_1\right]\cos\theta=\frac{3\varepsilon_0E_0}{R}\cos\theta$$

所以介质球的总电偶极矩为

$$\begin{aligned}\vec{p}&=\int_{r<R}\rho'\vec{r}dV=\hat{z}\int_{r<R}\rho' zdV=\hat{z}\int_{r<R}\rho' r\cos\theta dV\\&=\hat{z}\frac{3\varepsilon_0E_0}{R}\int_0^R r^3dr\int_0^\pi\cos^2\theta\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\phi\\&=\hat{z}\frac{3\varepsilon_0E_0}{R}\cdot\frac{R^4}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot 2\pi=\hat{z}\pi\varepsilon_0R^3E_0\end{aligned}$$