中 国 科 学 技 术 大 学

2013--2014 学年第二学期考试参考答案

一、简答题 (共 40 分)

1. $\begin{cases} \nabla\cdot\vec{E}=\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}, & \nabla\times\vec{E}=-\partial_t\vec{B} \\ \nabla\cdot\vec{B}=0, & \nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{j}+\mu_0\varepsilon_0\partial_t\vec{E} \end{cases}$

2. $c=3\times10^8\ \text{m/s}$

3. (a) 物理定律适用于所有的惯性系；(b) 无论光源和/或观测者是否运动，真空中的光速都是一个普适常数

4. 宇宙射线中 μ 子的衰变；原子弹；GPS 测量的运动时钟变慢

5. (a) 否 (b) 是

6. 均为 $\sim 1/r$

7. 推迟势表明电磁相互作用的传递需要一定的时间，不是超距作用。

8. 引入规范势的理论依据是磁荷密度为零的实验事实以及 Faraday 电磁感应定律，即 $\nabla\cdot\vec{B}=0$ 和 $\nabla\times\vec{E}=-\partial_t\vec{B}$。两组合格规范势之间的联系为

$$\varphi'=\varphi-\partial_t\psi,\quad \vec{A}'=\vec{A}+\nabla\psi$$

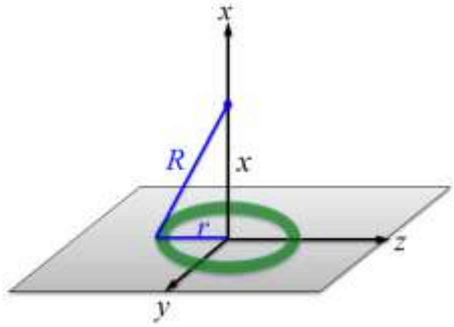
这里 ψ 是时空坐标的任意函数，称为规范函数。对于任一给定的合格规范势，总可以找到一种规范使得新的标量势等于零，但却未必能找到一种规范使得新的矢量势等于零。

9. 第一种情形：粒子 2 相对于粒子 1 的速度：$\vec{v}_{21}=-\dfrac{40}{41}c\hat{x}=-\vec{v}_{12}$

第二种情形：粒子 2 相对于粒子 1 的速度：$\vec{v}_{21}=-0.8c\hat{x}-0.48c\hat{y}=-\vec{v}_{12}$

10. 在相对粒子静止的参考系中，电磁场即为静止点电荷所产生，因而是纯电场；而由于 $E^2-c^2B^2$ 是 Lorentz 变换下的不变量，因而不存在电磁场在其中表现为纯磁场惯性系。

二、推迟势（20 分）



解：1. 推迟矢量势为

$$\vec{A}(x,t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{K}(t_r)}{R}da=\frac{\mu_0\hat{z}}{4\pi}\int\frac{K\left(t-\sqrt{r^2+x^2}/c\right)}{\sqrt{r^2+x^2}}2\pi r dr$$

$$=\frac{\mu_0\hat{z}}{2}\int\frac{K\left(t-\sqrt{r^2+x^2}/c\right)}{\sqrt{r^2+x^2}}rdr$$

由于 $t<0$ 时有 $K(t)=0$，因而 r 的最大值由下式确定

$$t_r=t-\sqrt{r^2+x^2}/c=0\quad\Rightarrow\quad r_{\max}=\sqrt{(ct)^2-x^2}$$

情形 1: $\vec{A}(x,t)=\frac{\mu_0K_0\hat{z}}{2}\int_0^{r_{\max}}\frac{r}{\sqrt{r^2+x^2}}dr=\frac{\mu_0K_0\hat{z}}{2}\sqrt{r^2+x^2}\Big|_0^{r_{\max}}=\frac{\mu_0K_0(ct-x)}{2}\hat{z}$

$$\vec{E}(x,t)=-\partial_t\vec{A}=\begin{cases}-\frac{\mu_0cK_0}{2}\hat{z} & \text{if } ct>x\\ 0 & \text{if } ct<x\end{cases}\quad\text{and}\quad\vec{B}(x,t)=\nabla\times\vec{A}=-(\partial_xA_z)\hat{y}=\begin{cases}\frac{\mu_0K_0}{2}\hat{z} & \text{if } ct>x\\ 0 & \text{if } ct<x\end{cases}$$

情形 2:

$$\vec{A}(x,t)=\frac{\mu_0\alpha\hat{z}}{2}\int_0^{r_{\max}}\frac{t-\sqrt{r^2+x^2}/c}{\sqrt{r^2+x^2}}rdr=\frac{\mu_0\alpha\hat{z}}{2}\left[t\int_0^{r_{\max}}\frac{r}{\sqrt{r^2+x^2}}dr-\frac{1}{c}\int_0^{r_{\max}}rdr\right]=\frac{\mu_0\alpha(ct-x)^2}{4c}\hat{z}$$

$$\vec{E}(x,t)=-\partial_t\vec{A}=\begin{cases}\frac{1}{2}\mu_0\alpha(x-ct)\hat{z} & \text{if } ct>x\\ 0 & \text{if } ct<x\end{cases}\quad\text{and}\quad\vec{B}(x,t)=-(\partial_xA_z)\hat{y}=\begin{cases}-\frac{\mu_0\alpha(x-ct)}{2c}\hat{z} & \text{if } ct>x\\ 0 & \text{if } ct<x\end{cases}$$

2. 令 $u=\frac{1}{c}\left(\sqrt{r^2+x^2}-x\right)$，因而有

$$du=\frac{rdr}{c\sqrt{r^2+x^2}}\quad\text{and}\quad t-\frac{\sqrt{r^2+x^2}}{c}=t-\frac{x}{c}-u$$

又由于 $u(r\to 0)=0$ and $u(r\to\infty)=\infty$，所以 $\vec{A}(x,t)=\frac{\mu_0c\hat{z}}{2}\int_0^{\infty}K\left(t-\frac{x}{c}-u\right)du$

$$\vec{E}(x,t)=-\partial_t\vec{A}=-\frac{\mu_0c\hat{z}}{2}\int_0^{\infty}\partial_tK\left(t-\frac{x}{c}-u\right)du=+\frac{\mu_0c\hat{z}}{2}\int_0^{\infty}\partial_uK\left(t-\frac{x}{c}-u\right)du$$

$$=\frac{\mu_0c\hat{z}}{2}\left[K\left(t-\frac{x}{c}-u\right)\right]_0^{\infty}=-\frac{\mu_0c\hat{z}}{2}K\left(t-\frac{x}{c}\right)$$

$$\vec{B}(x,t)=\nabla\times\vec{A}=-(\partial_x A_z)\hat{y}=-\frac{\mu_0 c\hat{y}}{2}\int_0^\infty \partial_x K\left(t-\frac{x}{c}-u\right)du$$

$$=-\frac{\mu_0\hat{y}}{2}\int_0^\infty \partial_u K\left(t-\frac{x}{c}-u\right)du=-\frac{\mu_0\hat{y}}{2}\left[K\left(t-\frac{x}{c}-u\right)\right]_0^\infty$$

$$=+\frac{\mu_0\hat{y}}{2}K\left(t-\frac{x}{c}\right)$$

3. Poynting 矢量

$$\vec{S}(x,t)=\frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}=\frac{\mu_0 c}{4}\left[K\left(t-\frac{x}{c}\right)\right]^2\hat{x}$$

这是 t 时刻到达 x 处的单位面积的功率，这部分能量在$(t-r/c)$时刻离开载流表面。由于在相反一侧$(-x)$有同样大小的向下的辐射，因而在 t 时刻离开表面的总功率为$\frac{\mu_0 c}{2}\left[K(t)\right]^2$。

三、辐射（20 分）

解： 1. t 时刻点电荷的电荷体密度是 $\rho(\vec{r},t)=q\delta(x-a\cos\omega t)\delta(y-a\sin\omega t)\delta(z)$

2. 相应的电偶极矩矢量是： $\vec{p}=\int\rho(\vec{r},t)\vec{r}dV=\int\rho(\vec{r},t)(x\hat{x}+y\hat{y}+z\hat{z})dV=qa(\hat{x}\cos\omega t+\hat{y}\sin\omega t)$

此电偶极矩可以写为复数形式： $\vec{p}=qa(\hat{x}+i\hat{y})e^{-i\omega t}$

按照本题提示知： $\hat{x}+i\hat{y}=(\hat{r}\sin\theta+\hat{\theta}\cos\theta+i\hat{\phi})e^{i\phi}$

所以， $\vec{p}=qae^{i(\phi-\omega t)}(\hat{r}\sin\theta+\hat{\theta}\cos\theta+i\hat{\phi})\quad\Rightarrow\quad\ddot{\vec{p}}=-\omega^2 qae^{i(\phi-\omega t)}(\hat{r}\sin\theta+\hat{\theta}\cos\theta+i\hat{\phi})$

3. 此电偶极的辐射场是：

$$\vec{B}=\frac{\mu_0 e^{ikr}}{4\pi cr}\ddot{\vec{p}}\times\hat{r}=\frac{\mu_0\omega^2 qa}{4\pi cr}(\hat{\phi}\cos\theta-i\hat{\theta})e^{i(kr-\omega t+\phi)}$$

$$\vec{E}=c\vec{B}\times\hat{r}=\frac{\mu_0\omega^2 qa}{4\pi r}(\hat{\theta}\cos\theta+i\hat{\phi})e^{i(kr-\omega t+\phi)}$$

4. 平均能流密度矢量是： $\vec{S}=\frac{1}{2\mu_0}\mathrm{Re}(\vec{E}^*\times\vec{B})=\frac{\mu_0\omega^4 q^2 a^2}{32\pi^2 r^2}(1+\cos^2\theta)\hat{r}$

相应的辐射功率为：

$$P=\oint\vec{S}\cdot d\vec{\sigma}=\frac{\mu_0\omega^4 q^2 a^2}{32\pi^2}\int_0^\pi(1+\cos^2\theta)\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\phi=\frac{\mu_0\omega^4 q^2 a^2}{6\pi}$$

四、电磁场变换（20 分）

解：

1. 设 $k=\omega/c$ ，

$$\vec{E}(x,y,z,t)=E_0\cos(kx-\omega t+\delta)\hat{y} \quad \text{and} \quad \vec{B}(x,y,z,t)=\frac{E_0}{c}\cos(kx-\omega t+\delta)\hat{z}$$

2. 利用场的变换规律

$$E_x'=E_x=0,\ E_y'=\gamma(E_y-vB_z)=\gamma\left(1-\frac{v}{c}\right)E_0\cos(kx-\omega t+\delta),\ E_z'=\gamma(E_z+vB_y)=0$$

$$B_x'=B_x=0,\ B_y'=\gamma\left(B_y+\frac{v}{c^2}E_z\right)=0,\ B_z'=\gamma\left(B_z-\frac{v}{c^2}E_y\right)=\frac{1}{c}\gamma\left(1-\frac{v}{c}\right)E_0\cos(kx-\omega t+\delta)$$

令

$\alpha=\gamma\left(1-\frac{v}{c}\right)=\sqrt{\frac{1-v/c}{1+v/c}}$，则有

$$E_x'=E_z'=0,\quad E_y'=\alpha E_0\cos(kx-\omega t+\delta)$$
$$B_x'=B_y'=0,\quad B_z'=\alpha\frac{E_0}{c}\cos(kx-\omega t+\delta)$$

利用 Lorentz 变换之反变换，

$$t=\gamma(t'+vx'/c^2),\quad x=\gamma(x'+vt'),\quad y=y',\quad z=z'$$

有

$$kx-\omega t+\delta=\gamma\left[\left(k-\frac{\omega v}{c^2}\right)x'-(\omega-kv)t'\right]+\delta=k'x'-\omega' t'+\delta$$

其中

$$k'=\gamma\left(k-\frac{\omega v}{c^2}\right)=\gamma\left(1-\frac{v}{c}\right)k=\alpha k \quad \text{and} \quad \omega'=\gamma(\omega-kv)=\gamma\left(1-\frac{v}{c}\right)\omega=\alpha\omega$$

因此 S' 中观测的电磁场为

$$\begin{cases}\vec{E}'=E_0'\cos(k'x'-\omega't'+\delta)\hat{y}\\ \vec{B}'=\dfrac{E_0'}{c}\cos(k'x'-\omega't'+\delta)\hat{z}\end{cases} \quad \text{where } E_0'=\alpha E_0,\ k'=\alpha k,\ \omega'=\alpha\omega \text{ and } \alpha=\sqrt{\frac{1-v/c}{1+v/c}}$$

3. S' 中的角频率： $\omega'=\sqrt{\frac{1-v/c}{1+v/c}}\omega$ 此乃电磁波的 Doppler 效应

S' 中的波长：$\lambda'=\dfrac{2\pi}{k'}=\dfrac{2\pi}{\alpha k}=\sqrt{\dfrac{1+v/c}{1-v/c}}\lambda$

S' 中的传播速度：$c'=\dfrac{\omega'\lambda'}{2\pi}=\dfrac{\omega\lambda}{2\pi}=c$，与预期一致(在任一惯性系中光的传播速度都等于 c)。

4. 由于强度与电场强度振幅的平方成正比，故有

$$\frac{I'}{I}=\frac{E_0'^2}{E_0^2}=\alpha^2=\frac{1-v/c}{1+v/c}$$

当 v 趋近于光速 c 时，电磁波在 S' 中的角频率、波长以及强度都将趋于零，而传播速度仍为 c。