中 国 科 学 技 术 大 学

2015—2016 学年第二学期《电动力学》期末考试参考答案

第一题 **解答** 球坐标系(以 $\vec{E}_0$ 方向为 z 轴)下静电势一般解为

$$\varphi=\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n r^n+\frac{b_n}{r^{n+1}}\right)P_n(\cos\theta)$$

考虑到问题的对称性以及球内电势(设为 φ_1)有限，而球外电势(设为 φ_2)在远处主要贡献为 $-\vec{E}_0\cdot\vec{r}=-E_0 r\cos\theta$，不妨设

$$\varphi_1=a_1 r\cos\theta \quad \text{and} \quad \varphi_2=\frac{c_0}{r}+\left(b_1 r+\frac{c_1}{r^2}\right)\cos\theta$$

由渐近条件不难得到

$$b_1=-E_0$$

而由 $r=a$ 处的边值关系

$$\varphi_2=\varphi_1 \quad\Rightarrow\quad \frac{c_0}{a}+\left(b_1 a+\frac{c_1}{a^2}\right)\cos\theta=a_1 a\cos\theta$$

$$\varepsilon\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}=\varepsilon_0\frac{\partial\varphi_1}{\partial r} \quad\Rightarrow\quad -\varepsilon\frac{c_0}{a^2}+\varepsilon\left(b_1-\frac{2c_1}{a^3}\right)\cos\theta=\varepsilon_0 a_1\cos\theta$$

此二式对于任意 θ 成立，因而有 $c_0=0$ 以及

$$\begin{cases} b_1+\dfrac{c_1}{a^3}=a_1 \\ b_1-\dfrac{2c_1}{a^3}=\dfrac{\varepsilon_0}{\varepsilon}a_1 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} a_1=\dfrac{3\varepsilon}{2\varepsilon+\varepsilon_0}b_1=-\dfrac{3\varepsilon}{2\varepsilon+\varepsilon_0}E_0 \\ c_1=\dfrac{\varepsilon-\varepsilon_0}{2\varepsilon+\varepsilon_0}a^3 b_1=-\dfrac{\varepsilon-\varepsilon_0}{2\varepsilon+\varepsilon_0}a^3 E_0 \end{cases}$$

因而有

$$\text{球内}(r<a) \quad : \quad \varphi_1=-\frac{3\varepsilon}{2\varepsilon+\varepsilon_0}E_0 r\cos\theta=-\frac{3\varepsilon}{2\varepsilon+\varepsilon_0}\vec{E}_0\cdot\vec{r}$$

$$\text{球外}(r>a) \quad : \quad \varphi_2=-\left(r+\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{2\varepsilon+\varepsilon_0}\frac{a^3}{r^2}\right)E_0\cos\theta=-\vec{E}_0\cdot\vec{r}-\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{2\varepsilon+\varepsilon_0}\frac{a^3}{r^3}\vec{E}_0\cdot\vec{r}$$

第二题 解答 (1) 如图取坐标系(z 轴垂直于纸面向外)，由电场 Gauss 定理以及磁场的 Ampere 环路定理不难得到

$$\vec{E}=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{y} \quad \text{and} \quad \vec{B}=\mu_0\alpha\hat{z}$$

由于可以找到一个参考系，其中只有电场而没有磁场，这意味着该电磁场是类电的，因而满足 $E>cB$

由此得到

$$\frac{\alpha}{\sigma}<\frac{1}{c\varepsilon_0\mu_0}=c$$

(2) 由于平行于运动方向的电磁场分量不变，因而在其中 $\vec{B}'=0$ 的参考系以沿着 xy 平面的某个方向运动，不妨设该参考系沿着 x 轴以速度 v 运动(如果在该参考系中 $\vec{B}'=0$，在相对于该参考系沿着 y 轴运动的其他参考系中磁场也为零)，由于

$$\vec{B}'_{\parallel}=\vec{B}_{\parallel}=0$$

而

$$\vec{B}'_{\perp}=\gamma\left(\vec{B}_{\perp}-\frac{\vec{v}\times\vec{E}}{c^2}\right)=\gamma\left(\mu_0\alpha-\frac{v\sigma}{\varepsilon_0 c^2}\right)\hat{z}$$

由 $\vec{B}'_{\perp}=0$ 得到

$$\mu_0\alpha-\frac{v\sigma}{\varepsilon_0 c^2}=0 \quad\Rightarrow\quad v=\frac{\mu_0\varepsilon_0\alpha c^2}{\sigma}=\frac{\alpha}{\sigma}>0$$

沿着 x 轴正向。

(3) 由于

$$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2/c^2\sigma^2}}=\frac{c\sigma}{\sqrt{c^2\sigma^2-\alpha^2}}$$

在该参考系中，电场为

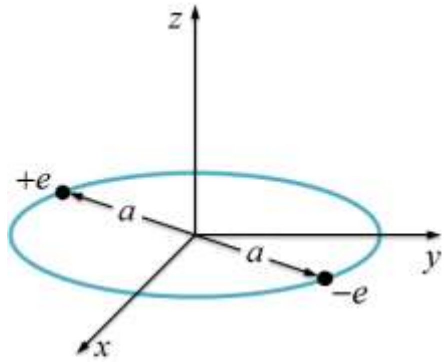
$$\vec{E}'_{\parallel}=\vec{E}_{\parallel}=0$$

$$\vec{E}'_{\perp}=\gamma\left(\vec{E}_{\perp}+\vec{v}\times\vec{B}\right)=\gamma\left(E-vB\right)\hat{y}=\gamma\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left(1-\frac{1}{c^2}\frac{\alpha^2}{\sigma^2}\right)\hat{y}=\frac{\sqrt{c^2\sigma^2-\alpha^2}}{c\varepsilon_0}\hat{y}$$

即

$$\vec{E}'=\sqrt{1-\frac{\alpha^2}{c^2\sigma^2}}\vec{E}$$

第三题 解答



(1) 在远处，由于 $r>>\bar{\lambda}=c/\omega>>a$，辐射主要来自电偶极辐射。

(2) 电偶极辐射的矢量势为

$$\vec{A}(\vec{r},t)=\frac{\mu_0}{4\pi r}\dot{\vec{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)=\frac{\mu_0}{4\pi r}\dot{\vec{p}}$$

电磁场为

$$\vec{B}=\frac{1}{c}\dot{\vec{A}}\times\hat{r}=\frac{\mu_0}{4\pi c}\frac{\ddot{\vec{p}}\times\hat{r}}{r}\quad \text{and}\quad \vec{E}=c\vec{B}\times\hat{r}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\left(\ddot{\vec{p}}\times\hat{r}\right)\times\hat{r}}{r}$$

平均能流密度为

$$\left\langle\vec{S}\right\rangle=\frac{1}{\mu_0}\left\langle\vec{E}\times\vec{B}\right\rangle=\frac{\mu_0\hat{r}}{16\pi^2cr^2}\left\langle\left(\ddot{\vec{p}}\times\hat{r}\right)^2\right\rangle$$

由于

$$\vec{p}(t)=p_0\left(\cos\omega t,\sin\omega t,0\right)\quad \text{where } p_0=2ea$$

所以

$$\left(\ddot{\vec{p}}\times\hat{r}\right)^2=\ddot{\vec{p}}^2-\left(\ddot{\vec{p}}\cdot\hat{r}\right)^2=\omega^4p^2-\omega^4\left[\left(\ddot{\vec{p}}\cdot\hat{r}\right)^2\right]$$

因而

$$\left\langle\left(\ddot{\vec{p}}\cdot\hat{r}\right)^2\right\rangle=\omega^4p_0^2\left\langle\begin{matrix}\cos^2\omega t\sin^2\theta\cos^2\varphi+\sin^2\omega t\sin^2\theta\sin^2\varphi\\+2\sin\omega t\cos\omega t\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi\end{matrix}\right\rangle=\frac{1}{2}\omega^4p_0^2\sin^2\theta$$

所以

$$\left\langle\vec{S}\right\rangle=\frac{\mu_0\omega^4p_0^2\hat{r}}{32\pi^2cr^2}\left(1+\cos^2\theta\right)$$

辐射功率角分布为

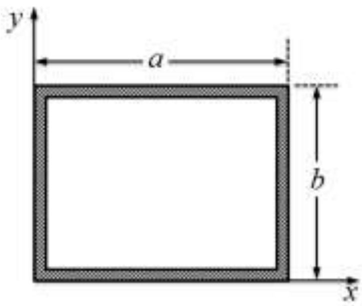
$$\frac{dP}{d\Omega}=\left|\left\langle\vec{S}\right\rangle\right|r^2=\frac{\mu_0\omega^4p_0^2}{32\pi^2c}\left(1+\cos^2\theta\right)=\frac{\mu_0e^2a^2\omega^4}{8\pi^2c}\left(1+\cos^2\theta\right)$$

(3) 总的辐射功率为

$$P=\int\frac{dP}{d\Omega}d\Omega=\frac{\mu_0e^2a^2\omega^4}{8\pi^2c}\times2\pi\times\int_0^\pi\left(1+\cos^2\theta\right)\sin\theta d\theta=\frac{2\mu_0e^2a^2\omega^4}{3\pi c}$$

(4) 如果在 $z=-b$ 处放一无限大的理想导体平板，由于每一电荷都有一个等量异号的像电荷，因而系统总的电偶极矩为零，而且总的磁偶极矩也为零，所以第一个非零的多极矩是电四极矩。

第四题 解答



(1) 由于电磁场分量都具有 $u = u_0(x,y)e^{i(kz-\omega t)}$ 的形式，因而将其代入 Maxwell 方程

$$\nabla\times\vec{E} = -\partial_t\vec{B} \quad \text{and} \quad \nabla\times\vec{B} = \frac{1}{c^2}\partial_t\vec{E}$$

$$\nabla\times\vec{E} = +i\omega\vec{B} \quad \text{and} \quad \nabla\times\vec{B} = -i\frac{\omega}{c^2}\vec{E}$$

即

$$\begin{cases} \partial_y E_z - \partial_z E_y = i\omega B_x & (\mathrm{Ia}) \\ \partial_z E_x - \partial_x E_z = i\omega B_y & (\mathrm{Ib}) \\ \partial_x E_y - \partial_y E_x = i\omega B_z & (\mathrm{Ic}) \end{cases} \quad \text{and} \quad \begin{cases} \partial_y B_z - \partial_z B_y = -i\,\omega E_x/c^2 & (\mathrm{IIa}) \\ \partial_z B_x - \partial_x B_z = -i\,\omega E_y/c^2 & (\mathrm{IIb}) \\ \partial_x B_y - \partial_y B_x = -i\,\omega E_z/c^2 & (\mathrm{IIc}) \end{cases}$$

或者

$$\begin{cases} \partial_y E_z - ikE_y = i\omega B_x & (\mathrm{Ia}) \\ ikE_x - \partial_x E_z = i\omega B_y & (\mathrm{Ib}) \\ \partial_x E_y - \partial_y E_x = 0 & (\mathrm{Ic}) \end{cases} \quad \text{and} \quad \begin{cases} B_y = \omega E_x/kc^2 & (\mathrm{IIa}) \\ B_x = -\omega E_y/kc^2 & (\mathrm{IIb}) \\ \partial_x B_y - \partial_y B_x = -i\,\omega E_z/c^2 & (\mathrm{IIc}) \end{cases}$$

由(Ia)和(IIb)可得 (E_y, B_x)，由(IIb)和(IIa)可得 (E_x, B_y)，结果如下

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{ik}{\gamma^2}\frac{\partial E_z}{\partial x}, \quad & E_y &= \frac{ik}{\gamma^2}\frac{\partial E_z}{\partial y}, \\ B_x &= -\frac{i\omega}{c^2\gamma^2}\frac{\partial E_z}{\partial y}, \quad & B_y &= \frac{i\omega}{c^2\gamma^2}\frac{\partial E_z}{\partial x} \end{aligned} \qquad \text{where } \gamma^2 \equiv \frac{\omega^2}{c^2} - k^2$$

(2)由 E_z 满足的波动方程

$$\nabla^2 E_z = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} \quad \Rightarrow \quad \nabla^2 E_z = -\frac{\omega^2}{c^2}E_z \quad \Rightarrow \quad \left(\partial_x^2 + \partial_y^2\right)E_z + \gamma^2 E_z = 0$$

由于电场切向分量等于零给出其解为

$$E_z = E_0 \sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}$$

这里 n、m 为整数。因而

$$\gamma^2 = \pi^2\left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right)$$

角频率

$$\omega = c\sqrt{k^2 + \gamma^2} = c\sqrt{k^2 + \pi^2\left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right)}$$

(3)截止频率对应于 $k = 0$，因而有

$$\omega_c = c\pi\sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}} \quad \text{of} \quad f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{c}{2}\sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}}$$

对于 TM 模，n、m 全不为零，否则 $E_z = 0$，从而电磁场为零。所以最低截止频率

$$f_{c11}=\frac{c}{2}\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}=\frac{1}{2}\times3\times10^{10}\times\sqrt{\frac{1}{8^2}+\frac{1}{6^2}}=\frac{25}{8}\times10^9\approx3.1\times10^9\ \text{Hz}<4\times10^9\ \text{Hz}$$

因而频率为 $f=4\times10^9$ Hz 的电磁波在波导管中能以 TM 模传输；

或者

$$f_c=\frac{\omega_c}{2\pi}=\frac{c}{2}\sqrt{\frac{n^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}}<f \quad\Rightarrow\quad \frac{n^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}<\left(\frac{4}{15}\right)^2$$

(4)由于

$$f_{c12}=\frac{c}{2}\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{2^2}{b^2}}>f_{c21}=\frac{c}{2}\sqrt{\frac{2^2}{a^2}+\frac{1}{b^2}}=\frac{5}{4}\sqrt{13}\times10^9\approx4.5\times10^9\ \text{Hz}>4.0\times10^9\ \text{Hz}$$

因而 $f=4\times10^9$ Hz 的电磁波在波导管中只能以 TM_{11} 模传输；色散关系为

$$\omega=c\sqrt{k^2+\pi^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)}$$

由此得到

$$k=\frac{\omega}{c}\sqrt{1-\frac{\pi^2c^2}{\omega^2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)}=\frac{\omega}{c}\sqrt{1-\frac{c^2}{4f^2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)}$$

相速度为

$$v_p=\frac{\omega}{k}=\frac{c}{\sqrt{1-\frac{c^2}{4f^2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)}}=\frac{32}{\sqrt{399}}c\approx1.6c$$

群速度为

$$v_g=\frac{d\omega}{dk}=\frac{ck}{\sqrt{k^2+\pi^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)}}=\frac{c^2k}{\omega}=\frac{c^2}{v_p}=\frac{\sqrt{399}}{32}c\approx\frac{5}{8}c=0.62c$$

相速度与群速度严格等于光速平方：$v_pv_g=c^2$。

(5) 波数用截止频率表示为

$$k=\frac{1}{c}\sqrt{\omega^2-\omega_{c11}^2}$$

当 $\omega<\omega_{c11}$ 时，波不能传输，对于 $\omega=\omega_{c11}/2$，有

$$k=\frac{1}{c}\sqrt{\left(\frac{\omega_{c11}}{2}\right)^2-\omega_{c11}^2}=i\frac{\sqrt{3}\omega_{c11}}{2c}$$

E_z 可以写为

$$E_z\propto E_0e^{ikz}=E_0e^{-\sqrt{3}\omega_{c11}z/2c}$$

功率

$$P\propto\left|E_z\right|^2\propto P_0e^{-\sqrt{3}\omega_{c11}z/c}$$

衰减长度 d 满足 $P(z=d)/P(0)=1/e$，因此

$$\frac{\sqrt{3}\omega_{c11}d}{c}=1\quad\Rightarrow\quad d=\frac{c}{\sqrt{3}\omega_{11}}=\frac{ab}{\sqrt{3}\pi\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{8\sqrt{3}}{5\pi}=0.88\ \text{cm}$$

第五题简答题 **解答** (1) 可以。为了满足相应规范，要求

$$\varphi' = \varphi - \partial_t \psi = \varphi_0 \quad \Rightarrow \quad \partial_t \psi = \varphi - \varphi_0$$

故只需取规范函数为 $\psi = \int (\varphi - \varphi_0) dt$ 即可。

(2) 不可以。如果可以满足相应规范，这意味着

$$\vec{A}_0 = \vec{A} + \nabla \psi \quad \Rightarrow \quad \nabla \times \vec{A} = \nabla \times \vec{A}_0$$

如果磁场 $\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \neq \nabla \times \vec{A}_0$，则无法找到相应的规范函数 ψ。

(3) 由于 $-(ct_B - ct_A)^2 + (x_B - x_A)^2 = -\left(4\sqrt{3} - 2\right)^2 + 2^2 = -16\left(3 - \sqrt{3}\right) < 0$,

因而,两事件是类时的,可以找到一个参考系使得二者同时发生,但是由于速度不能超过光速,故不存在使得二者同地发生的参考系。使得二者同时发生的参考系相对于 K 系的速度 v 满足

$$\beta = \frac{v}{c} = \tan\theta = \frac{x_B - x_A}{ct_B - ct_A} = \frac{1}{2\sqrt{3} - 1} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{c}{2\sqrt{3} - 1} = \frac{2\sqrt{3} + 1}{11} c$$

(3) 由于电流沿着径向分布，其大小仅依赖于到球心距离而与方位无关，由对称性知，空间各点无磁场，故尽管电荷加速度，但该系统不会发射出辐射。由对称性，电场沿着径向，由 Gauss 定理不难得到球内电场始终为零(球的半径在变化)，球外电场则等于位于中心的点电荷 Q 产生的电场， 因此电磁场能量就等于静态情形半径为 R 的均匀带电球面的静电场能量，有

$$W \propto \frac{1}{R(t)} \quad \Rightarrow \quad \frac{W_{\max}}{W_{\min}} = \frac{1/R_{\min}}{1/R_{\max}} = \frac{R_{\max}}{R_{\min}} = \frac{3R_0}{R_0} = 3$$