

# 《线性代数与解析几何》期中考试试题 (A)

一 (30 分)、已知点  $A(1, 2, 3)$ ,  $B(2, 1, 4)$ ,  $C(1, 3, 5)$ ,  $D(3, 2, 1)$ . 求

1.  $B, C$  所在直线  $L$  的方程和  $A, B, C$  所在平面  $\Pi$  的方程;
2.  $\triangle ABC$  的面积  $S$ 、 $\angle ABC$  和四面体  $ABCD$  的体积  $V$ ;
3.  $A$  到  $L$  的距离、 $D$  到  $\Pi$  的距离和直线  $AB$  与  $CD$  间的距离;
4. 过  $A, B, C, D$  的球面方程和过  $A, B, C$  的圆方程;
5. 直线  $AB$  绕  $CD$  旋转一周所得曲面的方程并指出曲面的类型.

二 (15 分)、设  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ,

矩阵  $X$  满足  $X(I - B^{-1}A)^T B^T = I$ , 求  $X$ .

三 (15 分)、设  $A, B$  分别是  $m \times n$  和  $n \times m$  矩阵, 若  $D_1 = \det(I_m - AB)$ ,

$D_2 = \det(I_n - BA)$ ,  $r_1 = r(I_m - AB)$  和  $r_2 = r(I_n - BA)$  已知. 求

1.  $\det \begin{pmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{pmatrix}$  和  $r \begin{pmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{pmatrix}$ ; 2.  $D_1$  与  $D_2$ ,  $r_1$  与  $r_2$ ,  $D_1$  与  $r_1$  以及  $D_2$  与  $r_2$  之关系.

四 (20 分)、当  $a, b$  分别取何值时, 线性方程组 
$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + 2x_3 = 1 \\ (b-1)x_2 + x_3 = 0 \\ ax_1 + bx_2 + (1-b)x_3 = 3-2b \end{cases}$$

有解, 并求出其所有解.

五 (20 分)、计算  $n$  阶行列式  $D_n = \det \begin{pmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ c & a & b & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & a & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c & a & b \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c & a \end{pmatrix}$ .

《线性代数与解析几何》期中考试试题 (B)

一 (30 分)、已知点  $A(1, 2, 3)$ ,  $B(2, 1, 4)$ ,  $C(1, 3, 5)$ ,  $D(3, 2, 1)$ . 求

1.  $C, D$  所在直线  $L$  的方程和  $B, C, D$  所在平面  $\Pi$  的方程;
2.  $\triangle BCD$  的面积  $S$ 、 $\angle BCD$  和四面体  $ABCD$  的体积  $V$ ;
3.  $B$  到  $L$  的距离、 $A$  到  $\Pi$  的距离和直线  $AD$  与  $BC$  间的距离;
4. 过  $A, B, C, D$  的球面方程和过  $B, C, D$  的圆方程;
5. 直线  $AD$  绕  $BC$  旋转一周所得曲面的方程并指出曲面的类型.

二 (15 分)、设  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,

矩阵  $X$  满足  $X(I - A^{-1}B)^T A^T = I$ , 求  $X$ .

三 (15 分)、设  $A, B$  分别是  $n \times m$  和  $m \times n$  矩阵, 若  $D_1 = \det(I_n - AB)$ ,

$D_2 = \det(I_m - BA)$ ,  $r_1 = r(I_n - AB)$  和  $r_2 = r(I_m - BA)$  已知. 求

1.  $\det \begin{pmatrix} I_n & A \\ B & I_m \end{pmatrix}$  和  $r \begin{pmatrix} I_n & A \\ B & I_m \end{pmatrix}$ ;
2.  $D_1$  与  $D_2$ ,  $r_1$  与  $r_2$ ,  $D_1$  与  $r_1$  以及  $D_2$  与  $r_2$  之关系.

四 (20 分)、当  $\lambda, \mu$  分别取何值时, 线性方程组 
$$\begin{cases} \lambda x + \mu y + 2z = 1 \\ (\mu - 1)y + z = 0 \\ \lambda x + \mu y + (1 - \mu)z = 3 - 2\mu \end{cases}$$

有解, 并求出其所有解.

五 (20 分)、计算  $n$  阶行列式  $D_n = \det \begin{pmatrix} b & c & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a & b \end{pmatrix}$ .