# 计算方法第 5 次编程作业报告

PB16020184

付湘睿

## 目录

# 1 收敛阶及收敛值的推导

## 1.1 Newton 迭代法

**递推公式：**

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{1}$$

可以令 $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$,则 $\varphi'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$,$\varphi''(x) = \frac{\left[f'(x)\right]^3 f''(x) + f(x)\left[f'(x)\right]^2 f'''(x) - 2f(x)f'(x)\left[f''(x)\right]^2}{[f'(x)]^4}$

设 $\alpha$ 为 $f(x)$ 的精确根，定义 $x_n = \alpha + e_n$，由定义知 $\alpha = \varphi(\alpha), \varphi'(\alpha) = 0$

### 1.1.1 情形 1

若 $\varphi''(\alpha) \neq 0$，通过 Taylor 展开，有

$$x_{n+1} - \alpha = \varphi(x_n) - \varphi(\alpha) = \varphi'(x_n)(x_n - \alpha) + \frac{(x_n - \alpha)^2}{2}\varphi''(\xi_n) = \frac{(x_n - \alpha)^2}{2}\varphi''(\xi_n)$$

因此有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^2} = \frac{|\varphi''(\alpha)|}{2}$$

### 1.1.2 情形 2

若 $\varphi''(\alpha) = 0,\ \varphi'''(\alpha) \neq 0$，通过 Taylor 展开，有

$$x_{n+1} - \alpha = \varphi(x_n) - \varphi(\alpha) = \varphi'(x_n)(x_n - \alpha) + \frac{(x_n - \alpha)^2}{2}\varphi''(\alpha) + \frac{(x_n - \alpha)^3}{6}\varphi'''(\xi_n)$$

因此有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^3} = \frac{|\varphi'''(\alpha)|}{6}$$

## 1.2 弦截法

**递推公式：**

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{x-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

记每次迭代的误差为 $e_n = x_n - \alpha$，其中 $\alpha$ 为 $f(x)$ 的精确根，则 $x_n = \alpha + e_n$，因此

$$e_{n+1} = e_n - f(\alpha + e_n)\frac{e_n - e_{n-1}}{f(\alpha + e_n) - f(\alpha + e_{n-1})} \tag{2}$$

### 1.2.1 情形 1[1]

设 $f'(\alpha) \neq 0,\ f''(\alpha) \neq 0$，将 $f(x_n)$ 在 $\alpha$ 处 Taylor 展开，有

$$f(\alpha + e_n) = f(\alpha) + e_n f'(\alpha) + \frac{f''(\xi_n)}{2}e_n^2 = e_n f'(\alpha)\left[1 + \frac{f''(\xi_n)}{2f'(\alpha)}e_n\right] \tag{3}$$

因此

$$f(\alpha+e_n)-f(\alpha+e_{n-1})=f'(\alpha)\left[(e_n-e_{n-1})+\frac{f''(\xi_n)e_n^2-f''(\xi_{n-1})e_{n-1}^2}{2f'(\alpha)}\right] \tag{4}$$

将(3),(4)代入(2)中，经过化简得

$$\frac{e_{n+1}}{e_ne_{n-1}}=\frac{e_nf''(\xi_n)-e_{n-1}f''(\xi_{n-1})}{2f'(\alpha)(e_n-e_{n-1})+f''(\xi_n)e_n^2-f''(\xi_{n-1})e_{n-1}^2}$$

因此

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{e_{n+1}}{e_ne_{n-1}}=\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)} \tag{5}$$

设 $p$ 为收敛阶，则有

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p}=C \tag{6}$$

联立(5),(6)可得

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{|e_n|^{p-1}}{|e_{n-1}|}=\frac{\left|\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}\right|}{C}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^{\frac{1}{p-1}}}=\frac{\left|\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}\right|^{\frac{1}{p-1}}}{C^{\frac{1}{p-1}}} \tag{7}$$

对比(6),(7)，得

$$\begin{cases}C=\dfrac{\left|\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}\right|^{\frac{1}{p-1}}}{C^{\frac{1}{p-1}}}\\ p=\frac{1}{p-1}\end{cases} \tag{8}$$

由于 $p>1$，因此解得 $C=\left|\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}\right|^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$，$p=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1.618$

### 1.2.2 情形 2

若 $f'(\alpha)\neq 0,\ f''(\alpha)=0,\ f'''(\alpha)\neq 0$，仿照情形 1 的方法，将(2)和 $f(\alpha+e_n)$ 的带 *lagrange* 余项的三阶 Taylor 展开公式联立并取极限可得到递推关系：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e_{n+1}}{e_ne_{n-1}(e_n+e_{n-1})}=\frac{f'''(\alpha)}{6f'(\alpha)}$$

若弦截法收敛，则 $p>1$，由收敛阶定义，设

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p}=C \tag{9}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e_{n+1}}{e_n}=0$$

因此该情形下的递推公式可以化为：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e_{n+1}}{e_n e_{n-1}^2}=\frac{f'''(\alpha)}{6f'(\alpha)} \tag{10}$$

将(9)与(10)联立，可得：

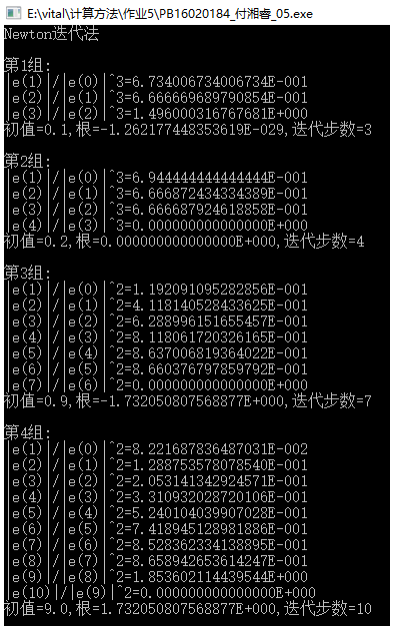
$$\begin{cases} C=\left(\frac{\left|\frac{f'''(\alpha)}{6f'(\alpha)}\right|}{C}\right)^{\frac{2}{p-1}} \\ p=\frac{2}{p-1} \end{cases} \tag{11}$$

注意到 $p>1$，可解得 $C=\left|\frac{f'''(\alpha)}{6f'(\alpha)}\right|^{\frac{2}{3}}$，$p=2$

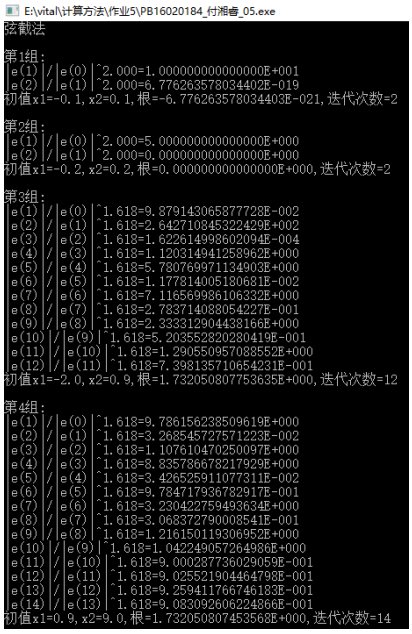
# 2 题目具体收敛阶分析及验证

函数形式为 $f(x)=\frac{x^3}{3}-x$，因此 $f'(x)=x^2-1$，$f''(x)=2x$，$f'''(x)=2$

## 2.1 结果




(a) Newton 迭代法




(b) 弦截法

图 1: 程序运行输出结果

## 2.2 Newton 迭代法

$\varphi(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}=\frac{2x^3}{3(x^2-1)},\varphi'(x)=\frac{2x^3(x^2-3)}{3(x^2-1)^2},\varphi''(x)=\frac{4x(x^2+3)}{3(x^2-1)^3},\varphi'''(x)=-\frac{4(x^4+6x^2+1)}{(x^2-1)^4}$

### 2.2.1 第一组 $x_0=0.1$

通过计算结果判断，最终 $x_n$ 收敛到 0，由于 $\varphi''(0)=0,\ \varphi'''(0)=-4\neq 0$，因此属于情形 2，理论收敛阶为 3，且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^3}=\frac{|\varphi'''(0)|}{6}=\frac{2}{3}\approx 0.666667$$

由图1(a)可知随着迭代步数增加，$\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^3}$ 越来越接近 $\frac{2}{3}$，当判断收敛时，$\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^3}$ 的值突然发生变化，经过分析认为这是由于收敛时 $e_n$ 过小，导致浮点计算误差和浮点数储存的精度限制因素变得不可忽略。因此程序运行结果验证了此时的收敛阶为 3

### 2.2.2 第二组 $x_0=0.2$

与 $x_0=0.1$ 的情况类似，最终 $x_n$ 收敛到 0，从图1(a)中的数据也能看出收敛阶确实为 3

### 2.2.3 第三组 $x_0=0.9$

通过计算结果判断，最终 $x_n$ 收敛到 $-\sqrt{3}$，由于 $\varphi''(-\sqrt{3})=-\sqrt{3}\neq 0$，因此属于情形 1，理论收敛阶为 2，且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^2}=\frac{|\varphi''(-\sqrt{3})|}{2}\approx 0.866025$$

由图1(a)可知随着迭代步数增加，$\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^2}$ 越来越接近 0.866025，当判断收敛时，$\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^3}$ 的值突然发生变化，经过分析认为这是由于收敛时 $e_n$ 过小，导致浮点计算误差和浮点数储存的精度限制因素变得不可忽略。因此程序运行结果验证了此时的收敛阶确实为 2

### 2.2.4 第四组 $x_0=9.0$

通过计算结果判断，最终 $x_n$ 收敛到 $\sqrt{3}$，由于 $\varphi''(\sqrt{3})=\sqrt{3}\neq 0$，因此属于情形 1，理论收敛阶为 2，且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^2}=\frac{|\varphi''(\sqrt{3})|}{2}\approx 0.866025$$

由图1(a)可知随着迭代步数增加，$\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^2}$ 越来越接近 0.866025，当判断收敛时，$\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^3}$ 的值突然发生变化，经过分析认为这是由于收敛时 $e_n$ 过小，导致浮点计算误差和浮点数储存的精度限制因素变得不可忽略。因此程序运行结果验证了此时的收敛阶确实为 2

## 2.3 弦截法

### 2.3.1 第一组 $x_0 = -0.1, x_1 = 0.1$

通过计算结果判断，最终 $x_n$ 收敛到 0，由于 $f'(0) = -1 \neq 0,\ f''(0) = 0,\ f'''(0) = 2 \neq 0$，因此属于情形 2，理论收敛阶为 2，且

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^2} = \left|\frac{f'''(0)}{6f'(0)}\right|^{\frac{2}{3}} \approx 0.480750$$

然而从1(b)中没有观察到此结果，分析为如下原因：一、收敛速度过快，仅两步即达到精度要求，导致收敛时计算的比值受浮点数精度影响较大；二、初始比值完全受初值影响，不能反映收敛情况。

### 2.3.2 第二组 $x_0 = -0.2, x_1 = 0.2$

通过计算结果判断，最终 $x_n$ 收敛到 0，该情况分析内容与 $x_0 = -0.1, x_1 = 0.1$ 的情况相同。

### 2.3.3 第三组 $x_0 = -2.0, x_1 = 0.9$

通过计算结果判断，最终 $x_n$ 收敛到 $\sqrt{3}$，由于 $f'(\sqrt{3}) = 2 \neq 0,\ f''(\sqrt{3}) = 2\sqrt{3} \neq 0$，因此属于情形 1，理论收敛阶为 $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$，且

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}} = \left|\frac{f''(\sqrt{3})}{2f'(\sqrt{3})}\right|^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \approx 0.914938$$

由图1(b)可知随着迭代步数增加，$\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}}$ 越来越接近 0.914938。因此程序运行结果验证了此时的收敛阶确实为 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

### 2.3.4 第四组 $x_0 = 0.9, x_1 = 9.0$

通过计算结果判断，最终 $x_n$ 收敛到 $\sqrt{3}$，由于 $f'(\sqrt{3}) = 2 \neq 0,\ f''(\sqrt{3}) = 2\sqrt{3} \neq 0$，因此属于情形 1，理论收敛阶为 $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$，且

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}} = \left|\frac{f''(\sqrt{3})}{2f'(\sqrt{3})}\right|^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \approx 0.914938$$

由图1(b)可知随着迭代步数增加，$\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}}$ 越来越接近 0.914938。因此程序运行结果验证了此时的收敛阶确实为 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

## 参考文献

[1] http://www.math.drexel.edu/~tolya/300_secant.pdf

# Appendices

## A 源代码

```c
#include<stdio.h>
#include<stdlib.h>
#include<math.h>
//定义最大迭代步数
#define MAXREPT 10000
//定义判断条件
#define epsilon 0.00000001
//Newton 迭代法求根
int NEWTON(double (*f)(double),double (*g)(double),double x,int flag){
    double x0=x,x1,alpha;
    int k,n;
    /* 分情况设置精确根及理论收敛阶，对于收敛的根为 0 的情况，收敛阶为 3，
    对于收敛的根为正负根 3 的情况，收敛阶为 2*/
    if(flag<=1){
        alpha=0;
        n=3;
    }
    else if(flag==2){
        n=2;
        alpha=-sqrt(3);
    }
    else{
        n=2;
        alpha=sqrt(3);
    }
    for(k=1;k<=MAXREPT;k++){
        x1=g(x0);
        //输出每一步的收敛阶验证情况
```

```
29          printf("|e(%d)|/|e(%d)|^%d=%.15E\n",\
30  k,k-1,n,fabs(x1-alpha)/pow(fabs(x0-alpha),n));
31          if(fabs(x1-x0)<epsilon){
32              printf(" 初值 =%.1lf, 根 =%.15E, 迭代步数 =%d\n\n",x,x1,k);
33              return 0;
34          }
35          x0=x1;
36      }
37      printf(" 在%.1lf 附近 f(x) 无根\n",x);
38      return 1;
39  }
40  //弦截法求根
41  int XJ(double (*f)(double),double X1,double X2,int flag){
42      double f1,f2,x1=X1,x2=X2,x,alpha,n;
43      f1=f(x1);
44      int k;
45      //分情况设置精确根及收敛阶
46      if(flag<=1){
47          alpha=0;
48          n=2;
49      }
50      else{
51          alpha=sqrt(3);
52          n=(1+sqrt(5))/2;
53      }
54      printf("|e(%d)|/|e(%d)|^%.3lf=%.15E\n",\
55  1,0,n,fabs(x2-alpha)/pow(fabs(x1-alpha),n));
56      for(k=2;k<=MAXREPT;k++){
57          f2=f(x2);
58          x=x2-f2*(x2-x1)/(f2-f1);
59          //输出每一步的收敛阶验证情况
60          printf("|e(%d)|/|e(%d)|^%.3lf=%.15E\n",\
61  k,k-1,n,fabs(x-alpha)/pow(fabs(x2-alpha),n));
62          if(fabs(x-x2)<epsilon || fabs( f(x) )<epsilon ){
63              printf(" 初值 x1=%.1lf,x2=%.1lf, 根 =%.15E, 迭代次数 =%d\n\n",\
64  X1,X2,x,k);
65              return 0;
66          }
```

```
67          //为下一次迭代准备数值
68          f1=f2;
69          x1=x2;
70          x2=x;
71      }
72      printf(" 在初始值 x1=%.1lf,x2=%.1lf 附近 f(x) 无根\n",X1,X2);
73      return 1;
74  }
75  //返回 f(x) 的值
76  double f(double x){
77      return (x*x*x/3-x);
78  }
79  //返回 g(x)=x-f(x)/f'(x) 的值
80  double g(double x){
81      return (x-(x*x*x/3-x)/(x*x-1));
82  }
83  int main(void){
84      //Newton 迭代法初始值储存在数组里
85      double x0[4]={0.1,0.2,0.9,9.0};
86      //定义函数指针
87      double (*F)(double);
88      double (*G)(double);
89      F=f;
90      G=g;
91      int i;
92      //分别输出 Newton 迭代法结果
93      printf("Newton 迭代法\n\n");
94      for(i=0;i<4;i++){
95          printf(" 第%d 组:\n",i+1);
96          NEWTON(F,G,x0[i],i);
97      }
98      //弦截法初始值储存在二维数组里
99      double X[4][2]={{-0.1,0.1},{-0.2,0.2},{-2.0,0.9},{0.9,9.0}};
100     //分别输出弦截法结果
101     printf(" 弦截法\n\n");
102     for(i=0;i<4;i++){
103         printf(" 第%d 组:\n",i+1);
104         XJ(F,X[i][0],X[i][1],i);
```

```
105     }
106     //暂停程序
107     system("pause");
108     return 0;
109 }
```