

代数结构第十二次习题答案

朱平

zhuping@mail.ustc.edu.cn

I. 定理6.7(4)

证明分两步进行:

1. 证明映射 $\tilde{f}: G_1/f^{-1}(H_2) \rightarrow f(G_1)$ 是双射;
2. 证明 $\tilde{f}[f^{-1}(H_2)g_1 * f^{-1}(H_2)g_2] = \tilde{f}[f^{-1}(H_2)g_1] * \tilde{f}[f^{-1}(H_2)g_2]$, 其中 $g_1, g_2 \in G_1$

注意点: 商群的定义, 很多同学把顺序搞错。

VI. 习题3

证明交换环:

$$a * b = g^{n_1} * g^{n_2} = g^{n_1+n_2} = g^{n_2+n_1} = b * a$$

II. 习题14

非零实数乘法群中:

- (1) 为同态映射, $\text{Ker } f_1 = \{\pm 1\}$
- (2) 不是同态映射;
- (3) 为同态映射, $\text{Ker } f_3 = \{\pm 1\}$
- (4) 为同态映射, $\text{Ker } f_4 = \{1\}$
- (5) 不是同态映射;
- (6) 不是同态映射.

注意点: (2) 错误较多

III. 习题16

证明 f 是同态映射, 并求 f(G) 和 $\text{Ker } f$

$$f(a * b) = (a * b)^k = a^k * b^k = f(a) * f(b)$$

$$f(G) = \{g^k | g \in G\}$$

$$\text{Ker } f = \{g | g \in G, g^k = e\}$$

IV. 习题19

证明 $G/H \cap K$ 为交换群

$$(H \cap K)_{g_1} * (H \cap K)_{g_2}$$

$$= (H \cap K)_{g_1} * g_2$$

$$= (h|h \in (H \cap K))_{g_1} * g_2$$

$$= (h|h \in (H))_{g_1} * g_2 \cap (h|h \in (K))_{g_1} * g_2$$

$$= H_{g_1} * g_2 \cap K_{g_1} * g_2$$

$$= (H_{g_1} * H_{g_2}) \cap (K_{g_1} * K_{g_2})$$

$$= (H_{g_2} * H_{g_1}) \cap (K_{g_2} * K_{g_1})$$

$$= H_{g_2} * g_1 \cap K_{g_2} * g_1$$

$$= (H \cap K)_{g_2} * g_1$$

$$= (H \cap K)_{g_2} * (H \cap K)_{g_1}$$

V. 习题2

可逆元:

- (1) 的可逆元为 $\{\pm 1\}$
- (2) 的可逆元为 $Q - \{0\}$
- (3) 的可逆元为 $\{[1], [3]\}$
- (4) 的可逆元为 $\{[1], [5]\}$

注意点: (3)(4) 错误较多, 对 Z_4, Z_6 的概念理解不清。