

HW1 参考答案

Ch1

4(3)

$|\mathcal{P}(A)| > 1$ 推出 $A \neq \emptyset$ 是否成立?

- 成立。反设 $A = \emptyset$, 则 $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, 故 $|\mathcal{P}(A)| = 1$, 矛盾。

注: 反证, 空集的幂集是只包含空集的集合, 元素个数为1

7(3)

用归纳法定义集合: 不以0打头的二进制偶整数, 它应该包括0, 110, 1010等

1. $0, 10 \in E$
2. 如果 $1x0 \in E$ 且 $a \in E$, 则将 a 插在 x 后, $1xa0 \in E$
3. 集合 E 只包含有限次使用1, 2所得到的元素

注:

1. 基础语句; 归纳语句; 终结语句。找到集合的基础元素再选用合适的方法进行归纳
2. 尽可能使用字符串的方式构造集合, 而不是借助这些数之间的代数关系。所以, 如果定义的过程中用到加法、乘法等运算是合适的, 有的同学就是不断+2进行归纳

Ch2

1

证明:

1. 若 $a|b, a > 0$, 则 $(a, b) = a$
2. $((a, b), b) = (a, b)$

1. 由于 $a|a$ 且 $a|b$, 故 $a|(a, b)$, 又 $(a, b)|a$, 结合 $a > 0, (a, b) > 0$, 知 $(a, b) = a$
2. 由1.中的结论即可得证

证明两数相等, 可以证明两数相互整除; 类似的证明集合相等, 可以证明两集合相互包含

2(1)

证明: 对所有 $n > 0$ 成立 $(n, n+1) = 1$

- 假设 $(n, n+1) = d$, 则 $d|n$ 且 $d|(n+1)$, 故 $d|[(n+1) - n] \Rightarrow d|1 \Rightarrow d = 1$

3(1)

求 x 和 y 使得: $314x + 159y = 1$

- 因为 $(314, 159) = 1$, 所以可以参照例2.1, 求解 x 和 y

$$314 = 159 * 1 + 155$$

$$159 = 155 * 1 + 4$$

$$155 = 4 * 38 + 3$$

$$4 = 3 * 1 + 1$$

$$3 = 1 * 3$$

反推回去

$$1 = 4 - 3 * 1 = 4 - (155 - 4 * 38)$$

$$= 4 * 39 - 155$$

$$= (159 - 155 * 1) * 39 - 155$$

$$= 159 * 39 - 155 * 40$$

$$= 159 * 39 - (314 - 159 * 1) * 40$$

$$= 159 * 79 - 314 * 40$$

$$\text{故 } x = -40, y = 79$$

注：对于形如 $ax+by=(a,b)$ 的不定方程都可以利用辗转相除法的逆过程求解

6

求2345和3456两个数的素数分解式

$$1. 2345 = 5 \times 7 \times 67$$

$$2. 3456 = 2^7 \times 3^3$$