量子物理第四章习题答案

1.
l 可以取到 $0, 1$ 。(A) 当 $l = 1$ 时， m 可以取到 $-1, 0, 1$ ；(B) 当 $l = 0$ 时， m 可以取到 0 。所以电子所有可能的状态为

$$(2,\ 1, -1), (2,\ 1,\ 0), (2,\ 1,\ 1), (2,\ 0,\ 0)\,.$$

2.
氢原子基态的波函数为

$$\psi_{1,0,0} = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{-\rho/a_0},$$

因此

$$\begin{aligned}\langle V \rangle &= \int_0^\infty V(\rho) \left|\psi_{1,0,0}\right|^2 4\pi\rho^2 d\rho \\ &= \int_0^\infty -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\rho}\frac{1}{\pi a_0^3} e^{-2\rho/a_0} 4\pi\rho^2 d\rho \\ &= -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a_0}\,.\end{aligned}$$

3.
因为 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1, g(p_1, p_2, p_3) = p_1$ 都是奇函数，所以

$$\left\langle X_1 \right\rangle = 0, \left\langle P_1 \right\rangle = 0.$$

因为氢原子基态的波函数是球对称的，所以

$$\left\langle X_1^2 \right\rangle = \frac{1}{3}\left\langle X^2 \right\rangle, \left\langle P_1^2 \right\rangle = \frac{1}{3}\left\langle P^2 \right\rangle,$$

而

$$\begin{aligned}\left\langle X^2 \right\rangle &= \int_0^\infty \rho^2 \left|\psi_{1,0,0}\right|^2 4\pi\rho^2 d\rho \\ &= \int_0^\infty \rho^2 \frac{1}{\pi a_0^3} e^{-2\rho/a_0} 4\pi\rho^2 d\rho \\ &= 3a_0^2,\end{aligned}$$

$$\text{grad}\ \psi_{1,0,0} = -\frac{1}{\sqrt{\pi a_0^5}} e^{-\rho/a_0}\hat{\rho},$$

$$
\begin{aligned}
\left\langle P^2 \right\rangle &= \hbar^2 \int_0^\infty \left| \text{grad } \psi_{1,0,0} \right|^2 4\pi\rho^2 d\rho \\
&= \hbar^2 \int_0^\infty \frac{1}{\pi a_0^5} e^{-2\rho/a_0} 4\pi\rho^2 d\rho \\
&= \left(\frac{\hbar^2}{a_0} \right)^2,
\end{aligned}
$$

因此

$$
\Delta X_1 = a_0, \Delta P_1 = \frac{\hbar}{\sqrt{3} a_0},
$$

$$
\Delta X_1 \Delta P_1 = \frac{\hbar}{\sqrt{3}} \ge \frac{\hbar}{2}.
$$

4.
基态能量为

$$
E = -E_0 = -\frac{\hbar^2}{2m a_0^2},
$$

电子势能为

$$
V = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\rho},
$$

当 $E - V < 0$ 时

$$
\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\rho} - \frac{\hbar^2}{2m a_0^2} < 0,
$$

$$
\rho > \frac{m e^2 a_0^2}{2\pi\epsilon_0\hbar^2} = 2a_0,
$$

几率为

$$
\begin{aligned}
\int_{2a_0}^\infty \left| \psi_{1,0,0} \right|^2 4\pi\rho^2 d\rho &= \int_{2a_0}^\infty \frac{1}{\pi a_0^3} e^{-2\rho/a_0} 4\pi\rho^2 d\rho \\
&= \frac{13}{e^4}.
\end{aligned}
$$

5.
根据选择定则 (讲义上是找不到的，所以这题超纲)，跃迁后的角量子数 $\tilde{l}$ 与跃迁前的角量子数 l 满足以下关系：

$$\Delta l = \tilde{l} - l = \pm 1,$$

所以 $\tilde{l}$ 的取值只能是 3 或 1 。

而跃迁后的主量子数 $\tilde{n}$ 必须小于跃迁前的主量子数 n (因为原子发射光子之后，能量降低)，所以 $\tilde{n}$ 的取值只能是 2, 1, 0 。

因为 $\tilde{l}$ 的取值只能是 $0, 1, \ldots, \tilde{n}-1$ ，所以 $\tilde{l}$ 不可能取到 3 ，只可能取到 1. 此时 $\tilde{n}$ 最小取值是 2, 因此 $\tilde{n}$ 只可能取到 2.

所以原子从 $n = 3$ 跃迁到 $n = 2$ ，释放光子能量为

$$-\frac{13.6}{3^2} - \left(-\frac{13.6}{2^2}\right) = 1.9 \text{ eV}.$$

6.
$\psi_{2,0,0}$ 对应的能量为

$$E_2 = -\frac{\hbar^2}{2ma_0^2}\frac{1}{2^2} = -\frac{\hbar^2}{8ma_0^2},$$

$\psi_{1,0,0}$ 对应的能量为

$$E_1 = -\frac{\hbar^2}{2ma_0^2}\frac{1}{1^2} = -\frac{\hbar^2}{2ma_0^2},$$

因此，波函数的动力学演化形式为

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_{2,0,0}e^{i\hbar t/8ma_0^2} - \psi_{1,0,0}e^{i\hbar t/2ma_0^2}\right),$$

而

$$\psi_{1,0,0} = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}}e^{-\rho/a_0},$$

$$\psi_{2,0,0} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi a_0^3}}\left(2 - \frac{\rho}{a_0}\right)e^{-2\rho/a_0},$$

因此

$$
\begin{aligned}
\langle r\rangle &= \int_0^\infty \rho \left|\Psi\right|^2 4\pi\rho^2 d\rho \\
&= \int_0^\infty 4\pi\rho^3 \frac{1}{2}\left(\psi_{2,0,0}e^{-i\hbar t/8ma_0^2} - \psi_{1,0,0}e^{-i\hbar t/2ma_0^2}\right)\left(\psi_{2,0,0}e^{i\hbar t/8ma_0^2} - \psi_{1,0,0}e^{i\hbar t/2ma_0^2}\right) d\rho \\
&= 2\pi\int_0^\infty \rho^3\left(\psi_{2,0,0}^2 + \psi_{1,0,0}^2 - 2\psi_{2,0,0}\psi_{1,0,0}\cos\frac{3\hbar t}{8ma_0^2}\right) d\rho \\
&= \left(\frac{6159}{8192} - \frac{2\sqrt{2}}{81}\cos\frac{3\hbar t}{8ma_0^2}\right) a,
\end{aligned}
$$

(你麻痹的)

7.

$$
\psi = \frac{\alpha^{5/2}}{\sqrt{\pi}}\rho\cos\phi\, e^{-\alpha\rho^2} = \cdots\cos\phi = \cdots Y_1^0(\phi,\theta),
$$

其中省略号与 ϕ,θ 无关。因此该粒子处在角动量的本征态上，对应 $l=1, m=0$ ，相应的本征值分别为 $2\hbar^2, 0$ 。

8.
因为

$$
\left[L_2, L_3\right] = i\hbar L_1,
$$

所以

$$
\begin{aligned}
\left\langle L_1\right\rangle &= \frac{1}{i\hbar}\int_{\mathbb{R}^3}\left(\psi^* L_2L_3\psi - \psi^* L_3L_2\psi\right) dx_1dx_2dx_3 \\
&= \frac{1}{i\hbar}\int_{\mathbb{R}^3}\left(\psi^* L_2\left(L_3\psi\right) - \left(L_3\psi\right)^* L_2\psi\right) dx_1dx_2dx_3 \\
&= \frac{1}{i\hbar}\int_{\mathbb{R}^3}\left(\psi^* L_2\left(m\hbar\psi\right) - \left(m\hbar\psi\right)^* L_2\psi\right) dx_1dx_2dx_3 \\
&= \frac{1}{i\hbar}\int_{\mathbb{R}^3}\left(m\hbar\psi^* L_2\psi - m\hbar\psi^* L_2\psi\right) dx_1dx_2dx_3 \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

同理可得 $\left\langle L_2\right\rangle = 0$ 。

9.
因为 $\left\langle L_1\right\rangle = \left\langle L_2\right\rangle = 0, \left\langle L_3\right\rangle = m\hbar$, 所以

$$
\left\langle L_{\phi,\theta}\right\rangle = \left\langle L_3\right\rangle\cos\phi + \left\langle L_1\right\rangle\sin\phi\cos\theta + \left\langle L_2\right\rangle\sin\phi\sin\theta = m\hbar\cos\phi\,.
$$

10.
角动量矢量大小为

$$\sqrt{l(l+1)}\hbar = 2\sqrt{3}\hbar,$$

因为 $l = 3$ ，所以 $m = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,$ 角动量在磁场上的分量为

$$m\hbar, \qquad m = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3.$$

11.

$$\begin{aligned}
\left[L_i, P^2\right] &= \left[L_i, P_j P_j\right] \\
&= \left[L_i, P_j\right] P_j + P_j \left[L_i, P_j\right] \\
&= 2i\hbar\epsilon_{ijk} P_k P_j,
\end{aligned}$$

只需证明 $\left[L_3, P^2\right] = 0$ 即可，别的下标原理类似。

$$\begin{aligned}
\left[L_3, P^2\right] &= 2i\hbar\left(\epsilon_{312} P_1 P_2 + \epsilon_{321} P_2 P_1\right) \\
&= 2i\hbar\left[P_1, P_2\right] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

12. 爬，老子不会