一、计算下列各小题：（每小题 6 分、共 48 分）

1．已知 $x(t)$ 波形如下图 1 所示，求其傅里叶变换的像函数。

答：$x(t)=u(t+0.5)+u(t+0.25)-u(t-0.25)-u(t-0.5)$

$F\{x(t)\}=\frac{1}{2}sa(\frac{\omega}{4})+sa(\frac{\omega}{2})$（6 分）

2. 已知 $x[n]$ 序列波形如图 2 所示，从-1 点开始延续到无穷大的有规律数列，写出其闭合解析表达式，并求其 Z 变换。

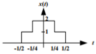


图 1

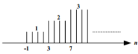


图 2

答：$x[n]=\sum_{k=0}^{\infty}u[n+1-4k]$　　（2 分）

$Z\{x[n]\}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{1-4k}}{1-z^{-1}}=\frac{z}{(1-z^{-1})(1-z^{-4})}$　　（3 分）

$|z|>1$　（1 分）

3. 因果连续时间信号 $x(t)$ 的拉普拉斯变换的像函数为 $X(s)=(2s-3)/(s^2+5s+6)$，试求信号 $x(t)$ 的初值 $\lim_{t\to 0^+}x(t)$ 和终值 $\lim_{t\to\infty}x(t)$。

答：$\lim_{t\to 0^+}x(t)=\lim_{s\to\infty}sx(s)=\frac{s(2s-3)}{s^2+5s+6}=2$　　（3 分）

$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sx(s) = \frac{s(2s-3)}{s^2+5s+6} = 0$　　(3 分)

4.计算一个有限长时间序列 $x[n] = e^{j\frac{2\pi}{N}n} + \sin(\frac{4\pi}{N}n)$，$0 \le n \le N-1$ 的 N 点 DFT

答：$x[n] = e^{j\frac{2\pi}{N}n} + \frac{j}{2}e^{-j\frac{4\pi}{N}n} - \frac{j}{2}e^{j\frac{4\pi}{N}n}$

$DFT\{x[n]\} = \sum_{k=0}^{N-1} x[n]e^{-j\frac{2k\pi}{N}n}$　　(2 分)

根据等比数列性质，显然在 k=1 时，其值为 N，(1 分)

k=2 时，其值为 $-\frac{j}{2}\times N = -\frac{N}{2}j$，(1 分)

k=N-2 时，其值为 $\frac{j}{2}\times N = \frac{N}{2}j$，(1 分)

其它所有 k 从 0…..N-1 上的值都是 0　(1 分)

5. 求 $\frac{e^s}{s(1+e^{-s})}$，$\mathrm{Re}\{s\} > 0$ 的拉普拉斯反变换。

答：$\frac{e^s}{s(1+e^{-s})} = \frac{e^s}{s}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(e)^{-ks} = \frac{1}{s}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(e)^{(1-k)s}$　　(2 分)

$L^{-1}\{\frac{1}{s}\} = u(t)$　　(2 分)

$L^{-1}\{X(s)\} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k u(t+1-k)$　　(2 分)

6.已知 $\boldsymbol{x(t)} = \begin{cases} 1/t, t \ne 0 \\ 0, t = 0 \end{cases}$，求 $\boldsymbol{y(t) = x(t) * x(t)}$，其中 * 表示卷积运算。

答：$F\{x(t)\} = -j\pi Sgn(\omega)$　　(2 分)

$Y(\omega) = -\pi^2$　　(2 分)

$y(t) = -\pi^2\delta(t)$　　(2 分)

7 已知 $\boldsymbol{y[n] + \frac{1}{6}y[n-1] - \frac{1}{3}y[n-2] = x[n] - \frac{1}{2}x[n-1] - 3x[n-2]}$ 表示的因果 LTI

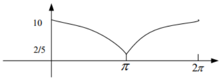
系统，请写出系统函数，概画出该系统的幅频响应。

答：$H(z)=\dfrac{1-\frac{1}{2}z^{-1}-3z^{-2}}{1+\frac{1}{6}z^{-1}-\frac{1}{3}z^{-2}}=\dfrac{(1-2z^{-1})(1+\frac{3}{2}z^{-1})}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1+\frac{2}{3}z^{-1})}$　　(2 分)

$$H(z)=\frac{(1-2z^{-1})(1+\frac{3}{2}z^{-1})}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1+\frac{2}{3}z^{-1})}$$

第一项是一个全通系统，具体用 z=1，也就是$\Omega=0$时带入，可得幅频响应为 2　　(1 分)

第二项是一个高通系统，在$\Omega=0$，可得幅频响应为 5，在$\Omega=\pi$，可得幅频响应为 1/5 (1 分);



画图（1 分），该题直接画出类似的图形都对，注意两个关键点，$\Omega=0$和$\Omega=\pi$，幅度值要标对，走势大体反应这种走势，其他都不要太关注。

8、如果*表示卷积，@表示相关，对于任意的满足模可积的两个函数$x(t)$，$y(t)$，证明

$[x(t)*y(t)]@[x(t)*y(t)]$与$[x(t)@x(t)]*[y(t)@y(t)]$相等

对左边求傅里叶变换，得：

$$\begin{aligned}F\{[x(t)*y(t)]@[x(t)*y(t)]\}&=F\{[x(t)*y(t)]\}\bullet F\{[x(t)*y(t)]\}^{*}\\&=X(\omega)Y(\omega)X^{*}(\omega)Y^{*}(\omega)\quad（3 分）\\&=|X(\omega)|^{2}|Y(\omega)|^{2}\end{aligned}$$

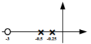
同理：

$F\{[x(t)@x(t)]*[y(t)@y(t)]\}=|X(\omega)|^2|Y(\omega)|^2$　　　(3 分)
由于傅里叶变化的一一对应的特性，
显然左边=右边
本题直接在时域做出来也可以。

二、由差分方程 $y[n]+0.75y[n-1]+0.125y[n-2]=x[n]+3x[n-1]$ 表示的因果系统。　　　　　　　（共 14 分）
(1) 求系统函数 $H(z)$，画出 $H(z)$ 在 z 平面上零极点分布和收敛域；（5 分）
(2) 已知其附加条件为 $y[0]=1, y[-1]=-6$，当输入 $x[n]=(0.5)^n u[n]$ 时，求系统的零状态响应 $y_{zs}[n]$ 和零输入响应 $y_{zi}[n]$。（10 分）

答：(1) $H(z)=\dfrac{1+3z^{-1}}{1+0.75z^{-1}+0.125z^{-2}}=\dfrac{1+3z^{-1}}{(1+0.5z^{-1})(1+0.25z^{-1})}$　　(2 分)

$|z|>0.5$　　(1 分)



(2 分)

(2) 对方程的两边分别取单边 Z 变换，并用单边 Z 变换的时移性质(见(7.2.27)和(7.2.28)式)，则有

$$Y_u(z)+\frac{3}{4}(Y_u(z)z^{-1}+y[-1])+\frac{1}{8}(Y_u(z)z^{-2}+y[-1]z^{-1}+y[-2])=X_u(z)+3X_u(z)z^{-1}$$ (2 分)

整理后得到

$$Y_u(z)=\frac{1+3z^{-1}}{1+\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}}X_u(z)-\frac{\frac{3}{4}y[-1]+\frac{1}{8}y[-2]+\frac{1}{8}y[-1]z^{-1}}{1+\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}}$$ (2 分)

上式的第二项需知道 $y[-1]$ 和 $y[-2]$，而本题已知的是 $y[0]$ 和 $y[-1]$，为求得 $y[-2]$，可以用 4.3.3 节介绍的前推方程求得，它为

$$y[-2]=8(x[0]+3x[-1]-y[0]-(3/4)y[-1])=36$$

现在用 $y[-1]=-6$，$y[-2]=36$，以及 $X_u(z)=Z_u\{x[n]\}=1/(1-(1/2)z^{-1})$ 代入(7.2.61)式，得到零状态响应和零输入响应的单边 Z 变换为

$$Y_{zs}(s)=\frac{1+3z^{-1}}{1+(3/4)z^{-1}+(1/8)z^{-2}}\cdot\frac{1}{1-(1/2)z^{-1}}=\frac{1+3z^{-1}}{[1+(1/2)z^{-1}][1+(1/4)z^{-1}][1-(1/2)z^{-1}]}\qquad(1\text{ 分})$$

和 $$Y_{zi}(s)=\frac{-(3/4)(-6)+(1/8)\cdot 36+(1/8)(-6)}{1+(3/4)z^{-1}+(1/8)z^{-2}}=\frac{(3/4)z^{-1}}{[1+(1/2)z^{-1}][1+(1/4)z^{-1}][1-(1/2)z^{-1}]}$$

(1 分)

分别对它们部分分式展开，得到

$$Y_{zs}(s)=\frac{7/3}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}-\frac{5}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{11/3}{1+\frac{1}{4}z^{-1}}\quad(1\text{ 分})\quad 和$$

$$Y_{zi}(s)=\frac{3}{1+\frac{1}{4}z^{-1}}-\frac{3}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}\qquad(1\text{ 分})$$

分别求单边拉氏反变换，得到零状态响应 $y_{zs}[n]$ 和零输入响应 $y_{zi}[n]$ 如下：

$y_{zs}[n]=\frac{7}{3}(\frac{1}{2})^n u[n]-5(-\frac{1}{2})^n u[n]+\frac{11}{3}(-\frac{1}{4})^n u[n]$ (1 分)和

$y_{zi}[n]=3(-\frac{1}{4})^n-3(-\frac{1}{2})^n$， $n\ge 0$ (1 分)

三、某 LTI 系统的系统结构如图 3 所示，其中 $H_2(s)=\dfrac{k}{s-1}$，子系统 $H_1(s)$ 满足条件：

当子系统 $H_1(s)$ 的输入是 $x_1(t)=2e^{-3t}u(t)$ 时，对应 $H_1(s)$ 的子系统输出为 $y_1(t)$；而在输入为 $x_2(t)=\dfrac{dx_1(t)}{dt}$ 时，对应 $H_1(s)$ 的子系统输出为 $-3y_1(t)+e^{2t}\ u($；求：（共 12 分）

(1)子系统 $H_1(s)$ 和对应的单位冲激响应函数 $h_1(t)$（5 分）

(2)整个系统的 $H(s)$（5 分）

(3)若要使系统 $H(s)$ 稳定，k 的取值范围（2 分）

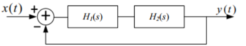


图 3.系统框图

答：(1) $H_1(s)\dfrac{2}{s+3}=Y_1(s)$ (1)

$$H_1(s)\frac{2s}{s+3} = -3Y_1(s) + \frac{1}{s+2} \qquad (2)$$

$$H_1(s) = \frac{1/3}{s+2} \qquad (3) \qquad (3 分)$$

$$h_1(t) = \frac{1}{3}e^{-2t}u(t) \qquad (2 分)$$

（2）

$$\tilde{H}(s) = H_1(s)H_2(s) = \frac{k/3}{(s+2)(s-1)}$$

$$[X(s)-Y(s)]\frac{k/3}{(s+2)(s-1)} = Y(s) \qquad (3 分)$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{k/3}{s^2+s-2+k/3} \qquad (2 分)$$

(3)要求所有极点都位于左半平面

$$-2+k/3>0$$

$$k>6 \qquad (2 分)$$

四、已知实的离散时间因果 LTI 系统的零、极点如图 5 所示，且它在输入为 $x[n]=\cos(\pi n)$ 时的输出为 $y[n]=(-1)^n$。{提示：在有限 z 平面上没有零点}　（共 15 分）

(1) 写出它的系统函数 $H(z)$ 和收敛域。(6 分)

(2) 写出系统的差分方程表示。(2 分)

(3) 对于差分方程描述的系统，用并联型和级联型结构实现结构，要求延时单元不多于 2 个。(4 分)

(4) 求其单位冲激响应。(3 分)

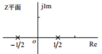


图 4

答：(1)

$$H(z) = H_0\frac{z^{-2}}{(1+0.5z^{-1})(1-0.5z^{-1})} \qquad (2 分)$$

$$|z|>0.5 \qquad (1 分)$$

$H_0\frac{(-1)^{-2}}{(1+0.5(-1)^{-1})(1-0.5(-1)^{-1})}=1$ （2 分）

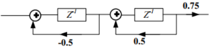
$H_0=3/4$

$H(z)=\frac{3}{4}\frac{z^{-2}}{(1+0.5z^{-1})(1-0.5z^{-1})}$ （1 分）

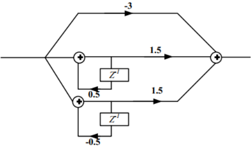
(2)

$y[n]-0.25y[n-2]=3/4x[n-2]$ （2 分）

(3)有多种组合可能，只要合理，都对



（2 分）



2 分

（4）

$h[n]=-3\delta[n]+1.5(\frac{1}{2})^n u[n]+1.5(-\frac{1}{2})^n u[n]$ （3 分）

五、对于如图 5 所示的相乘器，对信号 $f(t)$ 的傅里叶变换得到的像函数的形式是 $F(\omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{jk\pi\omega}$

$x(t)$ 是带限于 ω_M 的连续时间信号，求：（共 10 分）

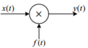


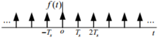
图5.

(1) 画出 $f(t)$ 的时域波形和频谱图。(5 分)
(2) 如果希望从 $y(t)$ 中无失真的恢复出 $x(t)$，ω_M 必须满足何种条件。(2 分)
(3) 在 ω_M 满足无失真恢复的条件下，请画出由 $y(t)$ 恢复出 $x(t)$ 的示意图。(3 分)

答：(1)
$F\{\delta(t+k\pi)\}=e^{jk\pi\omega}$

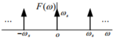
$f(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-k\pi)$ (2 分)

$f(t)$ 就是 $T_s=\pi$ 的冲激串，也就是 $\omega_s=2$



(1 分)

$F(\omega)=\omega_s\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\omega_s)$ (1 分)

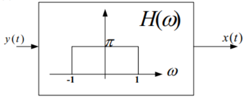


(1 分)

注：只要全部画图正确也给分，但是要标记出 $T_s=\pi$，$\omega_s=2$

(2)
$\omega_M\le 1$，只写小于也对 (2 分)

(3)



(3 分)