中国科学技术大学

一九九七年招收硕士学位研究生入学考试试题

试题名称：信号与系统

一． 已知用如下输入输出关系表示的两个线性时不变系统，一个

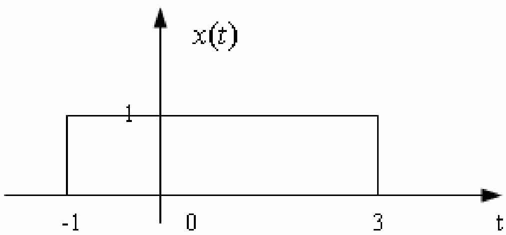
为 $y(t)=x(t)+6[e^{-t}\int_0^t x(\tau)e^{\tau}d\tau-2\int_0^{\infty}x(t-\tau)e^{-2\tau}d\tau]$ 表示的连续时间 LTI 系统；

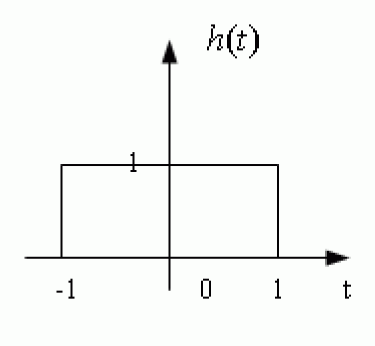
另一个为 $y[n]=x[n]-2x[n-1]+x[n-2]$ 表示的离散时间 LTI 系统。

1. 试分别求出它们的：
   a) 单位冲击响应 $h(t)$ 和 $h[n]$；
   b) 系统函数 $H(s)$ 和 $H(z)$，并画出各自的收敛域和零、极点图；
   c) 频率响应 $H(\omega)$ 和 $H(e^{j\Omega})$，并概画出各自的幅频特性；
   d) 各自的微分方程或差分方程表示；
   e) 各自用三种基本单元实现的一种方框图或信号流图；
   f) 系统状态变量描述的 A、B、C、D 矩阵，要求 A 为对角阵。（36 分）
2. 这两个系统是否因果?是否稳定?（4 分）
3. 它们各是什么滤波器?线性相位否?第二个系统是 FIR 还是 IIR?（5 分）

二． 已知 $x(t)\xleftrightarrow{F}X(\omega)$、$h(t)\xleftrightarrow{F}H(\omega)$，且 $x(t)$、$h(t)$ 波形如右图。试求：

1. $\int_{-\infty}^{\infty}X^*(\omega)H(-\omega)d\omega$
2. $\int_{-\infty}^{\infty}\omega^2|X(\omega)H^*(\omega)|^2d\omega$



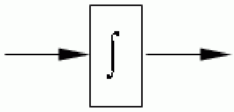


三. 已知一离散时间 LTI 系统的单位冲击响应 $h[n]$ 及序列 $x_0[n]$ 为：

$$h[n]=\begin{cases}(1-\dfrac{|n|}{2M+1}) & ,\ |n|\le 2M+1\\ 0 & ,\ |n|>2M+1\end{cases}\qquad x_0[n]=\begin{cases}a^n & ,\ 0\le n\le M\\ 0 & ,\ 其它\ n\end{cases}$$

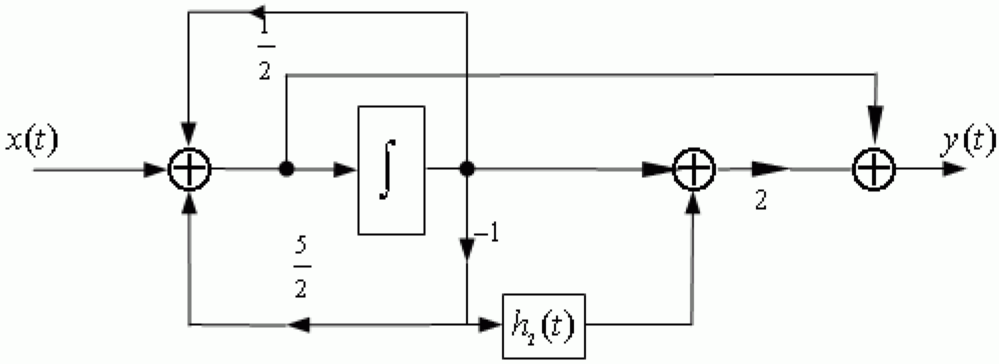
试求该系统在 $x[n]=\sum_{l=-\infty}^{\infty}x_0[n-(2M+1)l]$ 输入时的输出 $y[n]$。（14 分）

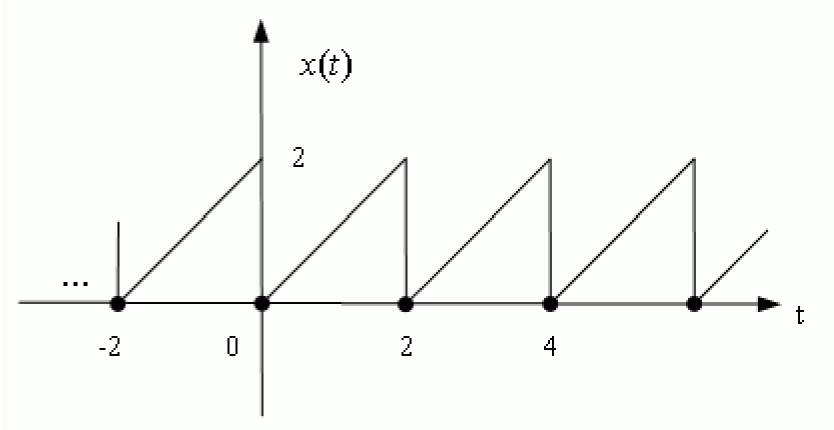
四. 某连续 LTI 系统如下图所示，其中：



为积分器，并已知：$h_2(t)=\dfrac{\sin t}{\pi t}$，试求当系统在右图周期锯齿

波输入时的书橱，并概画出波形。（14 分）





五. 线性调频 Z 变换（CZT）是对一个 N 点序列的 Z 变换沿螺旋周线的等角间距取样（$z_k = AW^{-k}$，$k = 0,1,\cdots,M-1$；A、W 为任意复数）

1. 根据以上定义，试导出 CZT 的表达式；（4 分）
2. 可用快速卷积方法实现 CZT,请给出运算步骤、相应公式和实现框图；（8 分）
3. 若用 CZT 来计算一个 N 点 DFT（N 为素数），试分析其运算量（仅指复数乘法运算次数）。（3 分）

中国科学技术大学

一九九八年招收硕士学位研究生入学考试试题
试题名称：信号与系统

一、试求下列各小题：（每小题 8 分）

1、 $x(t)=\dfrac{t}{t^2+1}$ 的频谱 $X(\omega)$，并概画出 $X(\omega)$ 的图形；

2、 $X(s)=\dfrac{-se^{-s}}{s^2+4s+5}, R_e\{s\}>-2$，试求其反拉氏变换 $x(t)$；

3、 $h[n]=\sum_{k=0}^{M}\dfrac{M!}{(M-K)!K!}\delta[n-k]$， M 为偶数，试求频率响应 $\tilde{H}(\Omega)$，并概画出 M=4 时的 $\tilde{H}(\Omega)$ 图形；

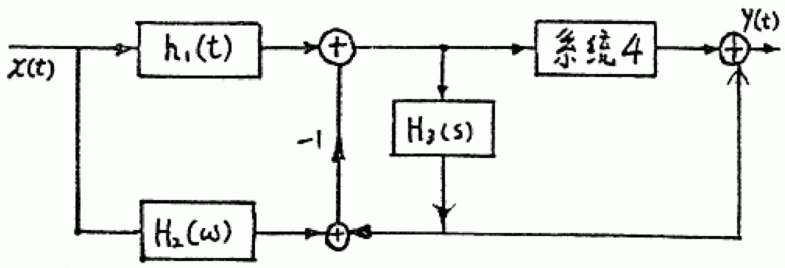
4、 $\bar{X}(z)=\dfrac{1}{z-1-z^{-N+1}+z^{-N}}, |z|>1$；试求反 Z 变换 $x[n]$.

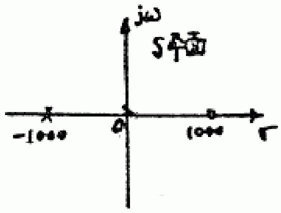
二、由如下差分方程描述的离散时间因果系统

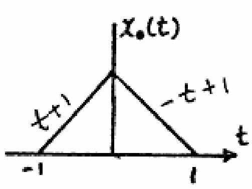
$$y[n]-\frac{1}{3}y[n-1]=x[n]-\left(\frac{1}{2}\right)^n\sum_{k=-\infty}^{n-1}x[k]\left(\frac{1}{2}\right)^{-k}$$

已知 $y=[-1]=-3$，试求当输入 $x[n]=u[n]$ 时系统的输出 $y[n]$，并写出其中的零输入响应和零状态响应分量。（12 分）

三、下图所示的连续时间 LTI 系统





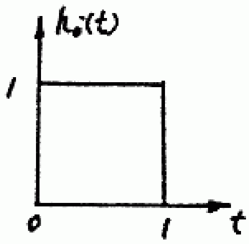


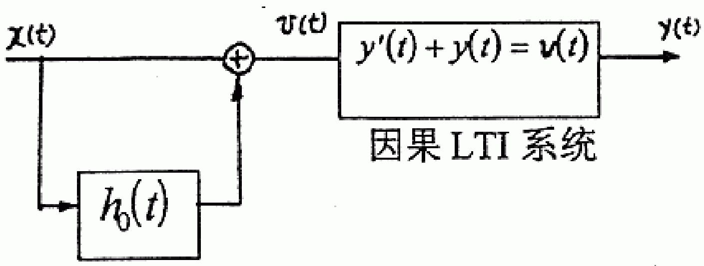
已知：$h_1(t)=\dfrac{\sin t}{\pi t}, H_2(\omega)=\begin{cases} e^{-j\omega} & |\omega|<1 \\ 0 & |\omega|>1 \end{cases} H_3(s)=\dfrac{1}{s}$；系统 4 为一个因果 LTI 系统，其零、极点图如右上图所示，且其直流增益等于 1 。

试求：1 、当$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_0(t-4n), x_0(t)$的波形如右下图所示，试求输出$y(t)$；（6 分）

2、 该 LTI 系统的单位冲激响应$h(t)$。（10 分）

四、如下图所示的连续时间 LTI 系统，试求或写、画出该系统的：

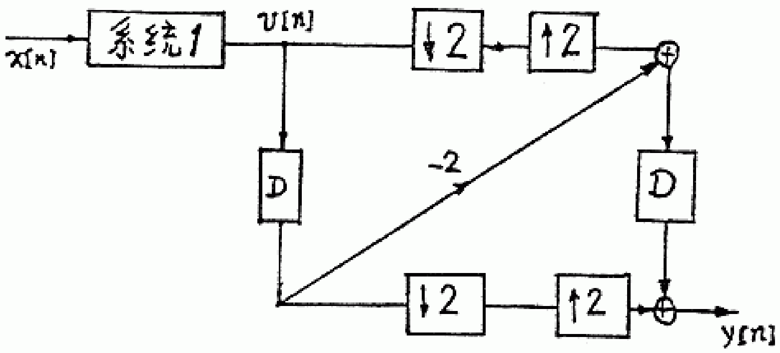




1、 系统函数$H(s)$和收敛域；　　2 、频率响应$H(\omega)$，并概画出$|H(\omega)|$；
3 、单位冲激响应$h(t)$，并概画出其波形；　　4 、微分方程表示；
5、 用相加器、数乘器、积分器和连续时间延时系统实现它的方框图.
（每小题 4 分，共 20 分）

五、如下图所示的离散时间系统，其中：系统 1 为差分方程

$v[n]-\frac{1}{2}v[n-1]=x[n]$表示的因果 LTI 系统；图中符号“$\rightarrow$D$\rightarrow$”为单位延时，$\xrightarrow{x[n]}\boxed{\downarrow 2}\xrightarrow{y[n]}$为 2:1 抽取，即$y[n]=x[2n]$，而$\xrightarrow{x[n]}\boxed{\uparrow 2}\xrightarrow{y[n]}$为 2:1 内插零，即 $y(n)=x_{(2)}[n]=\begin{cases} x\left[\frac{n}{2}\right] & n\text{为偶数} \\ 0 & n\text{为奇数} \end{cases}$



试求：1 、该系统的差分方程表示（ 8 分）

提示：先考虑从$v[n]\rightarrow y[n]$的系统可等价为一个因果 LTI 系统

2、该系统的系统函数$H(z)$，并概画出零、极点和收敛域图形（ 3 分）

3 、该系统的频率响应$\tilde{H}(\Omega)$，并概画出其幅频响应$|\tilde{H}(\Omega)|$（ 3 分）

4、 该系统的单位冲激响应$h[n]$ （ 3 分）

5、 用离散时间三种基本单元实现的方框图，要求最经济的实现。（ 3 分）

中国科学技术大学

一九九九年招收硕士学位研究生入学考试试卷

试题名称：信号与系统

一　本题包含五个小题，每小题 8 分，共 40 分。

1)　试求如下连续时间信号 $x(t)$ 的频谱 $X(\omega)$，并概画出 $X(\omega)$ 的函数图形。

$$x(t)=\begin{cases}(1-|t|)e^{-j(\pi/2)}[\sin 5\pi t+j\cos 5\pi t], & |t|\le 1\\ 0\ , & |t|>1\end{cases}$$

2)　已知离散时间序列 $x[n]$ 的频谱 $X(e^{j\Omega})$ 为

$$X(e^{j\Omega})=\frac{\pi}{8}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\sin[7k(\pi/16)]}{\sin[k(\pi/16)]}e^{-j3(\pi/8)}\delta\left(\Omega-k\frac{\pi}{8}\right)$$

试问 $x[n]$ 是什么信号？若是是能量信号，试计算其能量；若是功率受限信号，则计算其平均功率。

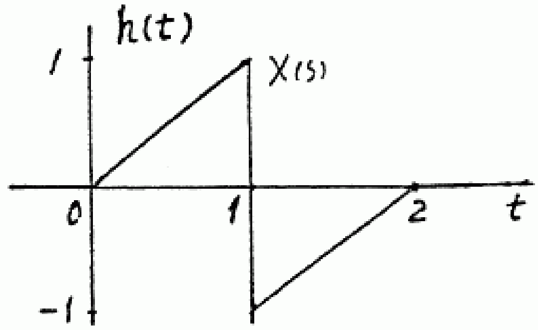
3)　试概画出如下连续时间信号 $x(t)$ 的波形，并求其双边拉普拉斯变换及其收敛域。

$$x(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-e^{-2(t-n)}\right)[u(t-n)-u(t-n-1)]$$

4)　试求如下 Z 变换的反 Z 变换：

$$X(z)=\ln\left(\frac{1-z^{-1}}{1-az^{-1}}\right),\quad |z|>1>|a|$$

5)　某连续时间 LTI 系统的 $h(t)$ 如右图所示，试求当输入 $x(t)=\pi[\delta(t)-\pi\sin\pi t u(t)]$ 时，系统的输出 $y(t)$，并概画出其波形。



二. 对于如下方程表示的连续时间因果 LTI 系统，试求:

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+2y(t)=\int_{-\infty}^{t}e^{-2(t-\tau)}\left[\frac{\mathrm{d}^2x(\tau)}{\mathrm{d}\tau^2}+2\frac{\mathrm{d}x(\tau)}{\mathrm{d}\tau}+x(\tau)\right]\mathrm{d}\tau$$

1) 该系统的系统函数 $H(s)$，并概画出其零、极点图和收敛域；(6 分)

2) 试求并概画出该系统的单位冲激响应 $h(t)$；(4 分)

3) 若系统稳定，概画出其幅频响应和相频响应。它是什么滤波器? (4 分)

4) 以级联结构形式、用连续时间积分器、相加器和数乘器实现该系统，画出其方框图或信号流图。(6 分)

三. 设一个连续时间能量信号 $x(t)$，通过单位冲激响应为 $h(t)$ 的稳定连续时间 LTI 系统，得到输出是 $y(t)$。假设连续时间稳定 LTI 系统的延迟时间 t_h 定义为 $t_h=t_y-t_x$。其中: t_y 和 t_x 分别为该系统的输入和输出能量信号的时域分布重心，即

$$t_x=\int_{-\infty}^{\infty}tx(t)\mathrm{d}t\Big/\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\mathrm{d}t \qquad \text{和} \qquad t_y=\int_{-\infty}^{\infty}ty(t)\mathrm{d}t\Big/\int_{-\infty}^{\infty}y(t)\mathrm{d}t$$

可以证明，上述定义的系统延时时间与输入信号无关，仅与系统有关。试求出用 $h(t)$ 表示系统延时时间 t_h 的表达式。 (本题 10 分)

四. 离散时间 90° 移相器的频率响应 $H(e^{j\Omega})$ 在主值区间 $(-\pi,\pi)$ 内为

$$H(e^{j\Omega})=-j\,\mathrm{sgn}(\Omega),\quad -\pi<\Omega<\pi$$

1) 试画出其幅频响应 $|H(e^{j\Omega})|$ 和相频响应 $\varphi(\Omega)$；(2 分)

2) 试求并概画出其单位冲激响应 $h[n]$，并确定该系统是否因果? 是否稳定? (5 分)

3) 现用一个矩形加窗的 $2N+1$ 因果数字滤波器 $h_d[n]$ 来逼近 90° 移相器，即

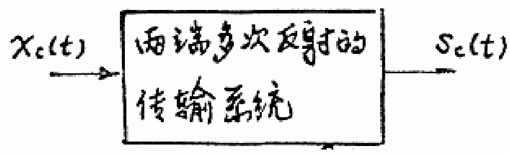
$$h_d[n]=\begin{cases}h[n-N], & 0\le n\le 2N\\ 0\ , & n<0, n>2N\end{cases}$$

试概画出数字滤波器的频率响应 $H_d(e^{j\Omega})$，并讨论参数 N 和窗形状对逼近的 90° 移相器性能的影响。(8 分)

五. 长途电信网中信号传输常有反射现象，若反射信号为 $x_c(t)$，经两端多次反射到接收端的信号为

$$s_c(t)=\sum_{l=0}^{\infty}\alpha^l x_c(t-lT_0)$$

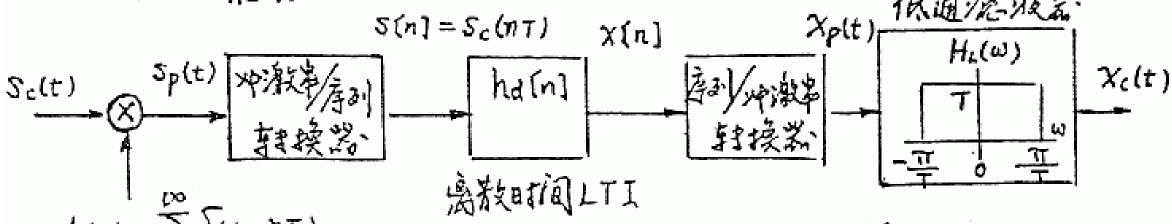
其中: 信号来回反射一次的衰减为 α，延时为 T_0。



1) 试问从 $x_c(t)$ 到 $s_c(t)$ 的系统是否是的 LTI 系统，若是，试写出它的 $h(t)$，它因果稳定吗? 然后求出它的逆系统的单位冲激响应 $h_1(t)$，这个逆系统因果、稳定吗? 并画出用连续时间相加器、数乘器和纯延时器构成 $h(t)$ 和 $h_1(t)$ 的方框图。如果该逆系统能够实现，让接收信号 $s_c(t)$ 通过它，就能恢复出 $x_c(t)$。但这个逆系统实际实现时有什么困难? (7 分)

2) 如果 $x_c(t)$ 是带限于 ω_M 的带限信号，即其频谱 $X_c(\omega)=0$，$|\omega|>\omega_M$，可以用离散时间(数字)信号处理的方法，从 $s_c(t)$ 中恢复出 $x_c(t)$，处理的方框图如下：

$$s_p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} s_c(nT)\delta(t-nT)$$



$$p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$$

$$x_p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]\delta(t-nT)$$

若已知反射延时 T_0 满足：$\pi/\omega_M<T_0<\pi/2\omega_M$，取抽样间隔 $T=T_0/2$。试求上图中数字滤波器的单位冲激响应 $h_d[n]$，写出其差分方程表示，并画出它用三种离散时间基本单元构成的系统方框图或信号流图。(8 分)

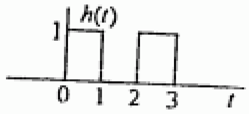
说明：请看清题意和题中要求，特别是要求画图的必须画出波形或函数图形。

中国科学院——中国科学技术大学

2000年招收攻读硕士学位研究生入学考试试卷

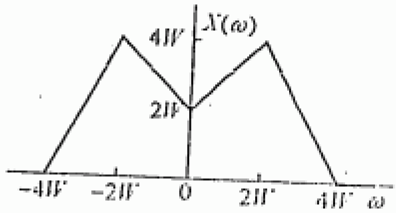
科目：信号与系统

一、已知某连续时间LTI系统的单位冲激响应$h(t)$见右图，试用两种方法：1) 时域卷积方法；2) 傅里叶变换方法，求当输入为周期信号$\tilde{x}(t)=0.5[1+\cos(\pi t/2)]$时，系统的输出$y(t)$。（卷积方法6分，变换方法8分）



二、试求下列各小题：（共32分）

1. 已知信号$x(t)$的频谱$X(\omega)$如右图所示，试求出信号$x(t)$，并概画出其波形。（8分）



2. 已知一个4点序列$x[n]$，其中$x[0]=2$，$x[1]=1$，$x[2]=1$，$x[3]=2$。试计算它的离散傅里叶变换$X(k)$，$k=0,1,2,3$。（8分）

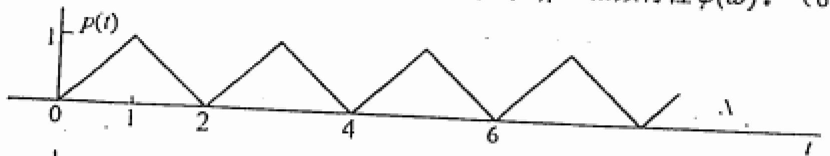
3. 已知某连续时间LTI系统的单位冲激响应$h(t)=\int_1^t \tau e^{-(\tau-1)}d\tau$，试求其系统函数$H(s)$，并概画出像函数的收敛域和零、极点图，以及系统的幅频响应$|H(\omega)|$。（8分）

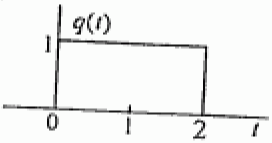
4. 已知一离散时间因果序列为：$x[n]=0$，$n<0$；$x[n]=k$，$5(k-1)\le n<5k$，其中，$k=1, 2, \Lambda$。试求其Z变换$X(z)$，并概画出像函数的收敛域和零、极点图。（8分）

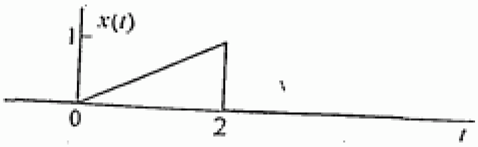
三、已知某连续时间因果LTI系统对某个输入$p(t)$的响应为$q(t)$，$p(t)$和$q(t)$的波形见下图。

试求：1. 当输入改为右下图所示的$x(t)$时，该下图的输出$y(t)$，并概画出其波形。(8分)

2. 概画出该连续时间LTI系统的幅频特性$|H(\omega)|$和相频特性$\varphi(\omega)$。（6分）







四、对于由如下线性常系数

四、对于由如下线性常系数差分方程和非零起始条件描述的离散时间因果系统，试求：

$$\begin{cases} y[n]-1.5y[n-1]+0.5y[n-2]=4x[n]-x[n-2] \\ y[-1]=1,\quad y[-2]=1 \end{cases}$$

1. 当输入为$x[n]=(1/3)^n u[n]$时，系统的输出$y[n]$，$n\ge 0$。（10分）
2. 分别写出$y[n]$中的零输入响应和零状态响应、暂态响应和稳态响应各分量。（4分）

五、某个离散时间因果 LTI 系统的差分方程表示如下：

$$2y[n]-y[n-2]=x[n]-2x[n-2]$$

1. 试画出用三种离散时间基本单元(相加器、数乘器和单位延时)，构成该系统的直接II型实现和并联实现的方框图(或信号流图)，要求其中的数乘器系数是实系数。(10 分)
2. 该系统属于什么离散时间系统？例如，是 FIR 系统还是 IIR 系统？是全通系统还是最小相移系统？它属于什么类型(低通、高通、带通、带阻或全通)的滤波器？(3 分)

六、已知一个连续时间因果 LTI 系统(例如测量装置)的微分方程表示为

$$\frac{d}{dt}y_c(t)+ay_c(t)=x_c(t),\quad \text{实数 } a>0$$

为获得对带限于 ω_M 的带限信号 $x_c(t)$（即其频谱 $X_c(\omega)=0$，$|\omega|>\omega_M$）的瞬时(或即时)测量，亦即假设 $x_c(t)=u(t)$，能测量出 $u(t)$，可以用两种方法来实现。第一种方法是在该系统输出级联一个补偿系统，如图 6.1 所示；第二种方法是用离散时间处理的方法，具体如图 6.2 所示，即先对测量系统输出 $y_c(t)$ 进行抽样，并转换为离散时间信号 $y[n]$，再用一个单位冲激响应为 $h_d[n]$ 的离散时间因果 LTI 系统进行处理，使其输出 $v[n]$ 就是被测带限信号 $x_c(t)$ 的样本值序列，即 $v[n]=x_c(nT)$，其中 T 为抽样间隔。

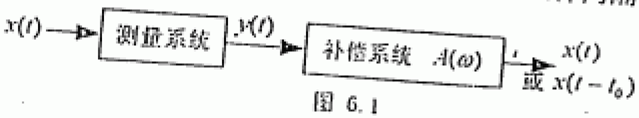


图 6.1

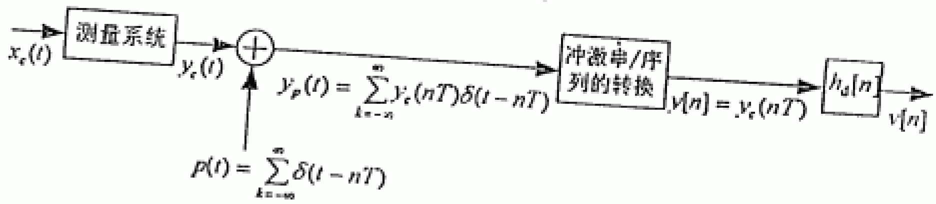


图 6.2

图 6.2

1. 若用第一种方法，补偿系统必须是一个可实现的系统，即必须是因果稳定的连续时间 LTI 系统，试概画出这个补偿系统的幅频特性 $|A(\omega)|$ 和相频特性 $\theta(\omega)$。(5 分)
2. 若用第二种方法，试求：1) 可用的最大抽样间隔 T_{max} 是多少？(2 分) 2) 所采用的离散时间 LTI 系统的单位冲激响应 $h_d[n]$，并画出它的方框图或信号流图。(8 分)

说明：请看清每题和每小题的要求，并按要求做题，要求概画波形或还是图形的，必须标注明坐标尺度和特殊点的值。

中国科学院——中国科学技术大学
2001 年招收攻读硕士学位研究生入学考试试卷

试题名称：信号与系统

一、　本题包含五个小题，共 36 分。

1）某离散时间序列 $x[n]$ 通过单位冲激响应 $h[n]=a^n u[n]$ 的离散时间 LTI 系统，输出为 $y[n]=\dfrac{u[n]-u[n-N]-a^{n+1}(u[n]-a^{-N}u[n-N])}{1-a}$，试求 $x[n]$，画出其序列图。(8 分)

2）已知一个 4 点 DFT 系数依次为 0、0、4、0，试求它的 IDFT。(4 分)

3）某连续时间 LTI 系统的频率响应 $H(\omega)$ 为

$$H(\omega)=\begin{cases}|\sin(\pi\omega/\omega_M)|e^{-j(\pi\omega/\omega_M)}, & |\omega|\le\omega_M\\ 0\ , & |\omega|>\omega_M\end{cases}$$

试求该系统的单位冲激响应 $h(t)$。(8 分)

4）$2N+1$ 点的 FIR 滤波器的单位冲激响应 $h[n]$ 为如下的二项式序列：

$$h[n]=\begin{cases}\dfrac{(-1)^n}{2^{2N}}\dfrac{(2N)!}{(2N-n)!n!}\ , & 0\le n\le 2N\\ 0\ , & n<0, n>2N\end{cases}$$

试求该滤波器的系统函数 $H(z)$ 及其收敛域、频率响应 $\widetilde{H}(\Omega)$（或 $H(e^{j\Omega})$），并概画出 $N=2$ 时的滤波器幅频特性 $|\widetilde{H}(\Omega)|$（或 $|H(e^{j\Omega})|$）和相频特性 $\widetilde{\varphi}(\Omega)$。(8 分)

5）某连续时间信号 $x(t)$ 的波形如图 1 所示，试求其拉普拉斯变换 $X(s)$，并概画出它的零、极点分布和收敛域。(8 分)

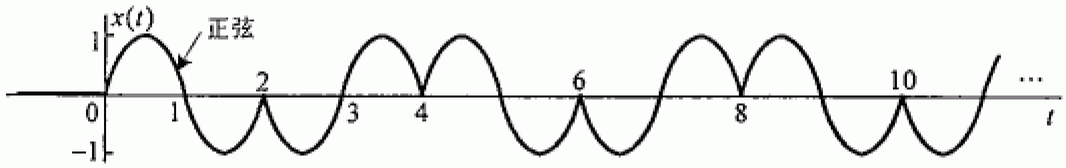


图 1

二、某离散时间因果 LTI 系统如图 2 所示，图中的系统 1 是一个频率响应为 $H_1(e^{j\Omega})$ 的 LTI 系统，且已知 $H_1(e^{j\Omega}) = e^{-j\Omega}\cos^2(\Omega/2)$，试求：（本题共 20 分）

图 2

1） 系统 1 的单位冲激响应 $h_1[n]$，并概画出它的幅频特性和相频特性；（6 分）

2） 整个系统的系统函数 $H(z)$，并概画出它的单零、极点分布和收敛域；（4 分）

3） 系统 1 和整个系统分别是什么类型的滤波器(低通、高通、带通，和 FIR 或 IIR 等滤波器)？（4 分）

4） 对图 2 的整个系统，试画出用相加器、数乘器和单位延时构成的滤波器结构或信号流图，要求其中的数乘器为实数数乘器。（6 分）

三、　如下方程和非零起始条件表示的连续时间因果 LTI 系统，

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\dfrac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \int_{-\infty} x(\tau)d\tau + x(t) \\ y(0_-) = 2 \quad , \quad y'(0_-) = -3 \end{cases}$$

试求当 $x(t) = e^{-t}u(t)$ 时，系统的零状态响应 $y_{zs}(t)$ 和零输入响应 $y_{zi}(t)$，$t \ge 0$，以及系统的全响应 $y(t)$，$t \ge 0$。（12 分）

四、某连续时间 LTI 系统如图 3 所示，且已知：$h_1(t) = \dfrac{\sin\omega_M t}{\pi t} = \dfrac{\omega_M}{\pi}\mathrm{Sa}(\omega_M t)$；

$H_2(s) = s^{-1}$；

系统 3 为微分方程

$$\frac{dy(t)}{dt} + \omega_M y(t) = -x(t)$$

表示的因果 LTI 系统；

$H_4(\omega) = e^{-j\omega T}$，$T = \dfrac{2\pi}{\omega_M}$；

$H_5(\omega) = j\omega$，$0 < \alpha < 1$。

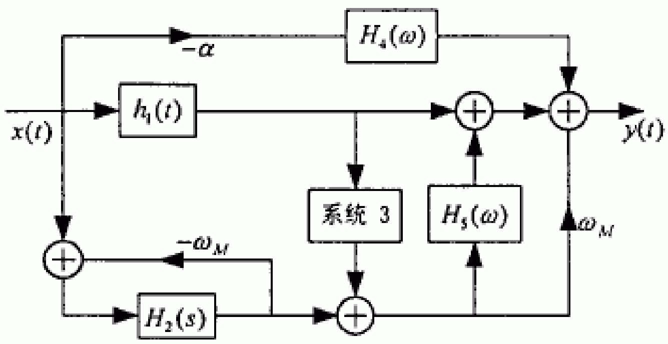


图 3

试求：（本题共 20 分）

1） 该系统的频率响应 $H(\omega)$，概画出其幅频特性 $|H(\omega)|$ 和相频特性 $\varphi(\omega)$，请注意在图 3 中，$0 < \alpha < 1$。并写出系统的输入输出信号变换关系。（10 分）

2） 若输入 $x(t)$ 是带限于 ω_M 的带限信号，现以不产生混叠的最大抽样间隔 $T_{s\max}$，对系统的输出信号 $y(t)$ 进行抽样，获得样本序列 $y[n] = y(nT_{s\max})$，试问 $y[n]$ 通过什么离散时间滤波器，能获得 $x(t)$ 以同样间隔抽样得到的样本序列 $x[n] = x(nT_{s\max})$？试求出这个离散时间滤波器的差分方程表示，并画出用三种离散时间基本单元构成的滤波器实现结构（10 分）

五、若你要用 N 点的 FFT 程序计算一个 $2N$ 点的实序列 $x[n]$，$n=0$，1，2 … $2N-1$，的 DFT，一种可行的办法是把 $x[n]$ 构成一个 N 点的复序列 $y[n]$，即

$$y[n]=a[n]+\mathrm{j}b[n]，\quad n=0，1，2 \cdots N-1$$

其中，$a[n]$ 是 $x[n]$ 的偶数点序列（即 $a[n]=x[2n]$，$n=0$，1，2 … $N-1$），$b[n]$ 是 $x[n]$ 的奇数点序列（即 $b[n]=x[2n+1]$，$n=0$，1，2 … $N-1$）。试写出用 $y[n]$ 的 N 点 DFT 系数 $Y(k)$ 计算 $x[n]$ 的 $2N$ 点 DFT 系数 $X(k)$ 的表达式。（12 分）

说明：请看清题意和题中要求，特别是要求画图的必须概画出波形或函数图形，并注明座标尺度。

中国科学院—中国科学技术大学
2002 年招收攻读硕士学位研究生入学考试试题

试题名称： 信号与系统

一．线性时不变系统输入 x(t)与零状态响应 y(t)之间关系为：

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)}x(\tau-2)d\tau$$

（1） 求系统的单位冲击响应 h(t)；

（2） 求当 x(t)=u(t+1)- u(t-2)时的零状态响应，u(t)为单位阶跃信号；

（3） 用简便方法求图（1）所示之系统的响应。图中 h(t)为(1)中结果，x(t)与（2）中相同。

（16 分）

二．设 f(t)为升余弦脉冲信号，即：

$$f(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}(1+\cos\pi t), & |t|\le 1\\ 0, & |t|>1\end{cases}$$

试用以下方法求其频谱函数 F(jω)

（1） 利用付立叶变换定义；

（2） 利用微分特性；

（3） 将它看作是窗口函数 $g_2(t)$ 与周期升余弦函数 (1+cosπt)/2 的乘积。

（16 分）

三．系统如图（3）所示，当信号 f(t)和 s(t)输入到乘法器后再经过带通滤波器，其输出为 y(t)。带通滤波器的幅频特性 H(jω)亦示于图（3）中，相频特性 φ(ω)=0。设：

$$f(t)=\frac{\sin 2t}{2\pi t},\quad s(t)=\cos 1000t,\quad -\infty<t<\infty$$

试求输出 y(t).　　(16 分)

四．设：

$$Z(z)=\frac{z^2-6z-18.5}{z^3+1.5z^2-8.5z-15}$$

它的三个极点分别为，

$$z_1=\rho_1 e^{j\theta_1},\quad z_2=\rho_2 e^{j\theta_2},\quad z_3=\rho_3 e^{j\theta_3}$$

且：　$\rho_1>\rho_2>\rho_3$

就收敛域的下面四种可能情况，

$(1)|z|>\rho_1$;　　$(2)\rho_1>|z|>\rho_2$;

$(3)\rho_2>|z|>\rho_3$;　　$(4)\rho_3>|z|$

分别求 x(n)，并指出哪些是因果序列，哪些不是因果序列.　　（16 分）

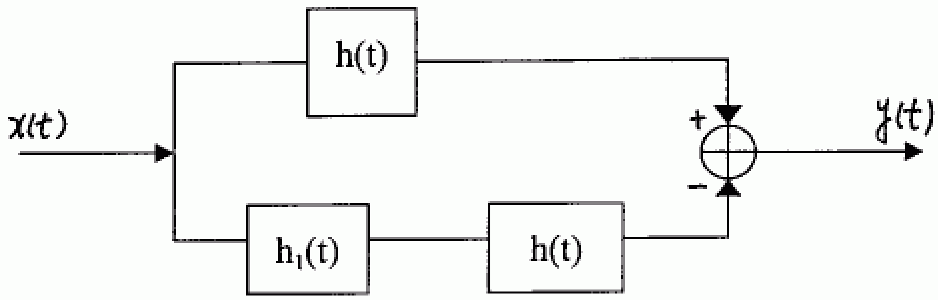
五．试用 Laplace 变换计算图（5）中电容的电压。电压源提供的是单位阶跃电压信号。（18 分）

六．用经典法或 z 变换法求解下面差分方程。（18 分）

$$y(n)-\frac{3}{4}y(n-1)+\frac{1}{8}y(n-2)=2\sin\frac{n\pi}{2}$$

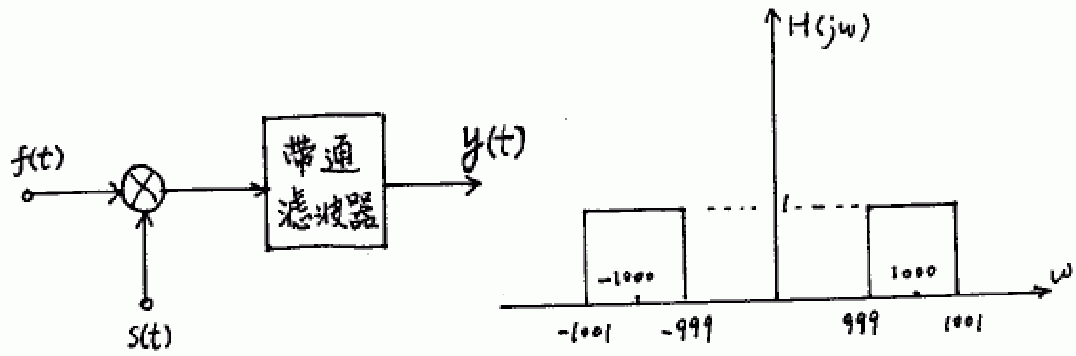
$$y(-1)=2, \qquad y(-2)=4$$

附图：

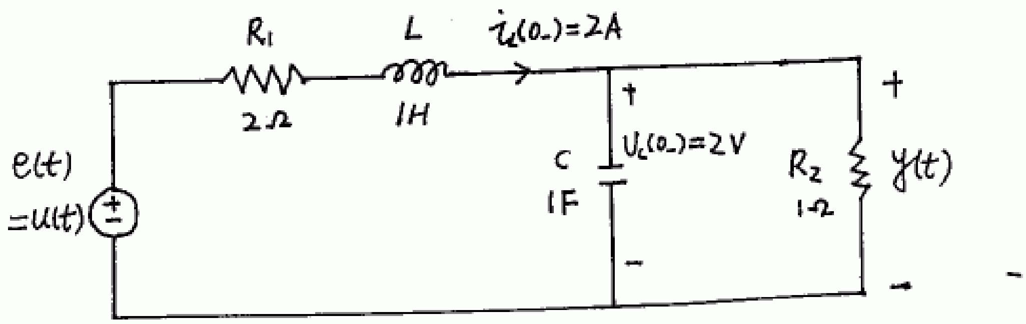


$$h_1(t)=\delta(t-1)$$

图（1）


f(t)
s(t)
带通滤波器
y(t)
H(jw)
1
-1000
1000
-1001
-999
999
1001
ω

图（3）


R1
2Ω
L
1H
iL(0-)=2A
C
1F
+
Uc(0-)=2V
-
R2
1Ω
+
y(t)
-
e(t)
=u(t)

中国科学院安徽光学精密机械研究所

中国科学院－中国科学技术大学
2003 年招收攻读硕士学位研究生入学考试试题

试题名称：　信号与系统

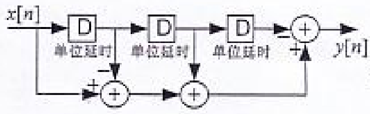
说明：1. 本试卷共四大题，总分 150 分。
　　　2. 请看清题意，特别是题目中的黑体字；题目中要求概画的图形包含得分，必须作图，并加必要的标注；若题目中明确写明用那种求解方法的，必须用指明的方法求解，若题目中没有限定求解方法的，可用任何正确的方法求解。

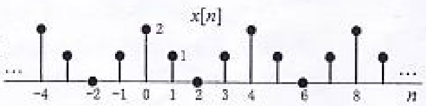
一、试求下列 5 个小题：（每小题 15 分，共 75 分）

1. 已知差分方程 $y[n]-0.5y[n-1]-0.5y[n-2]=x[n]-x[n-3]$ 和非零起始条件 $y[-1]=2$，$y[-2]=-2$ 表示的起始不松弛的离散时间因果系统，试用**递推算法**分别计算出在 $\delta[n]$ 输入时，系统的输出 $y[n]$ 中的零输入响应 $y_{zi}[n]$，$n\geq 0$，和零状态响应 $y_{zs}[n]$。（**至少需分别递推计算出** $y_{zi}[n]$ **和** $y_{zs}[n]$ **的头 4 个序列值**）。

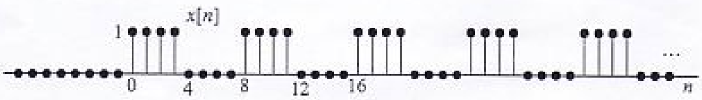
2. 已知连续时间 LTI 系统的单位冲激响应 $h(t)=\begin{cases}|\sin(\pi t/T)|, & |t|\leq T\\ 0, & |t|>T\end{cases}$，概画出它的波形，求出系统频率响应 $H(\omega)$，**概画出它的幅频响应** $|H(\omega)|$ 和相频响应 $\varphi(\omega)$。

3. 某数字滤波器的方框图如下图**左图**所示，试求它的系统函数 $H(z)$ 及其收敛域，写出系统零、极点，并回答它是 **IIR**、还是 **FIR** 滤波器？进一步，求出它对下图右图所示的**周期输入信号** $x[n]$ 的响应或输出 $y[n]$。





4. 试求下图所示序列 $x[n]$ 的 **Z** 变换 $X(z)$，并概画出 $X(z)$ 的零、极点分布和收敛域。



5. 可以适用**一个** N 点 **FFT** 程序同时计算两个 N 点的**不同实序列** $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ 的 **DFT** $X_1(k)$ 和 $X_2(k)$，试简述这一计算方法和计算框图，并推导相应的运算公式。

二、某个稳定的连续时间 LTI 系统的系统函数为 $H(s)=\dfrac{3s-0.5}{(s^2+0.5s-1.5)e^{2s}}$，（共 20 分）

1. 试确定其收敛域和零、极点分布，并求出该系统的单位冲激响应 $h(t)$；（10 分）
2. 该系统因果（或能实现）吗？若不能实现，请设计一个与它的幅度频率特性完全相同的连续时间因果稳定滤波器，画出其用连续时间相加器、数乘器和积分器的并联实现结构的方框图或信号流图，并写出其微分方程表示。（10 分）

三、试求下列两小题(共 20 分)：

1. 某连续时间系统的输入输出信号变换关系为 $y(t)=\int_0^1 x(t-\tau)\mathrm{d}\tau$，试确定该系统是否线性？是否时不变？是否因果？是否稳定？若是线性时不变系统，试求出它的单位冲激响应 $h(t)$，并概画出 $h(t)$ 的波形。(9 分)
2. 现已知该系统的输入为 $x(t)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x_0(t-2n)$，其中 $x_0(t)=\begin{cases}\sin\pi t, & 0\le t\le 1\\ 0, & t<0,t>1\end{cases}$，试用时域卷积的方法求出系统的输出 $y(t)$，并概画出 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的波形。(11 分)

四、两个连续时间实能量受限信号 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$，已知 $x_1(t)$ 的最高频率分量为 2000 Hz，$x_2(t)$ 的最高频率分量为 1000 Hz。对于如下 $y_i(t)$，$i=1,2,3,4$，试求：(共 35 分)

a) $y_1(t)=x_1(t)x_2(t)$　　b) $y_2(t)=x_1(t)+x_2(t)\cos(6000\pi t)$

c) $y_3(t)=R_{x_1x_2}(t)$，即 $y_3(t)$ 是 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 的互相关函数

d) $y_4(t)=[x_1(t)*h_0(t)]\cos(8000\pi t)+x_2(t)\sin(8000\pi t)$，其中 $h(t)=\begin{cases}4000, & |t|<0.125\text{ms}\\ 0, & |t|>0.125\text{ms}\end{cases}$

1. 若 $y_i(t)$，$i=1,2,3,4$，分别用周期冲激串抽样，试确定为确保它们不产生混叠(即临界抽样)，各自的最大抽样间隔 $T_{i\max}$，$i=1,2,3,4$，是多少 ms。(18 分)
2. 若对 $y_i(t)$，$i=1,2,3$，分别用上述各自求得的 $T_{i\max}$ 进行周期冲激串抽样，得到各自的已抽样信号 $y_{1P}(t)$、$y_{2P}(t)$ 和 $y_{3P}(t)$。试问：你能从 $y_{iP}(t)$，$i=1,2,3$ 中，分别同时无失真地恢复出 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 吗？对于能无失真恢复的 $y_{iP}(t)$，试画出由它们分别恢复出 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 的无失真变种的系统框图。(9 分)
3. 若对 $y_4(t)$ 用 1. 小题确定的 $T_{4\max}$ 进行周期冲激串抽样，得到的已抽样信号 $y_{4P}(t)$ 会出现什么情况？试从时域(即 $y_{4P}(t)$ 的波形或表达式)，或者从频域(即 $y_{4P}(t)$ 的频谱 $Y_{4P}(\omega)$)，说明其原因。为避免出现这样的问题(即为了在对 $y_4(t)$ 抽样的同时，必须在其已抽样信号中同时无失真地保存 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 的信息)，请说明你可用什么方法来避免这一问题。(8 分)

中国科学院 & 中国科学技术大学

2003 年硕士学位研究生入学考试试题参考答案

试题名称：　信号与系统

一、本题包括 5 个小题：(每小题 15 分，共 75 分)

1. 先求零输入响应 $y_{zi}[n]$，$n\geq 0$，它是在当前输入 $x[n]=0$ 时，仅有非零起始条件造成的那部分输出，它应满足齐次方程 $y_{zi}[n]-0.5y_{zi}[n-1]-0.5y_{zi}[n-2]=0$，它的后推方程为

$$y_{zi}[n]=0.5(y_{zi}[n-1]+y_{zi}[n-2]) \qquad (1.1\text{-}1)$$ (到此得 3 分)

由于系统是因果系统，仅有当前输入 $x[n]=\delta[n]$ 造成的零状态响应 $y_{zs}[n]=0$，$n<0$，故 $y_{zi}[-1]=y[-1]=2$，$y_{zi}[-2]=y[-2]=-2$。用它们并按照后推方程(1.1-1)，可以逐个递推出 $y_{zi}[n]$，$n\geq 0$，按此计算出 $y_{zi}[n]$ 的头 4 个序列值如下：　(这一段得 1 分)

$y_{zi}[0]=0.5(y_{zi}[-1]+y_{zi}[-2])=0.5(2-2)=0$　(该值和以下 3 个序列值每个得 1 分)

$y_{zi}[1]=0.5(y_{zi}[0]+y_{zi}[-1])=0.5(0+2)=1$

$y_{zi}[2]=0.5(y_{zi}[1]+y_{zi}[0])=0.5(1+0)=0.5$

$y_{zi}[3]=0.5(y_{zi}[2]+y_{zi}[1])=0.5(0.5+1)=0.75$，依此类推，计算出 $y_{zi}[4]$、$y_{zi}[5]$ …

再求当前输入 $x[n]=\delta[n]$ 造成的零状态响应 $y_{zs}[n]$，它就是原差分方程表示的因果 LTI 系统的单位冲激响应，且 $y_{zs}[n]=0$，$n<0$，只要用如下后推方程，逐个递推出 $y_{zs}[n]$，$n\geq 0$。

$$y_{zs}[n]=\delta[n]-\delta[n-2]+0.5(y_{zs}[n-1]+y_{zs}[n-2]) \qquad (1.1\text{-}2)$$ (这一段得 3 分)

由此递推出 $y_{zs}[n]$ 的头 4 个序列值如下：　(以下 4 个序列值每个得 1 分)

$y_{zs}[0]=\delta[0]-\delta[-2]+0.5(y_{zs}[-1]+y_{zs}[-2])=1-0+0.5(0+0)=1$

$y_{zs}[1]=\delta[1]-\delta[-1]+0.5(y_{zs}[0]+y_{zs}[-1])=0-0+0.5(1+0)=0.5$

$y_{zs}[2]=\delta[2]-\delta[0]+0.5(y_{zs}[1]+y_{zs}[0])=0-1+0.5(0.5+1)=-0.25$

$y_{zs}[3]=\delta[3]-\delta[1]+0.5(y_{zs}[2]+y_{zs}[1])=0-0+0.5(-0.25+0.5)=0.125$

依此类推，计算出 $y_{zs}[4]$、$y_{zs}[5]$ …

2. $h(t)=\begin{cases}|\sin(\pi t/T)|, & |t|\leq T\\ 0, & |t|>T\end{cases}$ 的波形如图 1.1-1 所示，　(画对 $h(t)$ 的波形得 2 分)

系统的频率响应 $H(\omega)$ (即 $h(t)$ 的傅里叶变换)可以用多种方法求，这里举出两种方法的求解：

方法 1：对图 1.2-1 所示的 $h(t)$ 波形求它的一次微分 $h'(t)$ 和二次微分 $h''(t)$，得到 $h'(t)$ 和 $h''(t)$ 的波形分别如图 1.2-2 和图 1.2-3 所示。　(画对 $h'(t)$ 和 $h''(t)$ 的波形共得 4 分)

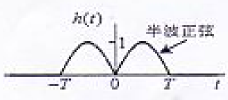


图1. 2−1

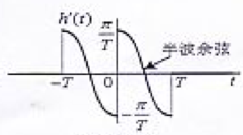


图1. 2−2

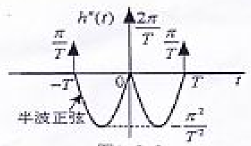


图1. 2−3

由图 1.1-3 可以写出 $h''(t)$ 的表达式如下：

$$h''(t)=(\pi/T)[\delta(t+T)+2\delta(t)+\delta(t-T)]-(\pi^2/T^2)h(t) \qquad (1.2\text{-}1)$$ (得 2 分)

中国科学院 & 中国科学技术大学
2003 年硕士学位研究生入学考试试题参考答案

对上式等号两边取傅里叶变换，并利用傅里叶变换的微分性质，则有

$$(\mathrm{j}\omega)^2 H(\omega) = (\pi/T)[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T} + 2 + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T}] - (\pi^2/T^2)H(\omega) \qquad (1.2\text{-}2) \quad (得3分)$$

由上式，进一步可得到

$$H(\omega) = \frac{(\pi/T)[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T} + 2 + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T}]}{(\pi/T)^2 - \omega^2} = \frac{(\pi/T)(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\omega T}{2}} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega T}{2}})^2}{(\pi/T)^2 - \omega^2} = \frac{(\pi/T)\cos^2(\omega T/2)}{(\pi/T)^2 - \omega^2}$$

$$= \frac{(\pi/T)[1 + \cos(\omega T)]}{(\pi/T)^2 - \omega^2} \qquad (1.2\text{-}3) \quad (得 2 分)$$

方法 2：$h(t)$ 可以写成如下表达式：

$$h(t) = \sin\left[\frac{\pi}{T}(t+T)\right] + 2\sin\left[\frac{\pi}{T}t\right] + \sin\left[\frac{\pi}{T}(t-T)\right] \qquad (1.2\text{-}4)(写出本式得 2 分)$$

由于 $\sin(\omega_0 t)u(t) \xleftrightarrow{\mathrm{L}} \dfrac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$，$\mathrm{Re}\{s\} > 0$， (写出本式得 3 分)

利用拉氏变换的时移性质，(1.1-4)式表示的 $h(t)$ 的拉氏变换像函数 $H(s)$ 如下，且 $h(t)$ 是有限持续期的时间函数，$H(s)$ 的收敛域至少是有限 S 平面，即有

$$H(s) = \frac{(\pi/T)(\mathrm{e}^{sT} + 2 + \mathrm{e}^{-sT})}{s^2 + (\pi/T)^2}，\ s \in 有限\mathrm{S}平面 \qquad (1.2\text{-}5) \quad (得 3 分)$$

$H(s)$ 的收敛域包含虚轴，故 $h(t)$ 的傅里叶变换 $H(\omega)$ 为

$$H(\omega) = H(s)\Big|_{s=\mathrm{j}\omega} = \frac{(\pi/T)(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T} + 2 + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})}{(\mathrm{j}\omega)^2 + (\pi/T)^2} = \frac{(\pi/T)\cos^2(\omega T/2)}{(\pi/T)^2 - \omega^2}$$

$$= \frac{(\pi/T)[1 + \cos(\omega T)]}{(\pi/T)^2 - \omega^2} \qquad (1.2\text{-}6) \quad (得 3 分)$$

上式的结果与(1.2-3)式的结果相同。

说明：还可以用其他方法求 $H(\omega)$，如果用傅里叶正变换公式，通过积分运算，或者利用傅里叶变换其他性质，只要正确求得与(1.2-3)式同样结果，都可得到 10 分

进一步，由(1.2-3)式可以概画出系统的幅频响应 $|H(\omega)|$ 和相频响应 $\varphi(\omega)$ 如下：

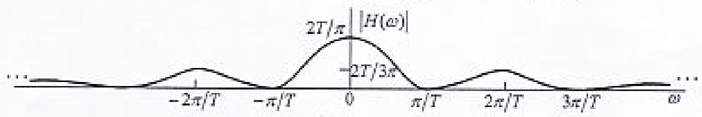


图1.2-4

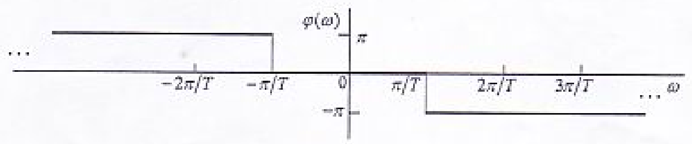


图1.2-5

(画对 $|H(\omega)|$ 和 $\varphi(\omega)$ 得 2 分)

中国科学院 & 中国科学技术大学
2003 年硕士学位研究生入学考试试题参考答案

3. 由于离散时间单位延时的系统函数为 z^{-1}，因此，本小题滤波器的系统函数为

$H(z)=1-z^{-1}+z^{-2}-z^{-3}=(1-z^{-1})(1+z^{-2})$，$|z|>0$ (1.3-1)

(以上求对得 4 分)

本系统有三个零点，即 $z_{1,2}=\pm j$ 或 $z_{1,2}=e^{\pm j\pi/2}$，只有一个三阶极点，即 $p=0$。零、极点分布见图 1.3-1。 (零、极点写对或画对得 2 分)

该滤波器是 FIR 滤波器 (回答正确得 1 分)

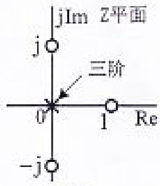


图 1.3-1

可以用变换域方法、或者时域方法求解在题图所示 $\tilde{x}[n]$ 输入时的滤波器输出 $y[n]$。

变换域方法： $\tilde{x}[n]$ 是周期 $N=4$ 的周期序列，它可以如下展开成离散傅里叶级数

$\tilde{x}[n]=1+\cos(\pi n/2)=1+e^{j\pi n/2}+e^{-j\pi n/2}$

由于离散时间 LTI 系统对复指数序列 $e^{j\Omega_0 n}$ 输入的响应为 $\tilde{H}(\Omega_0)e^{j\Omega_0 n}$ 或 $H(e^{j\Omega_0})e^{j\Omega_0 n}$，其中 $\tilde{H}(\Omega_0)=H(e^{j\Omega_0})$ 是系统的频率响应，即 Z 平面单位圆上的系统函数， (得 2 分)

由(1.3-1)式表示的系统函数及其零、极点可知 $H(e^{j0})=H(e^{\pm j\pi/2})=0$， (得 2 分)

因此，滤波器在 $\tilde{x}[n]$ 输入时的输出 $y[n]$ 为

$y[n]=1\times H(e^{j0})+0.5\times H(e^{j\pi/2})+0.5\times H(e^{-j\pi/2})=0$ (得 4 分)

时域方法： 由题图所示的数字滤波器结构或(1.3-1)式表示的系统函数，可以求得滤波器的单位冲激响应 $h[n]=\delta[n]-\delta[n-1]+\delta[n-2]-\delta[n-3]$ (1.3-2) (得 2 分)

该滤波器在 $\tilde{x}[n]$ 输入时的输出为 $y[n]=\tilde{x}[n]*h[n]$，它是一个与 $\tilde{x}[n]$ 相同周期的周期序列，可以用列表计算 $y[n]=\tilde{x}[n]*h[n]$，计算表如下：

$h[n]$ \ $\tilde{x}[n]$	…	0	1	2	1	0	1	2	1	0	1	2	1	…
1		0	1	2	1	0	1	2	1	0	1	2	1	
−1		0	−1	−2	−1	0	−1	−2	−1	0	−1	−2	−1	
1		0	1	2	1	0	1	2	1	0	1	2	1	
−1		0	−1	−2	−1	0	−1	−2	−1	0	−1	−2	−1	

上表白色表格中每个反对角线行的数值相加就是 $y[n]$ 的响应序列值，由上表至少可以得到 $y[n]$ 的连续 9 个序列值都是零值，而 $y[n]$ 也是周期为 4 的周期序列，故所求的 $y[n]=0$，$-\infty<n<\infty$。这一结果与变换域方法求得的结果相同。 (得 6 分)

另外，还可以用其他的时域卷积方法，

例如，先得到(1.3-2)式，即 $h[n]=\delta[n]-\delta[n-1]+\delta[n-2]-\delta[n-3]$ (得 2 分)

再由题图所示的 $\tilde{x}[n]$ 波形，可写出 $\tilde{x}[n]$ 的表达式为

$$\tilde{x}[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(2\delta[n-4k]+\delta[n-4k-1]+\delta[n-4k-3]) \quad (1.3\text{-}3)$$ (得2分)

计算 $\tilde{x}[n]$ 与 $h[n]$ 地卷积，得到 $y[n]=\tilde{x}[n]*h[n]=0$ (得 4 分)

或者，利用卷积和运算的图解法，正确画出必要的有关图形，

也可以求得 $y[n]=\tilde{x}[n]*h[n]=0$ (得 8 分)

中国科学院 & 中国科学技术大学

2003 年硕士学位研究生入学考试试题参考答案

4. $x[n]$ 可以写成为 $x[n]=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k u[n-4k]$ （得 3 分）

因为 $u[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1-z^{-1}}$，$|z|>1$， （得 2 分）

利用 Z 变换的线性性质和时移性质，$x[n]$ 的 Z 变换为

$$X(z)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{z^{-4k}}{1-z^{-1}}=\frac{1}{1-z^{-1}}\sum_{k=0}^{\infty}(-z^{-4})^k$$

$$=\frac{1}{(1-z^{-1})(1+z^{-4})},\ |z|>1 \quad (1.4\text{-}1) \quad (\text{得 5 分})$$

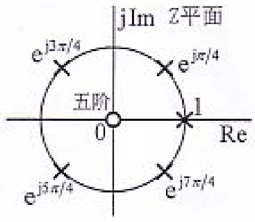


图 1.4-1

$X(z)$ 有 4 个一阶复极点 $p_i=e^{j\frac{(2i-1)}{4}\pi}$，$i=1,2,3,4$，一个一阶实极点 $p_5=1$；只有一个 5 阶零点 $z=0$。$X(z)$ 在 Z 平面上的零、极点分布如图 1.4-1 所示。 （写对或画对零、极点得 5 分）

5. 由于 N 点的 FFT 程序可以计算一个 N 点复序列 $x[n]$ 的 DFT 系数 $X(k)$，因此，用一个 N 点FFT 程序同时计算两个 N 点实序列 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ 的 DFT 的方法如下：首先令：

$x_1[n] \xleftrightarrow{\text{DFT}} X_1(k)$ 和 $x_2[n] \xleftrightarrow{\text{DFT}} X_2(k)$，及 $x[n] \xleftrightarrow{\text{DFT}} X(k)$

，把两个 N 点实序列 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ 分别作为实部和虚部，构成一个 N 点复序列 $x[n]$，即

$$x[n]=x_1[n]+jx_2[n] \quad (1.5\text{-}1) \quad (\text{得 1 分})$$

根据 DFT 的线性性质，则有

$$x[n]=x_1[n]+jx_2[n] \xleftrightarrow{\text{DFT}} X(k)=\text{DFT}\{x_1[n]\}+j\times\text{DFT}\{x_2[n]\}$$
$$=X_1(k)+jX_2(k) \quad (1.5\text{-}2) \quad (\text{得 2 分})$$

又上式右边可以看出：$X_1(k)$ 是 $X(k)$ 的实部序列，$X_2(k)$ 是 $X(k)$ 的实部序列，并根据 DFT 的有关对称性质，可以得到

$$X_1(k)=\text{Re}\{X(k)\}=0.5\{X(k)+X^*(N-k)\} \quad k=0,1,2\cdots N-1 \quad (1.5\text{-}3) \quad (\text{得 4 分})$$

和 $$X_2(k)=\text{Im}\{X(k)\}=-0.5j\{X(k)-X^*(N-k)\} \quad k=0,1,2\cdots N-1 \quad (1.5\text{-}4) \quad (\text{得 4 分})$$

上面两式中的上标*表示取共轭运算（下同）。

用一个 N 点 FFT 程序同时计算两个 N 点实序列 $x_1[n]$、$x_2[n]$ 的 DFT $X_1(k)$、$X_2(k)$ 的计算框图如图 1.5-1 所示。 （画对得 4 分）

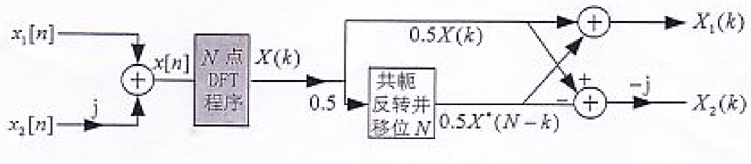


图 1.5-1

中国科学院 & 中国科学技术大学
2003 年硕士学位研究生入学考试试题参考答案

二、本题共 20 分

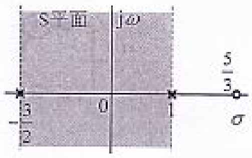


图 2.1-1

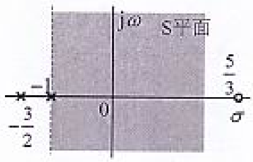


图 2.1-2

1. 该稳定 LTI 系统的系统函数为 $H(s)=\dfrac{3s-0.5}{(s-1)(s+1.5)}e^{-2s}$，

它的零、极点如图 2.1-1 所示，由于系统稳定，系统函数的收敛域必须包含虚轴，故 $H(s)$ 的收敛域 R_h 为图 2.1-1 中灰色区域，即 $-1.5<\mathrm{Re}\{s\}<1$。 **(到此得 3 分)**

系统的单位冲激响应 $h(t)$ 是 $\{H(s),\ R_h\}$ 的反拉氏变换可以写成

$H(s)=H_0(s)e^{-2s}$，$-1.5<\mathrm{Re}\{s\}<1$ 其中，e^{-2s} 的反拉氏变换是 $\delta(t-2)$， **(得 1 分)**

$H_0(s)=\dfrac{3s-0.5}{(s-1)(s+1.5)}$，$-1.5<\mathrm{Re}\{s\}<1$ 的反拉氏变换

$h_0(t)$ 可以用部分分式展开法求，

$$\begin{aligned}H_0(s)&=\left\{\frac{3s-0.5}{(s-1)(s+1.5)},\ -1.5<\mathrm{Re}\{s\}<1\right\}\\&=\left\{\frac{1}{s-1}+\frac{2}{s-1.5},\ -1.5<\mathrm{Re}\{s\}<1\right\}\\&=\left\{\frac{1}{s-1},\ \mathrm{Re}\{s\}<1\right\}+\left\{\frac{2}{s+1.5},\ 1.5<\mathrm{Re}\{s\}\right\}\end{aligned}$$ **(得 3 分)**

利用拉氏变换对：$e^{-at}u(t)\xleftrightarrow{\ \mathrm{L}\ }\dfrac{1}{s+a},\ \mathrm{Re}\{s\}>-a$

和 $-e^{-at}u(-t)\xleftrightarrow{\ \mathrm{L}\ }\dfrac{1}{s+a},\ \mathrm{Re}\{s\}<-a$

可以求得 $h_0(t)=2e^{-1.5t}u(t)-e^{t}u(-t)$ **(得 2 分)**

再利用拉氏变换的时域卷积性质，求得

$h(t)=h_0(t)*\delta(t-2)=2e^{-1.5(t-2)}u(t-2)-e^{t-2}u(-t+2)$ (2.1-1) **(得 1 分)**

2. 由(2.1-1)式可知，$h(t)\neq 0$，$t<0$，故这个连续时间 LTI 系统非因果，也就不可能用三种连续时间基本单元(相加器、数乘器和积分器)来实现。 **(得 1 分)**

只要把图 2.1-1 中的 $s=1$ 的一阶极点移到 $s=-1$，收敛域改成 $\mathrm{Re}\{s\}>1$，如图 2.1-2 所示，就设计出与原系统幅频特性完全相同、且既因果又稳定，这个因果稳定滤波器的系统函数为

$H_1(s)=\dfrac{3s-0.5}{(s+1)(s+1.5)}$，$\mathrm{Re}\{s\}>1$ (2.1-2) **(得 3 分)**

为了要把 $H_1(s)$ 用并联结构实现，需将上式的 $H_1(s)$ 部分分式展开成

$H_1(s)=\dfrac{10}{s+1.5}-\dfrac{7}{s+1}$ (2.1-3) **(得 2 分)**

按照上式，本小题所要求的滤波器用连续时间数乘器、相加器和经济区组成的并联结构实现的，方框图或信号流图分别如图 2.2-1 或图 2.2-2 所示， **(只要画对其中一个得 4 分)**

中国科学院 & 中国科学技术大学
2003 年硕士学位研究生入学考试试题参考答案

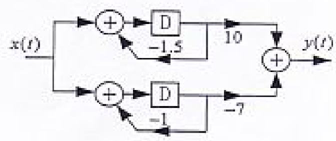


图 2.2-1　方框图

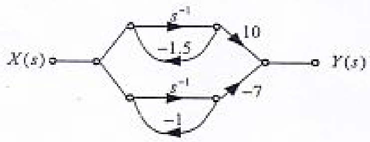


图 2.2-2　信号流图

三、本题共 20 分：

1. 系统输入输出关系可写为

$$y(t)=\int_0^1 x(t-\tau)\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{\infty}[u(\tau)-u(\tau-1)]x(t-\tau)\mathrm{d}\tau=x(t)*[u(t)-u(t-1)]$$ （得 3 分）

因此，它是一个 LTI 系统，即既满足线性，又满足时不变性。　（得 2 分）

且这个 LTI 系统的单位冲激响应 $h(t)=u(t)-u(t-1)$，　（得 1 分）

其波形如图 3.1-1 所示，　（波形画对得 1 分）

由于 $h(t)=0$，$t<0$，故它是因果的 LTI 系统。　（得 1 分）

由图 3.1-1 可知，$h(t)$ 绝对可积，故它是稳定的 LTI 系统。　（得 1 分）

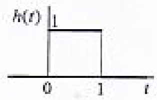


图 3.1-1

2. 已知系统的输入 $x(t)$ 为

$$x(t)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x_0(t-2n)\text{，其中 } x_0(t)=\begin{cases}\sin\pi t, & 0\le t\le 1\\ 0, & t<0, t>1\end{cases}$$

它的波形如图 3.2-1 所示。（波形画对得 2 分）$x(t)$ 通过该系统的输出为

$$y(t)=x(t)*h(t)=x(t)*[u(t)-u(t-1)]=x(t)*u(t)-x(t)*u(t-1) \quad (3.2\text{-}1)$$ （得 2 分）

令：$y_0(t)=x(t)*u(t)$

$$=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)\mathrm{d}\tau$$

（上式得 1 分）

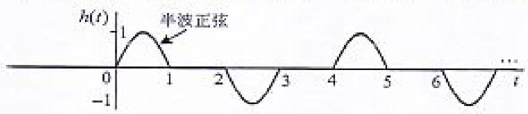


图 3.2-1

它的波形如图 3.2-2 所示

（波形画对得 1 分）

且有，

$x(t)*u(t-1)=y_0(t-1)$

（上式得 1 分）

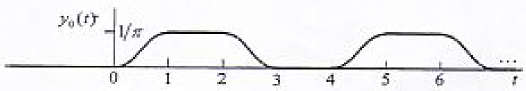


图 3.2-2

因此，系统输出 $y(t)$ 可表示为

$y(t)=y_0(t)-y_0(t-1)$

$y(t)$ 的波形如图 3.2-3 所示

（波形画对得 2 分）

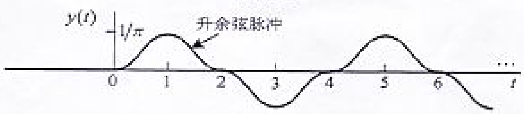


图 3.2-3

$y(t)$ 可写成 $y(t)=\dfrac{1}{\pi}\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k(1-\cos\pi t)\big[u(t-2k)-u(t-2k-2)\big]$ （得 2 分）

中国科学院 & 中国科学技术大学
2003 年硕士学位研究生入学考试试题参考答案

四、本题共 35 分

1. 令：$x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 的带限频谱分别为 $X_1(\omega)$ 和 $X_2(\omega)$，且有 $X_1(\omega)=0$，$|\omega|>2\pi f_{M1}$，和 $X_2(\omega)=0$，$|\omega|>2\pi f_{M2}$，其中，$f_{M1}=2000$ Hz，和 $f_{M2}=1000$ Hz，

图 4.1-1

在本题下面的解题中，假设 $X_1(\omega)$ 和 $X_2(\omega)$ 分别具有图 4.1-1 所示的三角和半圆形频谱。

a) 对于 $y_1(t)=x_1(t)x_2(t)$，根据傅里叶变换的频域卷积性质，它的频谱 $Y_1(\omega)$ 也是带限频谱，

$Y_1(\omega)=(1/2\pi)X_1(\omega)*X_2(\omega)=0$，$|\omega|>2\pi(f_{M1}+f_{M2})=6000\pi$　　(4.1-1)　(得 2 分)

因此，对 $y_1(t)$ 抽样不产生混叠的最大抽样间隔 $T_{1\max}=1/(2\times3000)=1/6$ ms　　(得 1 分)

b) 对于 $y_2(t)=x_1(t)+x_2(t)\cos(6000\pi t)$，它的傅里叶变换 $Y_2(\omega)$ 为

$Y_2(\omega)=X_1(\omega)+0.5[X_2(\omega+6000\pi)+X_2(\omega-6000\pi)]$　　(4.1-2)　(得 1 分)

它的频谱 $Y_2(\omega)$ 也是带限的，如图 4.1-2 所示。　　($Y_2(\omega)$ 画对得 1 分)

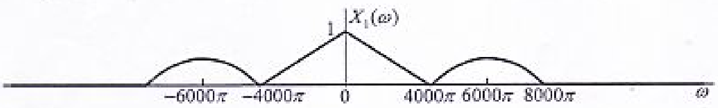


图 4.1-2

并有　$Y_2(\omega)=0$，$|\omega|>2\pi(3000+f_{M2})=8000\pi$　　(4.1-3)　(得 1 分)

因此，对 $y_2(t)$ 抽样不产生混叠的最大抽样间隔 $T_{2\max}=1/(2\times4000)=0.125$ ms　　(得 1 分)

c) 对于 $y_3(t)=R_{x_1x_2}(t)$，它的傅里叶变换 $Y_3(\omega)$ 为

$Y_3(\omega)=X_1(\omega)X_2^*(\omega)$　　(4.1-4)　(得 2 分)

由于 $X_2^*(\omega)$ 不改变频谱的宽度，且两个相互重叠的带限频谱相乘，由窄的宽度决定，故

$Y_3(\omega)=0$，$|\omega|>2\pi f_{M2}=2000\pi$　　(4.1-5)　(得 1 分)

因此，对 $y_3(t)$ 抽样不产生混叠的最大抽样间隔 $T_{3\max}=1/(2\times1000)=0.5$ ms　　(得 1 分)

d) 对于 $y_4(t)=[x_1(t)*h_0(t)]\cos(8000\pi t)+x_2(t)\sin(8000\pi t)$，

其中，令：$x_0(t)=x_1(t)*h(t)$，根据傅里叶变换的时域卷积性质，$x_0(t)$ 的频谱为

$X_0(\omega)=X_1(\omega)H(\omega)$，其中 $H(\omega)=\mathrm{Sa}(0.25\times10^{-3}\omega)$ 是 $h(t)$ 的傅里叶变换，　(得 1 分)

$H(\omega)$ 和 $X_0(\omega)$ 分别如图 4.1-3 和图 4.1-4 所示。　　($H(\omega)$ 和 $X_0(\omega)$ 画对得 1 分)

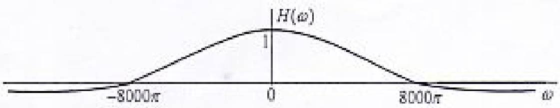


图 4.1-3

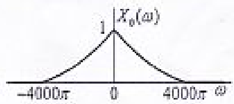


图 4.1-4

由此，并根据傅里叶变换的调制性质，$y_4(t)$ 的 $Y_4(\omega)$ 为　　(下式写对得 2 分)

$Y_4(\omega)=0.5[X_0(\omega+8000\pi)+X_0(\omega-8000\pi)]+j[X_2(\omega+8000\pi)-X_2(\omega+8000\pi)]$　　(4.1-6)

中国科学院 & 中国科学技术大学
2003 年硕士学位研究生入学考试试题参考答案

上式中的实部和虚部分别如图 4.1-5 和图 4.1-6 所示，　　　　(画对得 1 分)

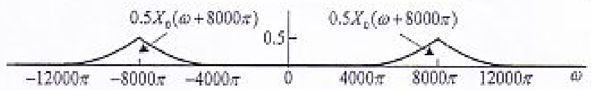


图 4.1-5

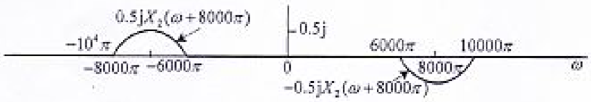


图 4.1-6

它们都是带限的带通频谱。因此，$y_4(t)$ 是一个带限的带通调制信号，在 2000 Hz 到 6000 Hz 之外没有谱分量，即

$$Y_4(\omega)=0\text{，}|\omega|<4000\pi \text{ 和 } |\omega|>12000\pi \qquad (4.1\text{-}7) \qquad (\text{得 1 分})$$

根据带通抽样定理，对 $y_4(t)$ 抽样不产生混叠的最大抽样间隔为

$$T_{4\max}=\pi/8000\pi=0.125\ \text{ms} \qquad (4.1\text{-}8) \qquad (\text{得 1 分})$$

2. 对 $y_i(t)$ 进行临界抽样，得到 $y_{i\text{P}}(t)$ 和它们的频谱 $Y_{i\text{P}}(\omega)$，$i=1,2,3$，如下：

$$y_{i\text{P}}(t)=y_i(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_{i\max}) \text{ 和 } Y_{i\text{P}}(t)=\frac{1}{T_{i\max}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}Y_i\left\{\omega-k\frac{2\pi}{T_{i\max}}\right\} \qquad (4.2\text{-}1) \qquad (\text{得 1 分})$$

因此，都能用理想低通滤波器，从 $y_{i\text{P}}(t)$ 中无失真地恢复出 $y_i(t)$，$i=1,2,3$，　　　　(得 1 分)

a) 对于由 $y_{1\text{P}}(t)$ 恢复出的 $y_1(t)$，由于 $y_1(t)=x_1(t)x_2(t)$ 和 $Y_1(\omega)=(1/2\pi)X_1(\omega)*X_2(\omega)$，无论从时域或从频域上看，都无法从 $y_1(t)$ 恢复出 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 或它们的无失真变种，因此，不能从 $y_{1\text{P}}(t)$ 中分别无失真地恢复出 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$。　　　　(得 1 分)

b) 对于由 $y_{2\text{P}}(t)$ 恢复出的 $y_2(t)$，由图 4.1-2 中 $y_2(t)$ 的频谱 $Y_2(\omega)$ 看出，可以从 $y_2(t)$ 中分别恢复出 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$，因此能从 $y_{2\text{P}}(t)$ 中分别无失真地恢复出 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$。　　　　(得 1 分)

采用的方法如图 4.2-1 所示。

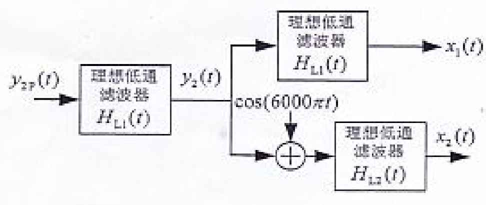


图 4.2-1

(图 4.2-1 画对和右边三式写对得 4 分)

在图 4.2-1 中：

$$H_{L0}(\omega)=\begin{cases}T_{2\max} & |\omega|<8000\pi\\ 0 & |\omega|>8000\pi\end{cases}$$

$$H_{L0}(\omega)=\begin{cases}1 & |\omega|<4000\pi\\ 0 & |\omega|>4000\pi\end{cases}$$

$$H_{L0}(\omega)=\begin{cases}2 & |\omega|<2000\pi\\ 0 & |\omega|>2000\pi\end{cases}$$

中国科学院 & 中国科学技术大学

2003 年硕士学位研究生入学考试试题参考答案

c) 对于由 $y_{3P}(t)$ 恢复出的 $y_3(t)$，由于 $y_3(t)=R_{x_1x_2}(t)$，或者 $Y_3(\omega)=X_1(\omega)X_2^*(\omega)$，无论从时域或从频域上看，都无法从 $y_3(t)$ 恢复出 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 或它们的无失真变种，因此，也不能从 $y_{3P}(t)$ 中分别无失真地恢复出 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$。（得 1 分）

3. 对于 $y_4(t)=[x_1(t)*h_0(t)]\cos(8000\pi t)+x_2(t)\sin(8000\pi t)$，采用(4.1-8)式 $T_{4\max}=0.125\ \text{ms}$ 抽样不会发生抽样可能产生的混叠现象，但是，按照(4.1-8)式，无论从 $y_{4P}(t)$ 或其频谱 $Y_{4P}(\omega)$ 上看，已抽样信号 $y_{4P}(t)$ 中只包含了 $x_1(t)$ 的全部信息，而 $x_2(t)$ 的信息全部丢失了。（得 2 分）

从时域得出上述结论的理由为：$y_{4P}(t)$ 可写成

$$\begin{aligned} y_{4P}(t) &= \{[x_1(t)*h_0(t)]\cos(8000\pi t)+x_2(t)\sin(8000\pi t)\}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_{4\max}) \\ &= [x_1(t)*h_0(t)]\cos(8000\pi t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_{4\max})+x_2(t)\sin(8000\pi t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_{4\max}) \\ &= [x_1(t)*h_0(t)]\cos(8000\pi t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_{l\max}) \qquad (4.2\text{-}2) \end{aligned}$$

（得 2 分）

因为，当 $T_{4\max}=0.125\ \text{ms}$ 时，$\sin(8000\pi t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_{4\max})=0$

或从频域上，按照(4.1-8)式，利用上面图 4.1-5 和图 4.1-6 中画出的 $Y_4(\omega)$ 的实部和虚部，可以画出 $Y_{4P}(\omega)$，$Y_4(\omega)$ 的实部经抽样后如图 4.2-2 所示，而 $Y_4(\omega)$ 的虚部经抽样后全部抵消成为零。因此，图 4.2-2 所示的计算 $Y_{4P}(\omega)$，其中只包含 $x_1(t)$ 的信息，而 $x_2(t)$ 没有了。（或得 2 分）

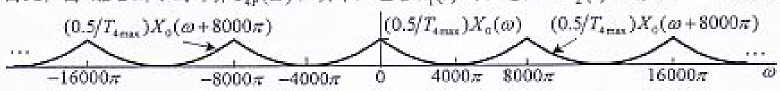


图 4.2-2

为了避免出现这样的问题，即为使 $y_4(t)$ 的已抽样信号中同时包含 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$，可以采用把抽样率提高一倍的方法，即让 $T_{4\max}=62.5\mu s$，此时，$y_{4P}(t)$ 可写成

$$y_{4P}(t)=\{[x_1(t)*h_0(t)]\cos(8000\pi t)+x_2(t)\sin(8000\pi t)\}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-n\times 62.5\mu s) \qquad (4.2\text{-}2)$$

由于 $\cos(8000\pi t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-n\times 62.5\mu s)=\cos(8000\pi t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-n\times 125\mu s)$

和 $\sin(8000\pi t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-n\times 62.5\mu s)=\sin(8000\pi t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-n\times 125\mu s-62.5\mu s)$

因此，分别对于 $y_4(t)$ 中的 $[x_1(t)*h_0(t)]\cos(8000\pi t)$ 和 $x_2(t)\sin(8000\pi t)$ 来说，抽样率并没有提高，只是 $[x_1(t)*h_0(t)]\cos(8000\pi t)$ 用到周期冲激串 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-n\times 125\mu s)$ 中 n 等于偶数的冲激，$x_2(t)\sin(8000\pi t)$ 用到周期冲激串 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-n\times 125\mu s)$ 中 n 等于奇数的冲激。这样就可 $y_{4P}(t)$ 中同时变换 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 的信息，也可从 $y_{4P}(t)$ 中完全恢复出 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$。（得 4 分）

中国科学院－中国科学技术大学
2004年招收攻读硕士学位研究生入学考试试题

试题名称：　　　　　　信号与系统

说明：1. 本试卷共五大题，总共150分。
2. 请看清每题的要求，特别注意黑体字，若要求画图的，必须概画出图形，并作必要的标注。

一、试求下列两小题：（共25分）

1. 已知单位阶跃响应为 $s(t)=tu(t)-2(t-T)u(t-T)+(t-2T)u(t-2T)$ 的连续时间LTI系统，试求并**概画出**输入为 $x(t)=(\pi/T)\sin(2\pi t/T)u(t)$ 的输出 $y(t)$。（15分）
2. 用**递推算法**求如下差分方程表示的离散时间因果LTI系统的单位冲激响应 $h[n]$，**至少计算前4个序列值**。（10分）

$$y[n]+\frac{1}{2}y[n-1]-\frac{1}{2}y[n-1]=\sum_{k=0}^{\infty}x[n-k]$$

二、试求下列各小题：（每小题15分，共45分）

1. 已知单位冲激响应为 $h(t)=\dfrac{\sin[\omega_0(t-1)]\sin[2\omega_0(t-1)]}{\pi^2(t-1)^2}$ 的连续时间 LTI 系统，试求它的频率响应 $H(\omega)$，**并概画出幅频响应** $|H(\omega)|$ 和相频响应 $\varphi(\omega)$。
2. 已知**单位阶跃响应**的拉氏变换为 $S(s)=\dfrac{2}{(s^2+2s+10)(e^{4s}-1)}$，$\mathrm{Re}\{s\}>0$ 的连续时间LTI系统，试求其**单位冲激响应** $h(t)$。
3. 一个长度为 M 点的**数字信号** $x[n]$ **分别通过**两个均为 L 点的FIR **数字滤波器**（它们的单位冲激响应分别为 $h_1[n]$ 和 $h_2[n]$）的输出分别是 $y_1[n]$ 和 $y_2[n]$，现有一个 N 点FFT程序（$N\geq M+L-1$）。试画出**仅用这个** N **点FFT程序**，高效快速地同时分别计算出 $y_1[n]$ 和 $y_2[n]$ 的**算法框图**，并加以**必要的说明**。（**提示**：数字信号 $x[n]$，以及 $h_1[n]$ 和 $h_2[n]$ 都属于**实序列**）

三、已知单位冲激响应为 $h(t)=\dfrac{1}{2T}\left\{\mathrm{Sa}\left(\dfrac{\pi t}{T}\right)+2\mathrm{Sa}\left(\dfrac{\pi t}{T}-\dfrac{\pi}{2}\right)+\mathrm{Sa}\left(\dfrac{\pi t}{T}-\pi\right)\right\}$ 的连续时间LTI系统，其中的函数 $\mathrm{Sa}(x)=\dfrac{\sin x}{x}$，试求：（共25分）

1. 该系统的频率响应 $H(\omega)$，**并概画出它的幅频响应** $|H(\omega)|$ **和相频响应** $\varphi(\omega)$，它是什么类型（低通、高通、带通、全通、线性相位等）滤波器？（15分）
2. 当系统的输入为 $x(t)=\dfrac{\sin(\pi t/2T)}{\pi t}\sin\left(\dfrac{2\pi t}{T}\right)+\sum_{k=0}^{\infty}2^{-k}\cos\left[k\left(\dfrac{\pi}{2T}t+\dfrac{\pi}{4}\right)\right]$ 时，试求统的输出 $y(t)$。（10分）

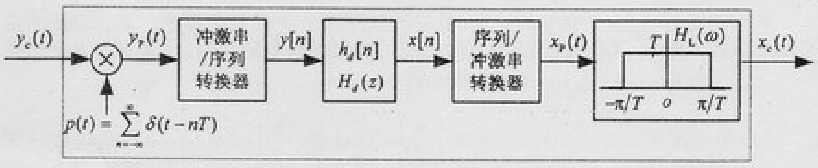
四、某数字滤波器在 Z 平面上只有一个$2N$阶极点$z=0$和一个$2N$阶零点$z=-1$，并已知该滤波器对常数序列输入具有单位增益。试求：(共 35 分)

1. 数字滤波器的系统函数$H(z)$(应确定常数H_0)及其收敛域；(5 分)
2. 数字滤波器的频率响应$\tilde{H}(\Omega)$(或$H(e^{j\Omega})$)，并仍以$N=2$为例，概画出幅频响应$|\tilde{H}(\Omega)|$和相频响应$\tilde{\varphi}(\Omega)$，它是什么类型(低通、高通、带通、全通、线性相位等)滤波器？(7 分)
3. 数字滤波器的单位冲激响应$h[n]$，它是 FIR 还是 IIR 滤波器？并以$N=2$为例，概画出$h[n]$的序列图形。(6 分)
4. 仍以$N=2$为例，试分别画出基于系统函数$H(z)$和单位冲激响应$h[n]$的、该滤波器的两种实现结构(或信号流图)；(10 分)
5. 为了设计频率响应$\tilde{H}_1(\Omega)=\tilde{H}(\Omega-\pi)$的新的数字滤波器，它又是什么类型(低通、高通、带通、全通、线性相位、FIR 和 IIR 等)滤波器？并仍以$N=2$为例，画出新滤波器的两种相应的结构(或信号流图)。(7 分)

五、长途电信网中由于传输线两端负载不匹配，会产生反射现象，若发射信号为$x_c(t)$，经两端多次反射到接收端的信号$y_c(t)$可以表示如下，其中，α为信号来回反射一次的衰减，T_0为来回一次的传输延时。(本题共 20 分)

$$y_c(t)=\sum_{l=0}^{\infty}\alpha^l x_c(t-lT_0)$$

1. 试问从$x_c(t)$到$y_c(t)$的系统是否是的 LTI 系统，并写出它的$h(t)$，什么条件下系统稳定？然后，求出它的逆系统的单位冲激响应$h_I(t)$，此逆系统因果、稳定吗？并画出用连续时间相加器、数乘器和纯延时器构成$h_I(t)$的方框图。(8 分)
2. 如果$x_c(t)$是带限于ω_M的带限信号，即其频谱$X(\omega)=0$，$|\omega|>\omega_M$，可以用离散时间(数字)信号处理的方法，从$y_c(t)$中恢复出$x_c(t)$，处理的方框图如下：



又已知反射延时T_0满足$\pi/\omega_M<T_0<\pi/2\omega_M$，若取抽样间隔$T=T_0/2$，会产生混叠吗？。并试求在$T=T_0/2$时，上图中数字滤波器的单位冲激响应$h_d[n]$，写出其差分方程表示，画出它用三种离散时间基本单元构成的系统方框图(或信号流图)。(12 分)

中国科学院 & 中国科学技术大学

2004 年硕士学位研究生入学考试试题参考答案

试题名称：　　　　　　　　信号与系统

一．试求下列两小题（共25分）

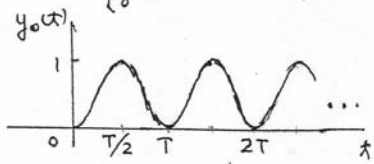
1. $y(t)=x(t)*h(t)=\left[\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau\right]*\frac{d}{dt}h(t)$　　4分

$h(t)=\frac{d}{dt}s(t)=u(t)-2u(t-T)+u(t-2T)$　　2分

$\frac{d}{dt}h(t)=\delta(t)-2\delta(t-T)+\delta(t-2T)$　　1分

令 $y_0(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{t}\frac{\pi}{T}\sin\left(\frac{2\pi\tau}{T}\right)u(\tau)d\tau=\left[\int_{0}^{t}\frac{\pi}{T}\sin\left(\frac{2\pi\tau}{T}\right)d\tau\right]u(t)$

$=\frac{1}{2}\left[1-\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\right]u(t)$　　4分

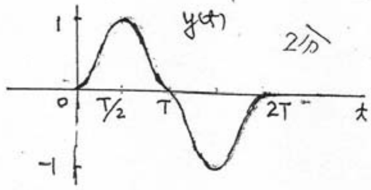


$y_0(t)$ 的波形如右图所示，因此

$y(t)=y_0(t)*\left[\delta(t)-2\delta(t-T)+\delta(t-2T)\right]$

$=y_0(t)-2y_0(t-T)+y_0(t-2T)$　　2分

它的波形如右下图所示



2分

2. 当输入 $x[n]=\delta[n]$ 时，原方程的右边为 $\sum_{k=0}^{\infty}\delta[n-k]=u[n]$，因此系统的单位冲激响应 $h[n]$ 满足的差分方程为：

$h[n]+0.5h[n-1]-0.5h[n-2]=u[n]$.　　3分

由于系统为因果LTI系统，故有 $h[n]=0$，$n<0$，只要用后推方程逐推出 $h[n]$，$n\geq 0$ 的各个序列值，后推方程为

$h[n]=u[n]-0.5h[n-1]+0.5h[n-2]$　　3分

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{当 } n=0 \text{ 时}, & h[0]=u[0]-0.5h[-1]+0.5h[-2]=1 \\
n=1 \text{ 时}, & h[1]=u[1]-0.5h[0]+0.5h[-1]=0.5 \\
n=2 \text{ 时} & h[2]=u[2]-0.5h[1]+0.5h[0]=1.25 \\
n=3 \text{ 时} & h[3]=u[3]-0.5h[2]+0.5h[1]=0.625
\end{array}\right\} \text{4分}$$

$n=4$ 时　$h[4]=u[4]-0.5h[3]+0.5h[2]=1.3125$

⋮　　　　　　⋮

中国科学院 & 中国科学技术大学

2004年硕士学位研究生入学考试试题参考答案

二、解下列3小题（每小题15分，共45分）

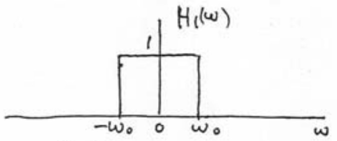
1. $h(t)=h_0(t-1)$， $h_0(t)=\frac{\sin\omega_0 t}{\pi t}\cdot\frac{\sin 2\omega_0 t}{\pi t}$ 　　2分

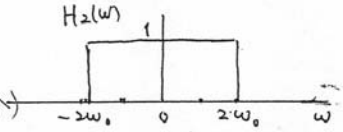
$H(\omega)=H_0(\omega)e^{-j\omega}$，利用频域卷积性质，可求得 $h_0(t)$ 的傅里叶变换，

即 $H_0(\omega)=\frac{1}{2\pi}H_1(\omega)*H_2(\omega)$，其中

$$H_1(\omega)=\mathcal{F}\left\{\frac{\sin\omega_0 t}{\pi t}\right\}=\begin{cases}1, & |\omega|<\omega_0\\ 0, & |\omega|>\omega_0\end{cases}$$

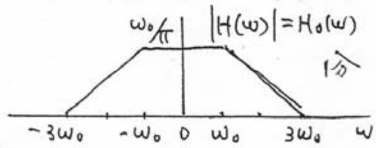
$$H_2(\omega)=\mathcal{F}\left\{\frac{\sin 2\omega_0 t}{\pi t}\right\}=\begin{cases}1, & |\omega|<2\omega_0\\ 0, & |\omega|>2\omega_0\end{cases}$$



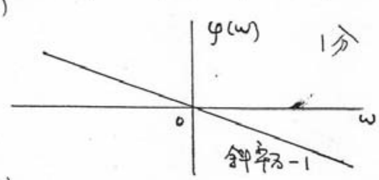


它们分别为截止频率为 ω_0 和 $2\omega_0$ 的理想低通滤波器，分别如右图所示。(6分)

利用图解法求卷积，可以求得



$$H_0(\omega)=\begin{cases}(\omega+3\omega_0)/2\pi & -3\omega_0\le\omega\le-\omega_0\\ \omega_0/\pi & |\omega|<\omega_0\\ (3\omega_0-\omega)/2\pi & \omega_0\le\omega\le3\omega_0\\ 0 & |\omega|>3\omega_0\end{cases}$$ 　(4分)



系统的频率响应 $H(\omega)$ 为

$H(\omega)=\mathcal{F}\{h(t)\}=\mathcal{F}\{h_0(t-1)\}$

$=H_0(\omega)e^{-j\omega}$ 　　(1分)

故幅频响应 $|H(\omega)|=H_0(\omega)$，相频响应为 $\varphi(\omega)=-\omega$，它们的图形如右图所示。

2. 由于连续时间LTI系统的单位冲激响应 $h(t)$ 和其单位阶跃响应的关系为 $h(t)=\frac{d}{dt}s(t)$，因此系统函数 $H(s)=s\cdot S(s)$，即

$H(s)=\frac{2s}{(s^2+2s+10)(e^{4s}-1)}$，$Re\{s\}>0$． 　　2分

并可改写成 $H(s)=\frac{2s\,e^{-4s}}{[(s+1)^2+9](1-e^{-4s})}=H_0(s)\frac{1}{1-e^{-4s}}\cdot e^{-4s}$ 　　2分

中国科学院 & 中国科学技术大学

2004年硕士学位研究生入学考试试题参考答案

其中 $H_0(s)=\frac{2(s+1)-2}{(s+1)^2+3^2}=\frac{2(s+1)}{(s+1)^2+3^2}-\frac{2}{3}\frac{3}{(s+1)^2+3^2}\quad Re\{s\}>-1$

$h_0(t)=\mathcal{L}^{-1}\{H_0(s)\}=2e^{-t}\cos 3t\,u(t)-\frac{2}{3}e^{-t}\sin 3t\,u(t)$ 3分

$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{1-e^{-4s}},\ Re\{s\}>0\}=\sum_{n=0}^{\infty}\delta(t-4n)$ 2分

$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-4s}\}=\delta(t-4)$ 1分

因此，运用拉氏变换的时域卷积性质，可求得

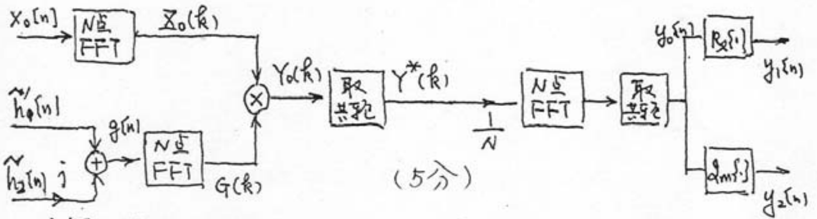
$$h(t)=h_0(t)*\left[\sum_{n=0}^{\infty}\delta(t-4n)\right]*\delta(t-4)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}h_0(t-4(n+1))=\sum_{n=1}^{\infty}h_0(t-4n)$$ 3分

其中 $h_0(t)=e^{-t}[2\cos 3t-\frac{2}{3}\sin 3t]u(t)$.

该系统既因果，又稳定。 2分

3. 仅用3次调用的N点FFT程序，同时分别计算出实序列卷积 $y_1[n]=x[n]*h_1[n]$ 和 $y_2[n]=x[n]*h_2[n]$ 的算法框图如下：



该算法说明如下：

① 首先用补零的方法把 $x[n]$、$h_1[n]$ 和 $h_2[n]$ 构造成3个N点实序列

即：$x_0[n]=\begin{cases}x[n], & n=0,1,\cdots,M-1\\ 0 & n=M,M+1\cdots N-1\end{cases}\xleftrightarrow{N点DFT}X_0(k)$

$\hat{h}_1[n]=\begin{cases}h_1[n], & n=0,1\cdots L-1\\ 0 & n=L,L+1,\cdots N-1\end{cases}\xleftrightarrow{N点DFT}\hat{H}_1(k)$

$\hat{h}_2[n]=\begin{cases}h_2[n] & n=0,1\cdots L-1\\ 0 & n=L,L+1\cdots N-1\end{cases}\xleftrightarrow{N点DFT}\hat{H}_2(k)$

中国科学院 & 中国科学技术大学
2004年硕士学位研究生入学考试试题参考答案

并把两个N点实序列 $\hat{h}_1[n]$ 和 $\hat{h}_2[n]$ 分别作为实部和虚，构成一个N点复序列 $g[n]$

即 $g[n]=\hat{h}_1[n]+j\hat{h}_2[n] \xleftrightarrow{N点DFT} G(k)=\hat{H}_1(k)+j\hat{H}_2(k)$ （2分）

② 然后，分别用N点FFT程序计算 $x_0[n]$ 和 $g[n]$ 的N点DFT $X_0(k)$ 和 $G(k)$，这两个N点DFT相乘得到 $Y_0(k)$，即

$Y_0(k)=X_0(k)G(k)=X_0(k)\hat{H}_1(k)+jX_0(k)\hat{H}_2(k)$

并根据DFT的正反变换公式，则有

$y_0[n]=IDFT\{Y_0(k)\}=DFT\{\frac{1}{N}Y_0^*(k)\}$

可以用N点DFT程序计算 $Y_0(k)$ 的N点IDFT $y_0[n]$。

4分

③ $y_0[n]=IDFT\{Y_0(k)\}=IDFT\{X_0(k)\hat{H}_1(k)+jX_0(k)\hat{H}_2(k)\}$

$= x_0[n]*\hat{h}_1[n]+j\,x_0[n]*\hat{h}_2[n]$

$= y_1[n]+j\,y_2[n]$.

由于 $x_0[n]$，$\hat{h}_1[n]$ 和 $\hat{h}_2[n]$ 分别是M点序列 $x[n]$ 和L点序列 $h_1[n]$ 与 $h_2[n]$ 补零加长的序列，且 $N\geq M+L-1$，因此，上述计算出的 $y_0[n]$ 的实部 $y_1[n]$ 和虚部 $y_2[n]$ 正是 $x[n]*h_1[n]$ 和 $x[n]*h_2[n]$。因此只要对 $y_0[n]$ 取实部和虚部，分别可得到 $x[n]*h_1[n]$ 和 $x[n]*h_2[n]$，即

$y_1[n]=Re\{y_0[n]\}$，　$y_2[n]=Im\{y_0[n]\}$

4分

中国科学院 & 中国科学技术大学
2004 年硕士学位研究生入学考试试题参考答案

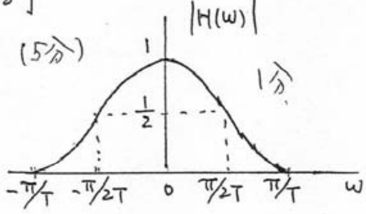
三、2小题分别求解如下：（共25分）

1. $h(t)$ 可以写成 $h(t)=\frac{1}{2T}Sa(\frac{\pi}{T}t)*[\delta(t)+2\delta(t-\frac{T}{2})+\delta(t-T)]$ （3分）

由于 $\frac{1}{T}Sa(\frac{\pi}{T}t)\xleftrightarrow{\mathcal{F}}H_{LP}(\omega)=\begin{cases}1, & |\omega|<\pi/T\\ 0, & |\omega|>\pi/T\end{cases}$ （2分）

利用傅里叶变换的时域卷积性质，可以得到该连续时间LTI系统的频率响应 $H(\omega)$

$$H(\omega)=\frac{1}{2}H_{LP}(\omega)[1+2e^{-j\frac{\omega T}{2}}+e^{-j\omega T}]$$
$$=\frac{1}{2}H_{LP}(\omega)e^{-j\frac{\omega T}{2}}[e^{j\frac{\omega T}{4}}+e^{-j\frac{\omega T}{4}}]^2$$
$$=\frac{1}{2}(1+\cos\omega T)H_{LP}(\omega)e^{-j\frac{\omega T}{2}}\quad(5分)$$

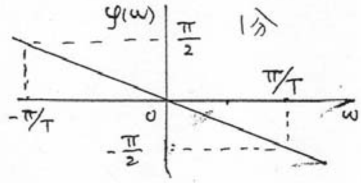


1分

因此，有

$$|H(\omega)|=\begin{cases}\frac{1+\cos\omega T}{2}, & |\omega|<\pi/T\\ 0, & |\omega|>\pi/T\end{cases}\quad 1分$$

$$\varphi(\omega)=-\frac{\omega T}{2}$$



1分

幅频响应 $|H(\omega)|$ 和相频响应 $\varphi(\omega)$ 的图形如右图所示，这是一个具有线性相位的升余弦低通滤波器。（2分）

2. 输入 $x(t)$ 可以看成有两部分之和，即 $x(t)=x_1(t)+x_2(t)$ （1分）

其中 $x_1(t)=x_0(t)\sin(\frac{2\pi}{T}t)$

由于 $x_0(t)=\frac{\sin(\frac{\pi}{2T}t)}{\pi t}\xleftrightarrow{\mathcal{F}}X_0(\omega)=\begin{cases}1, & |\omega|<\pi/2T\\ 0 & |\omega|>\pi/2T\end{cases}$

故 $x_1(t)$ 是带限于 $(\pi/2T)$ 的矩形频谱信号 $x_0(t)$ 的正弦调制信号，正弦载波频率为 $\frac{2\pi}{T}$，它的频谱为：

$$X_1(\omega)=\mathcal{F}\{x_1(t)\}=\frac{j}{2}[X_0(\omega+\frac{2\pi}{T})-X_0(\omega-\frac{2\pi}{T})]$$

由此 $x_1(t)$ 通过滤波器的输出频谱 $Y_1(\omega)=X_1(\omega)H(\omega)=0$.

中国科学院 & 中国科学技术大学
2004年硕士学位研究生入学考试试题参考答案

故 $x_1(t)$ 通过滤波器的输出 $y_1(t)=0$。（4分）

$x(t)$ 中的第2部分 $x_2(t)=\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}\cos\left[k\frac{\pi}{2T}t+\frac{k\pi}{4}\right]$，这是一个周期信号的三角级数展开，基波频率 $\omega_0=\pi/2T$。由于滤波器的频率响应在 $k\frac{\pi}{2T}$ 处为：

$$H\left(k\frac{\pi}{2T}\right)=\begin{cases}1, & k=0\\ \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}} & k=1\\ 0 & k\geq 2\end{cases}$$

因此只有 $x_2(t)$ 中的直流分量和基波分量可以通过该滤波器，二次及二次以上的谐波均被抑制，故 $x_2(t)$ 通过滤波器的那部分输出为

$y_2(t)=1+\frac{1}{4}\cos\left[\frac{\pi}{2T}t\right]$ （4分）

最后，$x(t)$ 通过系统的输出为 $y(t)=y_1(t)+y_2(t)=1+\frac{1}{4}\cos\left(\frac{\pi}{2T}t\right)$

（1分）

四、本题的5个小题分别求解如下（共35分）

1. 根据数字滤波器的零、极点分布，其系统函数为

$H(z)=H_0(1+z^{-1})^{2N}$，$|z|>0$。（4分）

由于滤波器对常数输入的增益为1，即 $H(z)|_{z=1}=1$，故 $H_0=\frac{1}{2^{2N}}$

因此有 $H(z)=\frac{1}{2^{2N}}(1+z^{-1})^{2N}$，$|z|>0$，（1分）

2. $\tilde{H}(\Omega)=H(z)|_{z=e^{j\Omega}}=\frac{1}{2^{2N}}(1+e^{-j\Omega})^{2N}$

$=\left[\cos\frac{\Omega}{2}\right]^{2N}e^{-jN\Omega}$ （3分）

当 $N=2$ 时 $\tilde{H}(\Omega)=\left[\cos\frac{\Omega}{2}\right]^4 e^{-j2\Omega}$

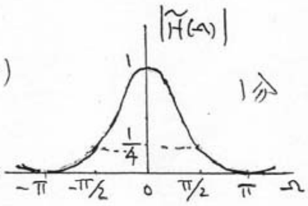
幅频特性为 $|\tilde{H}(\Omega)|=\left[\cos\frac{\Omega}{2}\right]^4$

1分

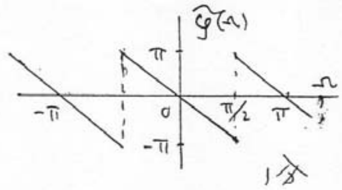
相频特性为 $\tilde{\varphi}(\Omega)=-2\Omega$

它们的图形如右图所示。

可见该数字滤波器是线性相位的低通滤波器。（1分）



1分



1分

中国科学院 & 中国科学技术大学
2004年硕士学位研究生入学考试试题参考答案

3. $h[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\} = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{(1+z^{-1})^{2N}}{2^{2N}},\ |z|>0\right\}$

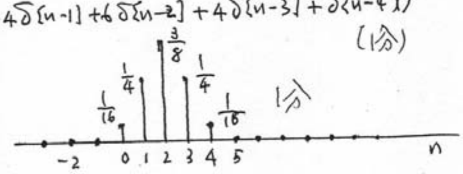
$= \mathcal{Z}^{-1}\left\{\sum_{k=0}^{2N}\frac{(2N)!}{k!(2N-k)!}z^{-k},\ |z|>0\right\}\frac{1}{2^{2N}}$

$= \sum_{k=0}^{2N}\frac{1}{2^{2N}}\frac{(2N)!}{k!(2N-k)!}\delta[n-k]$ （4分）

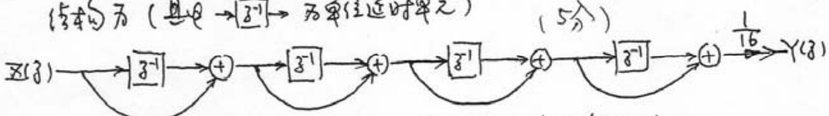
这是一个(2N+1)点的二项式係数序列，它是FIR数字滤波器。

当 N=2时，$h[n] = \frac{1}{16}(\delta[n]+4\delta[n-1]+6\delta[n-2]+4\delta[n-3]+\delta[n-4])$ （1分）

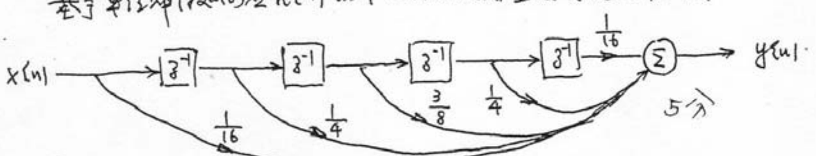
序列图形如右图所示



4. 当 N=2时，基于系统函数的数字滤波器的级联实现结构为（其中 $\rightarrow\boxed{z^{-1}}\rightarrow$ 为单位延时单元） （5分）



基于单位冲激响应 h[n] 的FIR滤波器直接实现结构为

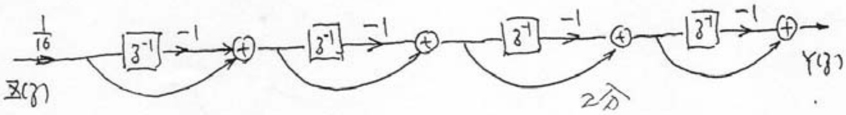


5. 新滤波器 $\hat{H}_1(\Omega)=\hat{H}(\Omega-\pi) = \frac{1}{2^{2N}}(1-e^{-j\Omega})^{2N}$ （1分）

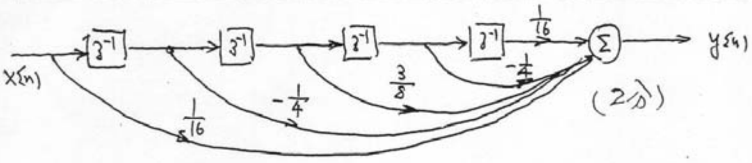
其系统函数为 $H_1(z) = \frac{1}{2^{2N}}(1-z^{-1})^{2N}$ （1分）

单位冲激响应为 $h_1[n] = \sum_{k=0}^{2N}(-1)^k\frac{1}{2^{2N}}\frac{(2N)!}{k!(2N-k)!}\delta[n-k]$ （1分）

同此，当 N=2 时的两种结构分别为：



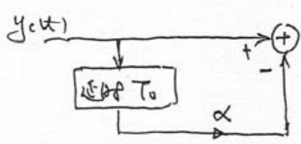
中国科学院 & 中国科学技术大学
2004年硕士学位研究生入学考试试题参考答案



（2分）

五、本题中2小题分别求解如下（共20分）

1. 接收端信号 $y_c(t)$ 可写成 $y_c(t)=x_c(t)*\left[\sum_{l=0}^{\infty}\alpha^l\delta(t-lT_0)\right]$
故这是一个单位冲激响应 $h(t)=\sum_{l=0}^{\infty}\alpha^l\delta(t-lT_0)$ 的因果LTI系统 （3分）
系统稳定的条件为 $|\alpha|<1$
其系统函数 $H(s)=\mathcal{L}\{h(t)\}=\sum_{l=0}^{\infty}(\alpha e^{-sT_0})^l=\frac{1}{1-\alpha e^{-sT_0}}$ （1分）
其逆系统的系统函数为 $H_I(s)=\frac{1}{H(s)}=1-\alpha e^{-sT_0}$ （2分）
此逆系统既因果，又稳定。
逆系统的单位冲激响应为
（1分）$h_I(t)=\delta(t)-\alpha\delta(t-T_0)$
其方框图实现如右图所示。



（2分）

2. 由于 $x_c(t)$ 是带限于 ω_M 的带限信号，且 $\frac{\pi}{\omega_M}<T_0<\frac{2\pi}{\omega_M}$，故题图中的抽样间隔选 $T=T_0/2$ 满足不产生混叠的条件 $T\le\frac{\pi}{\omega}$。（1分）
抽样信号 $y_p(t)=y_c(t)\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}y_c(nT)\delta(t-nT)$
$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\sum_{l=0}^{\infty}\alpha^l x_c[(n-2l)T]\right\}\delta(t-nT)$$
转换成的离散时间序列 $y[n]=y_c(nT)=\sum_{l=0}^{\infty}\alpha^l x_c[(n-2l)$ （3分）
为使题图中最后的输出恢复成 $x_c(t)$，
则理想低通滤波器 $H_L(\omega)$ 的输入应为 $x_p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_c(nT)\delta(t-nT)$
故序列/冲激串转换器前的离散时间系统的输出应为 （2分）
$x[n]=x_c(nT)$

中国科学院 & 中国科学技术大学

2004年硕士学位研究生入学考试试题参考答案

因此，离散时间系统的系统函数 $H_d(z)$ 应为

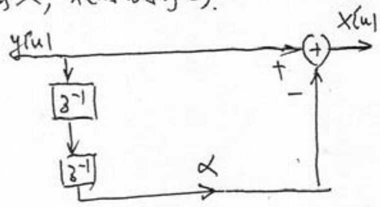
$$H_d(z)=\frac{X(z)}{Y(z)}=\frac{X(z)}{\mathcal{Z}\left\{\sum_{l=0}^{\infty}(\alpha z^{-2})^{l}\right\}}=\frac{X(z)}{X(z)/(1-\alpha z^{-2})}=1-\alpha z^{-2}\quad(2分)$$

$$h_d[n]=\mathcal{Z}^{-1}\{H_d(z)\}=\mathcal{Z}^{-1}\{1-\alpha z^{-2}\}=\delta[n]-\alpha\delta[n-2]\quad(1分)$$

其差分方程表示为 $x[n]=y[n]-\alpha y[n-2]$ (1分)

其中 $y[n]$ 是离散时间系统的输入，$x[n]$ 为输出。

它的三种基本单元构成的实现结构如右图所示



(2分)

2005年招收攻读硕士学位研究生入学考试试题

试题名称：　信号与系统

说明：1. 本试卷共七大题，总共150分。

2. 请看清每题的要求，特别注意黑体字。若结果是实函数，必须写出实函数表达式；若要求概画出图形的，必须作必要的标注。

一、已知当输入信号为 $x(t)$ 时，某连续时间因 LTI 系统的输出信号为 $y(t)$，$x(t)$ 和 $y(t)$ 的波形如图 1.1 所示。试用**时域方法**求：（共 26 分）

1. 该系统的单位**阶跃**响应 $s(t)$，并概画出 $s(t)$ 的波形；（12 分）
2. 在系统输入为图 1.2 所示的 $x_1(t)$ 时的输出信号 $y_1(t)$，并概画出 $y_1(t)$ 的波形。（14 分）

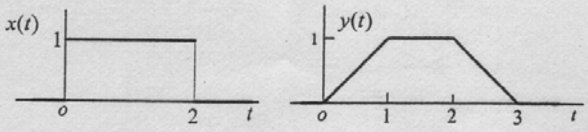


图 1.1

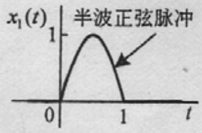


图 1.2

二、由差分方程 $y[n]-0.5y[n-1]=\sum_{k=0}^{4}\left(x[n-k]-2x[n-k-1]\right)$ 和非零起始条件 $y[-1]=1$ 表示的离散时间**因果**系统，当系统输入 $x[n]=\delta[n]$ 时，**试用递推算法求**：（共 16 分）

1. 该系统的零状态响应 $y_{zs}[n]$（至少计算出前 6 个序列值）；（10 分）
2. 该系统的零输入响应 $y_{zi}[n]$（至少计算出前 4 个序列值）；（6 分）

三、已知连续时间信号 $x(t)=\dfrac{\sin[2\pi(10^3 t-1)]}{2\pi(t-10^{-3})}\cos(2\pi\times10^6 t)$ 毫安，若它是能量信号，试求其能谱密度函数和它在单位电阻上消耗的能量；若它是功率信号，则求其功率谱密度函数和它在单位电阻上消耗的平均功率。（共 14 分）

四、已知 $\tilde{x}[n]$ 是周期为 4 的周期序列，且已知 8 点序列 $x[n]=\tilde{x}[n]$，$0\le n\le 7$，的 8 点 DFT 系数为：$X(0)=X(2)=X(4)=X(6)=1$，$X(k)=0$，其它 k。试求：（共 24 分）

1. 周期序列 $\tilde{x}[n]$，并概画出它的序列图形；（12 分）
2. 该周期序列 $\tilde{x}[n]$ 通过单位冲激响应为 $h[n]=(-1)^2\dfrac{\sin^2(\pi n/2)}{\pi^2 n^2}$ 的数字滤波器后的输出 $y[n]$，并概画出它的序列图形。（12 分）

五、已知 $x(t)$ 是最高频率为 4 kHz 的连续时间带限信号，（共 24 分）

1. 若对 $x(t)$ 进行平顶抽样获得的已抽样信号 $x_p(t)$ 如图 5 所示，试求由 $x_p(t)$ 恢复出 $x(t)$ 的重构滤波器的频率响应 $H_L(\omega)$，并概画出其幅频响应和相频响应；（16 分）

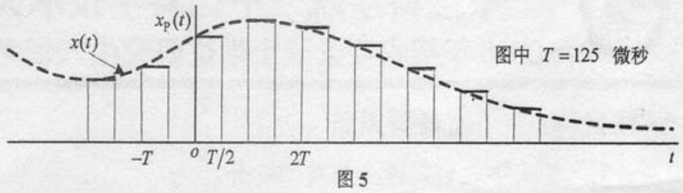


图 5

2. 你在 1 小题求得的重构滤波器为什么不可实现？为实现无失真恢复原信号，需对抽样频率和重构滤波器频率响应 $H_L(\omega)$ 作怎样的修改？（8 分）

六、如图 6 的信号流图所示的数字滤波器，试求：（共 22 分）

1. 它的系统函数 $H(z)$ 及其收敛域，并画出它用一个一阶全通滤波器和一个 4 阶 FIR 滤波器的级联实现的方框图或信号流图；（12 分）
2. 概画出该数字滤波器的幅频响应 $|\tilde{H}(\Omega)|$（或 $|H(e^{j\Omega})|$）。（10 分）

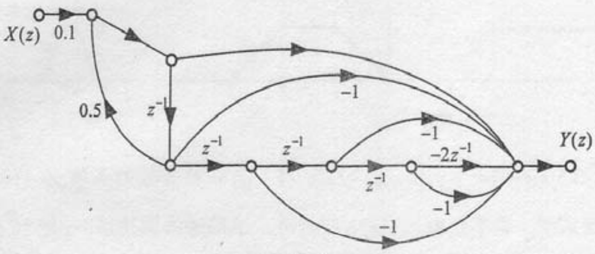


图 6

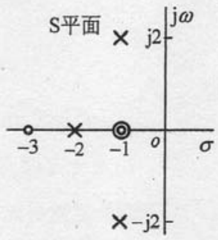


图 7

七、某连续时间实的因果 LTI 系统的零、极点见图 7，并已知 $\int_{0_-}^{\infty} h(t)dt = 1.5$，其中 $h(t)$ 为该系统的单位冲激响应。试求：（共 24 分）

1. 它是什么类型的系统（全通或最小相移系统），并求 $h(t)$（应为实函数）；（14 分）
2. 写出它的线性实系数微分方程表示；（2 分）
3. 它的逆系统的单位冲激响应 $h_1(t)$，该逆系统是可以实现（即既因果又稳定）的吗？（8 分）

2005年硕士学位研究生入学考试试题参考答　案

试题名称：　　　　　　　　信号与系统

一、已知当输入信号为 $x(t)$ 时，某连续时间因 LTI 系统的输出信号为 $y(t)$，$x(t)$ 和 $y(t)$ 的波形如图 1.1 所示。试用时域方法求：（共 **26** 分）

1. 该系统的单位阶跃响应 $s(t)$，并概画出 $s(t)$ 的波形；（**12** 分）
2. 系统输入为图 1.2 所示的 $x_1(t)$ 时的输出信号 $y_1(t)$，并概画出它的波形。（**14** 分）

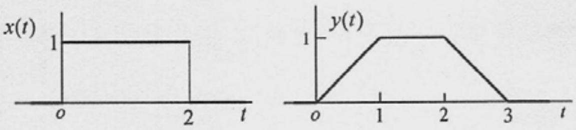


图 1.1

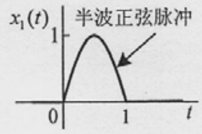


图 1.2

1．解： 可以用多种不同时域方法求该系统的单位阶跃响应 $s(t)$。

方法一： 先求单位阶跃响应 $h(t)$，再用 $s(t)=\int_{-\infty}^{t} h(\tau)\mathrm{d}\tau = h(t)*u(t)$ 求出 $s(t)$。

由图 1.1 看出：$x(t)=u(t)-u(t-2)$（1 分）

和　$$\begin{aligned} y(t) &= tu(t)-(t-1)u(t-1)-(t-2)u(t-2)+(t-3)u(t-3) \\ &= tu(t)*[\delta(t)-\delta(t-1)-\delta(t-2)+\delta(t-3)] \\ &= u(t)*u(t)*[\delta(t)-\delta(t-1)]*[\delta(t)-\delta(t-2)] \\ &= [u(t)-u(t-2)]*[u(t)-u(t-1)] = x(t)*[u(t)-u(t-1)] \end{aligned}$$（6 分）

由于该系统是 LTI 系统，$y(t)=x(t)*h(t)$，对比上式**可得**

$$h(t)=u(t)-u(t-1) \quad (1 \text{ 分}) \qquad (2\text{-}1)$$

$h(t)$ 的波形如图 1.3 右图所示。

或者，直接由图 1.1 看出 $y(t)=x(t)*[u(t)-u(t-1)]$，即如图 1.3 所示那样

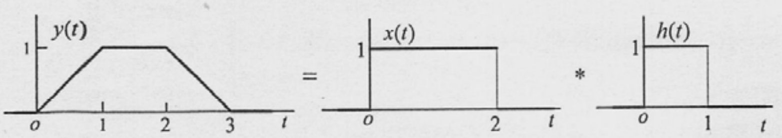


图 1.3（7 分）

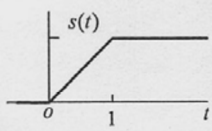


图 1.4

由此得到：$h(t)=u(t)-u(t-1)$（1 分）

还可以按如下方法求 $h(t)$：按照卷积积分的微分性质，$y'(t)=x'(t)*h(t)$

显然，$x'(t)=\delta(t)-\delta(t-2)$（2 分），并由 $y(t)$ 波形微分得到 $y'(t)$ 波形如图 1.5 所示，

即　$y'(t)=u(t)-u(t-1)-u(t-2)+u(t-3)$（5 分）

因此得到：$h(t)=u(t)-u(t-1)$（1 分）

然后，$s(t)=h(t)*u(t)=[u(t)-u(t-1)]*u(t)=tu(t)-(t-1)u(t-1)$（2 分）　　(2-2)

$s(t)$ 的波形如图 1.4 所示。（2 分）

方法二： 直接求出单位阶跃响应 $s(t)$。

2005年硕士学位研究生入学考试试题参考答　案

LTI 系统的 $s(t)$ 是系统输入为 $u(t)$ 时的输出，由图 1.1 中的 $x(t)$ 的波形可知，

$$u(t)=x(t)+x(t-2)+x(t-4)+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}x(t-2n)$$；（4 分）

根据 LTI 系统满足线性性质，系统对 $u(t)$ 的响应 $s(t)$ 为：

$$s(t)=y(t)+y(t-2)+y(t-4)+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}y(t-2n)=tu(t)-(t-1)u(t-1)$$（4 分）

按上式波形叠加图见图 1.6（2 分），由此得到 $s(t)$ 的波形图见上面图 1.4。（2 分）

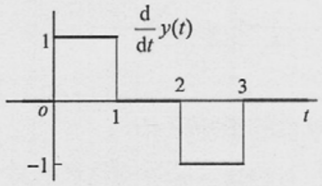


图 1.5

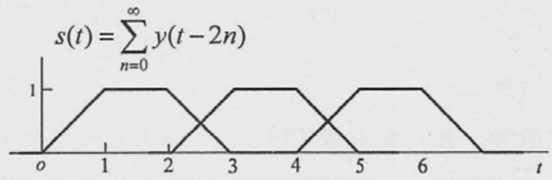


图 1.6

2. 解：由 1. 小题已求得：$h(t)=u(t)-u(t-1)$，则有，$\frac{d}{dt}h(t)=\delta(t)-\delta(t-1)$（1 分）

该 LTI 系统当输入 $x_1(t)$ 时的输出信号 $y_1(t)$ 为：

$$y_1(t)=h(t)*x_1(t)=\frac{dh(t)}{dt}*\int_{-\infty}x_1(\tau)d\tau=\left[\int_{-\infty}x_1(\tau)d\tau\right]*[\delta(t)-\delta(t-1)]$$

$$=y_0(t)-y_0(t-1)\qquad 其中，y_0(t)=\int_{-\infty}x_1(\tau)d\tau（2 分）\tag{2-3}$$

由图 1.2 可得到：$x_1(t)=(\sin\pi t)[u(t)-u(t-1)]=\sin\pi t u(t)+\sin\pi(t-1)u(t-1)$

$$y_0(t)=\int_{-\infty}\sin\pi\tau u(\tau)d\tau-\int_{-\infty}\sin\pi\tau u(\tau-1)d\tau=\left[\int_0\sin\pi\tau d\tau\right]u(t)-\left[\int_1\sin\pi\tau d\tau\right]u(t-1)$$

$$=\frac{1}{\pi}\{(1-\cos\pi t)u(t)+[1-\cos\pi(t-1)]u(t-1)\}$$（5 分）

$y_0(t)$ 的波形如图 1.7 所示。（2 分）

将 $y_0(t)$ 代入(2-3)式，得到所求系统输出为：

$$y_1(t)=\frac{1}{\pi}\{(1-\cos\pi t)u(t)-[1-\cos\pi(t-2)]u(t-2)\}\tag{2-4}$$（2 分）

$y_1(t)$ 的波形如图 1.8 所示。（2 分）

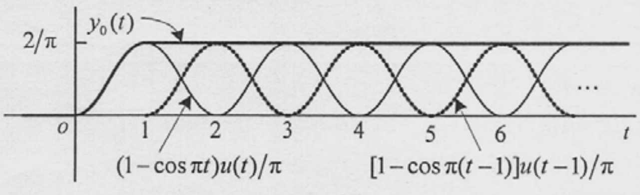


图 1.7

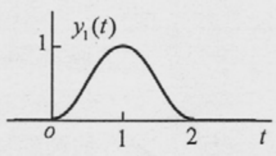


图 1.8

2005年硕士学位研究生入学考试试题参考答 案

或者，还可以直接用如下的方法求 $y_1(t)$：

$$y_1(t)=x_1(t)*h(t)=x_1(t)*[u(t)-u(t-1)]=y_0(t)-y_0(t-1) \text{（4 分）} \tag{2-5}$$

其中，$y_0(t)=x_1(t)*u(t)=\int_{-\infty}^{t} x_1(\tau)\mathrm{d}\tau$，它可以对图 1.2 中的 $x_1(t)$ 波形直接滑动积分得到（6 分），其波形如图 1.7 中的 $y_0(t)$ 所示（2 分），代入(2-5)式，得到图 1.8 所示的 $y_1(t)$。（2 分）

本题如果用拉氏变换方法求，例如按如下方法正确求出 $h(t)$、$s(t)$ 和 $y_1(t)$，按照题意（题目要求用时域方法求），可以考虑给一半分：

1. $x(t)=u(t)-u(t-2) \overset{\mathrm{L}}{\longleftrightarrow} \left\{\dfrac{1-e^{-2s}}{s},\ R_x=\text{整个 S 平面}\right\}$（0.5 分）

$$\begin{aligned}y(t)&=tu(t)-(t-1)u(t-1)\\&\quad-(t-2)u(t-2)+(t-3)u(t-3)\end{aligned} \overset{\mathrm{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1-\mathrm{e}^{-s}-\mathrm{e}^{-2s}+\mathrm{e}^{-3s}}{s^2},\ R_y=\text{整个 S 平面}\ \}\text{（1 分）}$$

该 LTI 系统是因果的，其系统函数及其收敛域为

$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{1-\mathrm{e}^{-s}-\mathrm{e}^{-2s}+\mathrm{e}^{-3s}}{s(1-\mathrm{e}^{-2s})}=\frac{1-\mathrm{e}^{-s}}{s},\quad R_h=\text{整个 S 平面（2 分）}$$

该系统的单位阶跃响应 $s(t)$ 的拉氏变换为 $S(s)=\dfrac{1-\mathrm{e}^{-s}}{s^2}$，$R_S=\{\mathrm{Re}\{s\}>0\}$（0.5 分）

对上式取反拉氏变换，得到该系统的单位阶跃响应 $s(t)$ 为

$$s(t)=tu(t)-(t-1)u(t-1) \text{（1 分）} \tag{2-6}$$

$s(t)$ 的波形如前面图 1.4 所示。（1 分）

2. 令 $y_1(t) \overset{\mathrm{L}}{\longleftrightarrow} \{Y_1(s),\ R_{y1}\}$，且有

$$x_1(t)=\sin\pi t u(t)+\sin\pi(t-1)u(t-1) \overset{\mathrm{L}}{\longleftrightarrow} \left\{\frac{\pi(1+e^{-s})}{s^2+\pi^2},\ R_{x1}=\text{整个 S 平面}\right\}\text{（1 分）}$$

$$Y_1(s)=X(s)H(s)=\frac{\pi}{s(s^2+\pi^2)}(1-\mathrm{e}^{-s})(1+\mathrm{e}^{-s})=\frac{\pi}{s(s^2+\pi^2)}(1-\mathrm{e}^{-2s})\text{（1 分）}$$

上式中的 $\dfrac{\pi}{s(s^2+\pi^2)}$ 可以部分分式展开为 $\dfrac{\pi}{s(s^2+\pi^2)}=\dfrac{1}{\pi}\left[\dfrac{1}{s}-\dfrac{s}{s^2+\pi^2}\right]$，代入上式，

则有 $$Y_1(s)=\frac{\pi}{s(s^2+\pi^2)}(1-\mathrm{e}^{-2s})=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+\pi^2}\right](1-\mathrm{e}^{-2s})\text{（2 分）} \tag{2-7}$$

上式反拉氏变换得到

$$\begin{aligned}y_1(t)&=\frac{1}{\pi}[1-\cos\pi t]u(t)*[\delta(t)-\delta(t-2)]\\&=\frac{1}{\pi}\{(1-\cos\pi t)u(t)-[1-\cos\pi(t-1)]u(t-1)\}\text{（2 分）}\end{aligned} \tag{2-8}$$

$y_1(t)$ 的波形见前面图 1.8（1 分）

2005年硕士学位研究生入学考试试题参考答案

二、由差分方程 $y[n]-0.5y[n-1]=\sum_{k=0}^{4}\left(x[n-k]-2x[n-k-1]\right)$ 和非零起始条件 $y[-1]=1$ 表示的离散时间因果系统，当系统输入 $x[n]=\delta[n]$ 时，试用递推算法求：（共16分）

1. 该系统的零状态响应 $y_{zs}[n]$（至少计算出前6个序列值）；（10分）
2. 该系统的零输入响应 $y_{zi}[n]$（至少计算出前4个序列值）；（6分）

1．解：零状态响应 $y_{zs}[n]$ 的方程可以化为：

$$y_{zs}[n]-0.5y_{zs}[n-1]=x[n]-x[n-1]-x[n-2]-x[n-3]-x[n-4]-2x[n-5];$$

即 $y_{zs}[n]=0.5y_{zs}[n-1]+x[n]-x[n-1]-x[n-2]-x[n-3]-x[n-4]-2x[n-5]$；（3分）

且有 $y_{zi}[n]=0$，$n<0$（1分）

当输入 $x[n]=\delta[n]$ 时，递推计算出的零状态响应 $y_{zs}[n]$ 的前6个序列值分别为：

$y_{zs}[0]=1$；（1分）

$y_{zs}[1]=-1/2$；（1分）

$y_{zs}[2]=-5/4$；（1分）

$y_{zs}[3]=-13/8$；（1分）

$y_{zs}[4]=-29/16$；（1分）

$y_{zs}[5]=-93/32$。（1分）

2．解：零输入响应 $y_{zi}[n]$ 的递推方程可以化为：

$y_{zi}[n]=0.5y_{zi}[n-1]$；且有 $y_{zi}[-1]=y[-1]=-1$；（2分）

递推计算出的零状态响应 $y_{zi}[n]$ 的前4个序列值分别为：

$y_{zi}[0]=-1/2$；（1分）

$y_{zi}[1]=-1/4$；（1分）

$y_{zi}[2]=-1/8$；（1分）

$y_{zi}[3]=-1/16$；（1分）

三、已知连续时间信号 $x(t)=\dfrac{\sin[2\pi(10^3t-1)]}{2\pi(t-10^{-3})}\cos(2\pi\times10^6t)$ 毫安，若它是能量信号，试求其能谱密度函数和它在单位电阻上消耗的能量；若它是功率信号，则求其功率谱密度函数和它在单位电阻上消耗的平均功率。（共14分）

解：令： $x_1(t)=\dfrac{\sin[2\pi\times10^3t]}{2\pi t}$ 和 $x_2(t)=x_1(t-10^{-3})$；

则有 $x(t)=x_2(t)\times\cos(2\pi\times10^6t)$

由于 $x_2(t)$ 仅仅是对 $x_1(t)$ 的时延；$x(t)$ 是对 $x_2(t)$ 的调制；$x_1(t)$ 是能量信号，整个 $x(t)$ 是能量信号。（2分）

2005 年硕士学位研究生入学考试试题参考答　案

利用帕什瓦尔定理求连续时间信号 $x(t)$ 在单位电阻上消耗的能量

再令：$x_i(t) \xleftrightarrow{\text{CFT}} X_i(\omega)$，$i=1,\ 2$ 和 $x(t) \xleftrightarrow{\text{CFT}} X(\omega)$

则有 $|X_2(\omega)| = X_1(\omega) = \begin{cases} 0.5, & |\omega| < 2\pi\times10^3 \\ 0, & |\omega| > 2\pi\times10^3 \end{cases}$（2 分）

和 $|X(\omega)| = \dfrac{1}{2\pi} X_1(\omega) * \pi[\delta(\omega+2\pi\times10^6)+\delta(\omega-2\pi\times10^6)]$（4 分）

$x(t)$ 的幅度频谱 $|X(\omega)|$ 如图 3.1 所示。（2 分）

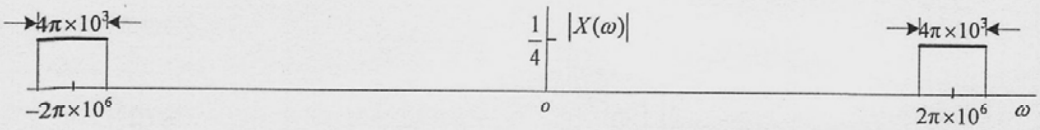


图 3.1

$x(t)$ 在单位电阻上消耗的能量 E_x 为：

$$E_x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|X(\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega = 10^{-3}(J) \text{（4 分）}$$

四、已知 $\tilde{x}[n]$ 是周期为 4 的周期序列，且已知 8 点序列 $x[n]=\tilde{x}[n]$，$0\le n\le 7$，的 8 点 DFT 系数为：$X(0)=X(2)=X(4)=X(6)=1$，$X(k)=0$，其它 k。试求：（共 **24** 分）

1. 周期序列 $\tilde{x}[n]$，并概画出它的序列图形；（**12** 分）
2. 该周期序列 $\tilde{x}[n]$ 通过单位冲激响应为 $h[n]=(-1)^2\dfrac{\sin^2(\pi n/2)}{\pi^2 n^2}$ 的数字滤波器后的输出 $y[n]$，并概画出它的序列图形。（**12** 分）

1. 解：先利用 IDFT 求 $x[n]$，$0\le n\le 7$：

即 $x[n]=\dfrac{1}{8}\sum_{k=0}^{7}X(k)e^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{8}kn}=\dfrac{1}{8}\times[1+(-1)^n+(\mathrm{j})^n+(-\mathrm{j})^n]=\dfrac{1}{8}\left[1+(-1)^n+2\cos\dfrac{\pi n}{2}\right]$，（8 分）

计算得到：$x[n]=\begin{cases}0.5 & n=0,\ 4\\ 0 & n\ne 0,\ 4\end{cases}$，$0\le n\le 7$（2 分）

$\tilde{x}[n]$ 是 $x[n]$ 以周期为 8 的周期延拓，它的序列图形如图 4.1 所示。（1 分）

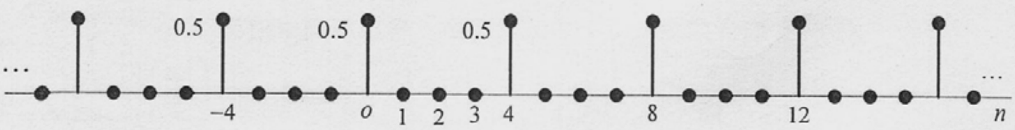


图 4.1

即 $\tilde{x}[n]=\sum_{l=-\infty}^{\infty}x[n-8l]=\dfrac{1}{2}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\delta[n-4l]$（1 分）　　(4-1)

或者，由于 $\tilde{x}[n]$ 是周期为 4 的周期序列，8 点序列 $x[n]=\tilde{x}[n]$，$0\le n\le 7$，包含了 $\tilde{x}[n]$ 的两个完整的周期。根据 DFT 的性质，4 点序列 $x_0[n]=\tilde{x}[n]$，$0\le n\le 3$，的 4 点 DFT

2005年硕士学位研究生入学考试试题参考答 案

系数为：$X_0(k)=0.5X(2k)=0.5$，$0\le k\le 3$，其中 $X(k)$，$0\le k\le 7$，就是已知的 8 点 DFT 系数（6 分）。再用 4 点 IDFT，求出 4 点序列的序列值：$x_0[0]=0.5$，$x_0[n]=0$，$1\le n\le 3$（4 分）。$\tilde{x}[n]$ 是 $x_0[n]$ 以 4 的周期延拓，其序列图形如图 4.1 所示。（1 分）

2\. 解：先求该离散时间 LTI 系统的频率响应 $\tilde{H}(\Omega)$

令：$h_1[n]=\dfrac{\sin(\pi n/2)}{\pi n} \xleftrightarrow{\text{DTFT}} \tilde{H}_1(\Omega)$ ）和 $h[n]=(-1)^n h_1^2[n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} \tilde{H}(\Omega)$

则有 $\tilde{H}_1(\Omega)=\begin{cases}1, & |\Omega|<\pi/2\\ 0, & |\Omega|>\pi/2\end{cases}$，在主值区间$(-\pi,\ \pi)$内（1 分） (4-2)

$\tilde{H}_1(\Omega)$ ）图形如图 4.2 所示。（1 分）

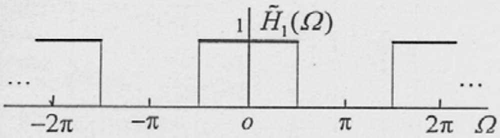


图 4.2

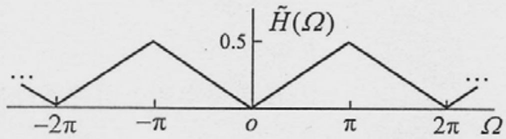


图 4.3

根据频域卷积性质和频移 π 的频移性质，则有

$\tilde{H}(\Omega)=(1/2\pi)\tilde{H}_1(\Omega) \circledast \tilde{H}_1(\Omega)$ ）$\circledast\ \delta(\Omega-\pi)$；$\tilde{H}(\Omega)$ 的图形如图 4.3 所示。（3 分）

由(4-1)式或图 4.1，$\tilde{x}[n]$ 的 DFS 系数为：

$\tilde{X}_k=1/8$，$k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3\ \cdots$，谱线间隔为 $\Omega=\pi/2$（2 分）

或者，$\tilde{x}[n]$ 的 DTFT 为：$\tilde{X}(\Omega)=\dfrac{\pi}{4}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-k\dfrac{\pi}{2})$（2 分）

$\tilde{x}[n]$ 通过 $\tilde{H}(\Omega)$ 后的输出 $y[n]$ 也是周期为 4 的周期序列，它的 DFS 系数为

$\tilde{Y}_k=\begin{cases}1/32, & k=\pm1,\ \pm3,\ \pm5,\ \cdots\\ 1/16, & k=\pm2,\ \pm6,\ \pm10,\ \cdots\end{cases}$，谱线间隔为 $\Omega=\pi/2$（2 分）

或者，$y[n]$ 的 DTFT 为

$$\tilde{Y}(\Omega)=\tilde{X}(\Omega)\tilde{H}(\Omega)=\frac{\pi}{16}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left[\Omega-(2k-1)\frac{\pi}{2}\right]+\frac{\pi}{8}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left[\Omega-(2k-1)\pi\right]\ \text{（2 分）}$$

由 DFS 的合成公式或 DTFT 反变换，输出序列 $y[n]$ 为

$$y[n]=\frac{1}{16}e^{j\pi n}+\frac{1}{32}\left[e^{j(\pi/2)n}+e^{-j(\pi/2)n}\right]=\frac{1}{16}\left[(-1)^n+\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right]\ \text{（2 分）}\qquad(4\text{-}3)$$

它的序列图形如图 4.4 所示（1 分）

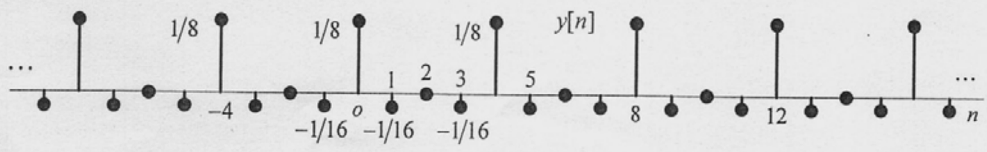


图 4.4

2005年硕士学位研究生入学考试试题参考答 案

五、已知 $x(t)$ 是最高频率为 4 kHz 的连续时间带限信号，（共 **24** 分）

1. 若对 $x(t)$ 进行**平顶**抽样获得的已抽样信号 $x_{\mathrm{P}}(t)$ 如图 5 所示，试求由 $x_{\mathrm{P}}(t)$ 恢复出 $x(t)$ 的重构滤波器的频率响应 $H_{\mathrm{L}}(\omega)$，并概画出其幅频响应和相频响应；（**16** 分）

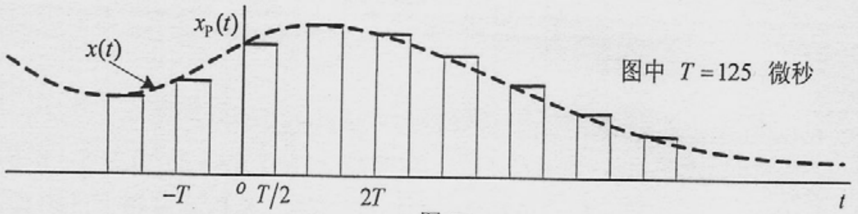


图 5

2. 你在 1 小题求得的重构滤波器为什么不可实现？为实现**无失真**恢复原信号，需对抽样频率和重构滤波器频率响应 $H_{\mathrm{L}}(\omega)$ 作怎样的修改？（**8** 分）

1. 解：图 5 的平顶抽样信号 $x_{\mathrm{P}}(t)$ 可表示为

$$x_{\mathrm{P}}(t)=x(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)=\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)\delta(t-nT)\right]*h_0(t)\text{（2 分）}\qquad(5\text{-}1)$$

其中，$h_0(t)=\begin{cases}1, & 0<t<T/2\\ 0, & t<0,\ t>T/2\end{cases}$ 是零阶保持系统的单位冲激响应（0.5 分） (5-2)

$h_0(t)$ 的波形如图 5.1 所示。（0.5 分）由于带限信号 $x(t)$ 的最高频率为 4 kHz，抽样间隔 $T=125$ 微秒，即抽样频率为 8 kHz，故上述抽样是临界抽样。

若令： $x(t)\xleftrightarrow{\text{CFT}}X(\omega)=0$，$|\omega|>8\pi\times10^3$（假设如图 5.1 所示）

和 $x_{\mathrm{P}}(t)\xleftrightarrow{\text{CFT}}X_{\mathrm{P}}(\omega)$

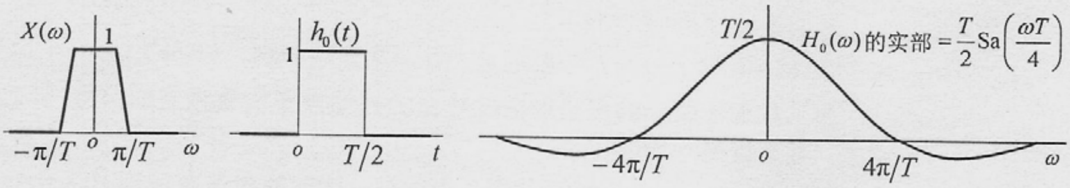


图 5.1 图中 $\omega_{\mathrm{M}}=\pi/\mathrm{T}=8\pi\times10^3$

根据傅里叶变换的频域卷积性质和时域卷积性质，则有

$$X_{\mathrm{P}}(\omega)=\left\{\frac{1}{2\pi}X(\omega)*P(\omega)\right\}H_0(\omega)\text{（2 分）}\qquad(5\text{-}3)$$

其中，$P(\omega)$ 和 $H_0(\omega)$ 分别是单位周期冲激串 $p(t)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$ 和(5-2)式表示的零阶保持系统 $h_0(t)$ 的傅里叶变换，且有

2005 年硕士学位研究生入学考试试题参考答　案

$P(\omega)=\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-k\frac{2\pi}{T}\right)$ 和 $H_0(\omega)=\frac{T}{2}\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega T}{4}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega T}{4}}$（2 分），其中 $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega T}{4}}$ 是移线性相移因子。$H_0(\omega)$ 的实部如图 5.1 所示。（1 分）把他们代入(5-3)式，得到

$$X_P(\omega)=\frac{1}{T}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}X\left(\omega-k\frac{2\pi}{T}\right)\right\}\frac{T}{2}\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega T}{4}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega T}{4}}\text{（3 分）}\qquad(5\text{-}4)$$

其中，$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega T}{4}}$ 是移线性相移因子。$X_P(\omega)$ 的实部如图 5.2 所示。（1 分）

如果要从 $x_P(t)$ 恢复出 $x(t)$，只要把 $X_P(\omega)$ 变成 $X(\omega)$ 即可。由图 5.1 和图 5.2，以及(5-4)式可知，为了 $X(\omega)=X_P(\omega)H_L(\omega)$，重构滤波器 $H_L(\omega)$ 应为

$$H_L(\omega)=\begin{cases}\frac{2}{\mathrm{Sa}(\omega T/4)}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\omega T}{4}}, & |\omega|<\frac{\pi}{T}\\ 0, & |\omega|<\pi/\mathrm{T}\end{cases}\text{，其中，}\frac{\pi}{T}=8\pi\times10^3\text{（3 分）}\qquad(5\text{-}5)$$

、

所求重构滤波器 $H_L(\omega)$ 的幅频特性 $|H_L(\omega)|$ 和相频特性 $\varphi_L(\omega)$ 如图 5.2 所示（1 分）

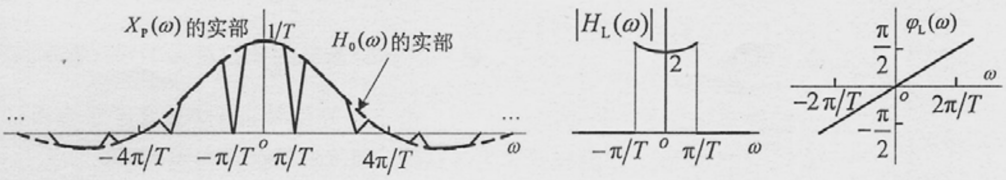


图 5.2　图中 $\omega_M=\pi/\mathrm{T}=8\pi\times10^3$

2. 解：1. 小题求得的所求重构滤波器 $H_L(\omega)$ 是不可能实现的，（1 分）理由如下：

1) $H_L(\omega)$ 的过渡带等于 0，其单位冲激响应 $h_L(t)\neq0$，$t<0$，即它是一个连续时间非因果滤波器；（1 分）

2) 它的相频特性 $\varphi_L(\omega)$ 意味着超前 $T/2$，也无法做到。（1 分）

为了从图 5 所示的平顶抽样信号 $x_P(t)$ 中实现**无失真**恢复原信号，针对上述两点理由，需要做两个修改：

1) 采用过抽样，给重构滤波器留出保护带，比如抽样率增加到 10 KHz；（2 分）

2) 重构滤波器 $H_L(\omega)$ 修改为

$$H_L(\omega)=\begin{cases}\frac{2}{\mathrm{Sa}(\omega T/4)}, & |\omega|<8\pi\times10^3\\ 0, & |\omega|>\pi\times10^4\end{cases},\qquad(5\text{-}6)$$

在 $H_L(\omega)$ 的过渡带（$8\pi\times10^3<|\omega|<\pi\times10^4$）范围内，$H_L(\omega)=$ 任意，只要可实现就行。这样，$x_P(t)$ 通过(5-6)式的重构滤波器 $H_L(\omega)$ 的输出为 $x(t-T/2)$。（3 分）

2005年硕士学位研究生入学考试试题参考答 案

六、如图6的信号流图所示的数字滤波器，试求：（共22分）

1. 它的系统函数 $H(z)$ 及其收敛域，并画出它用一个一阶全通滤波器和一个4阶FIR滤波器的级联实现的方框图或信号流图；（12分）
2. 概画出该数字滤波器的幅频响应 $|\tilde{H}(\Omega)|$（或 $|H(e^{j\Omega})|$）。（10分）

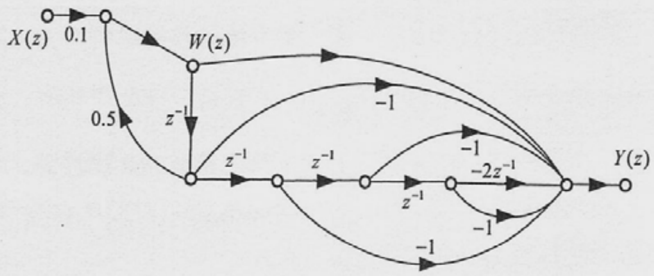


图6

1. 解：图6的信号流图表示的数字滤波器输出和输入像函数之间的关系可以写成为

$$Y(z)=W(z)-W(z)z^{-1}-W(z)z^{-2}-W(z)z^{-3}-W(z)z^{-4}-2W(z)z^{-5}$$（1分）

$$W(z)=0.5W(z)z^{-1}+0.1X(z)$$，（1分）

联立上述两式得到

$$Y(z)=\frac{X(z)}{1-0.5z^{-1}}[1-z^{-1}-z^{-2}-z^{-3}-z^{-4}-2z^{-5}]$$（1分）

该数字滤波器的系统函数为

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1-z^{-1}-z^{-2}-z^{-3}-z^{-4}-2z^{-5}}{10(1-0.5z^{-1})}=\frac{0.1(1-2z^{-1})}{1-0.5z^{-1}}(1+z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}+z^{-4})$$（3分）

（6-1）

其中，一阶系统函数 $\frac{1-2z^{-1}}{1-0.5z^{-1}}$ 是一阶全通函数，$(1+z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}+z^{-4})$ 是4阶FIR滤波器的系统函数，两者相乘即为两个滤波器级联，其级联实现方框图见图6.1。（6分）

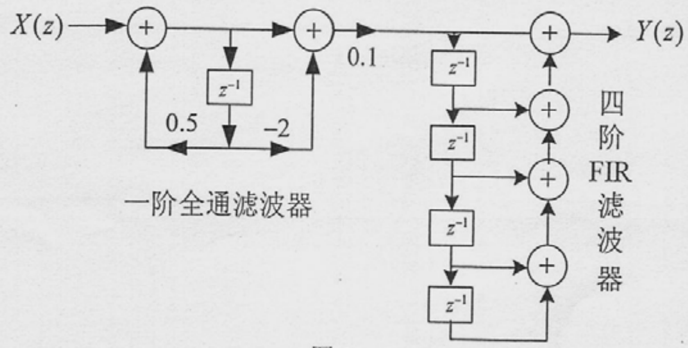


图6.1

或者，图 6 是直接 II 型实现结构的信号流图，可以直接写出该数字滤波器的差分方程

$$y[n]-0.5y[n-1]=x[n]-x[n-1]-x[n-2]-x[n-3]-x[n-4]-2x[n-5]$$ （3 分）

由上述方程写出该数字滤波器的的系统函数 $H(z)$。（见前面(6.1)式）（3 分）

2. 解：由 1.小题求得的(6.1)式可写成

$H(z)=H_0H_1(z)H_2(z)$ 和 数字滤波器频率响应 $\tilde{H}(\Omega)=H_0\tilde{H}_1(\Omega)\tilde{H}_2(\Omega)$

其中，$H_0=0.1$；$H_1(z)=\dfrac{1-2z^{-1}}{1-0.5z^{-1}}$，它是一阶全通系统，极点 $p=0.5$，零点 $z=2$；

和 $H_2(z)=(1+z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}+z^{-4})$，它是 FIR 滤波器。

该数字滤波器幅频响应为：$\left|\tilde{H}(\Omega)\right|=\left|H_0\right|\left|\tilde{H}_1(\Omega)\right|\left|\tilde{H}_2(\Omega)\right|$ （2 分）

其中，$\left|H_0\right|=0.1$；$\left|\tilde{H}_1(\Omega)\right|=2$；（2 分）

FIR 滤波器 $H_2(z)$ 的单位冲激响应 $h_2[n]$ 为

$$h_2[n]=\delta[n]+\delta[n-1]+\delta[n-2]+\delta[n-3]+\delta[n-4]=u[n]-u[n-5]$$ （1 分）

$h_2[n]$ 序列图形见图 6.1，它的幅频响应为 $\left|\tilde{H}_2(\Omega)\right|=\left|\dfrac{\sin(5\Omega/2)}{\sin(\Omega/2)}\right|$ （见图 6.2）（3 分）

因此，该数字滤波器幅频响应为：$\left|\tilde{H}(\Omega)\right|=0.2\left|\dfrac{\sin(5\Omega/2)}{\sin(\Omega/2)}\right|$ （1 分）

$\left|\tilde{H}(\Omega)\right|$ 的图形如图 6.3 所示（1 分）

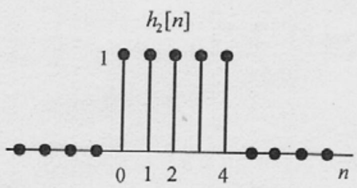


图 6.1

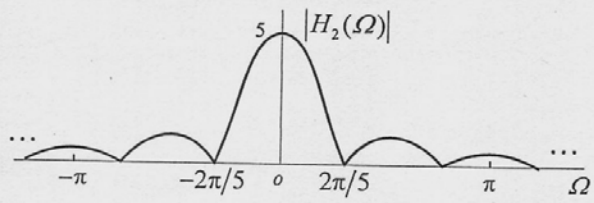


图 6.2

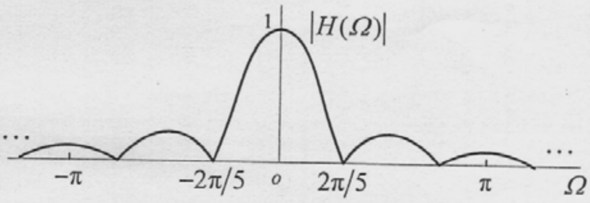


图 6.3

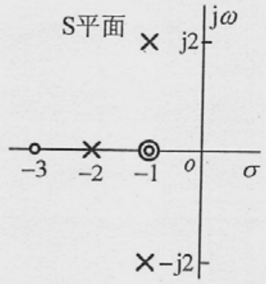


图 7

2005年硕士学位研究生入学考试试题参考答 案

七、某连续时间实的因果 LTI 系统的零、极点见图 7，并已知 $\int_{0_-}^{\infty} h(t)\mathrm{d}t = 1.5$，其中 $h(t)$ 为该系统的单位冲激响应。试求：（共 **24** 分）

1. 它是什么类型的系统（全通或最小相移系统），并求 $h(t)$（应为实函数）；（**14** 分）
2. 写出它的线性实系数微分方程表示；（**2** 分）
3. 它的逆系统的单位冲激响应 $h_1(t)$，该逆系统可因果稳定实现吗？（**8** 分）

1. 解：该因果系统为最小相位滤波器，由图 7 的系统零、极点分布，可写出其系统函数为

$$H(s) = H_0 \frac{(s+1)^2(s+3)}{[(s+1)^2+4](s+2)}, \quad \mathrm{Re}\{s\} > -1 \text{（4 分）}$$

并由 $\int_{0_-}^{\infty} h(t)\mathrm{d}t = 1.5$ 求出其中的实常数 H_0，即 $H(0) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\mathrm{d}t = \int_{0_-}^{\infty} h(t)\mathrm{d}t = 1.5$。代入上式求得 $H_0 = 5$（2 分）。最终得到该系统的系统函数及其收敛域如下

$$H(s) = \frac{5(s^3+5s^2+7s+3)}{s^3+4s^2+9s+10}, \quad \mathrm{Re}\{s\} > -1 \tag{7-1}$$

将上述有理系统函数用长除法和部分分式展开为

$$H(s) = 5 + \frac{5s^2-10s-35}{[(s+1)^2+4](s+2)} = 5 + \frac{1}{s+2} + \frac{4s}{(s+1)^2+2^2} - 10\frac{2}{(s+1)^2+2^2} \text{（4 分）}$$

由于是因果 LTI 系统，其 $h(t) = 0$，$t < 0$，因此，对上述部分分式反拉氏变换求得

$$h(t) = 5\delta(t) + \mathrm{e}^{-2t}u(t) + 4\mathrm{e}^{-t}(\cos 2t)u(t) - 10\mathrm{e}^{-t}(\sin 2t)u(t) \text{（4 分）}$$

2. 解：按照(7-1)式的有理系统函数，可以直接写出该因果 LTI 系统的微分方程如下

$$\frac{\mathrm{d}^3y(t)}{\mathrm{d}t^3} + 4\frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2} + 9\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + 10y(t) = 5\frac{\mathrm{d}^3x(t)}{\mathrm{d}t^3} + 15\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2} + 35\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + 25x(t) \text{（2 分）}$$

3. 解：该系统的逆系统之系统函数 $H_1(s)$ 及其收敛域为

$$H_I(s) = 0.2\frac{s^3+4s^2+9s+10}{(s+1)^2(s+3)} = 0.2\left[1 + \frac{-s^2+2s+7}{(s+1)^2(s+3)}\right], \quad \mathrm{Re}\{s\} > -1 \text{（1 分）} \tag{7-2}$$

并进一步可以部分分式展开为

$$H_I(s) = 0.2 + \frac{0.4}{(s+1)^2} + \frac{0.2}{s+1} - \frac{0.4}{s+3}, \quad \mathrm{Re}\{s\} > -1 \text{（3 分）}$$

这是一个因果稳定的系统函数，对上述部分分式进行反拉氏变换求得

$$h_I(t) = 0.2\delta(t) + 0.2\mathrm{e}^{-t}u(t) + 0.4t\mathrm{e}^{-t}u(t) - 0.4\mathrm{e}^{-3t}u(t) \text{（3 分）}$$

因此，该逆系统是既稳定，又可以因果实现。（1 分）

2006年招收攻读硕士学位研究生入学考试试题

试题名称：　信号与系统

说明：1. 本试卷共六大题，总共 150 分，答题全部做在考点下发的答题纸上。
2. 请看清每题的要求，特别注意黑体字。若结果是实函数，必须写出实函数表达式；若要求概画出图形的，必须作必要的标注。

一、试求解下列小题：(共 6 小题，每小题 10 分，合计 60 分)

1. 已知一个以微分方程 $\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+2y(t)=x(t)$ 表示的连续时间因果 LTI 系统，当其输入信号为 $x(t)=u(t)-u(t-2)$ 时，试**必须用时域方法**求该系统的输出 $y(t)$，并概画出 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的波形。
2. 稳定的连续时间 LTI 系统的频率响应为 $H(\omega)=\frac{1-\mathrm{e}^{-(\mathrm{j}\omega+1)}}{\mathrm{j}\omega+1}$，试求其单位阶跃响应 $s(t)$；
3. 已知序列值为 2、1、0、1 的 **4 点序列** $x[n]$，试计算 **8 点序列** $y[n]=\begin{cases}x[n/2], & n=2l\\ 0, & n\neq 2l\end{cases}$（其中 l 为整数）离散傅里叶变换 $Y(k)$，$k=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$。
4. 概画出离散时间序列 $x[n]=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k u[n-4k]$ 的序列图形，并求它的 Z 变换 $X(z)$，以及概画出 $X(z)$ 的零极点图和收敛域。
5. 某个实际测量系统（LTI 系统）的单位阶跃响应 $s(t)=(1-\mathrm{e}^{-t/\tau})u(t)$，$\tau$ 为系统的时间常数。显然，它不能瞬时响应被测信号的变化。试设计一个补偿系统，使得原测量系统与它级联后的输出信号，能对被测信号作出瞬时的响应，即能准确地表示被测信号。请给出你设计的补偿系统的特性（单位冲激响应或频率响应）。
6. 图 1.6 信号流图所示的数字滤波器，已知**有始**输入数字信号 $x[n]$ 的序列值依次为 4，1，2，0，−4，2，4 •••，试求该数字滤波器输出 $y[n]$ 的**前 5 个序列值**。

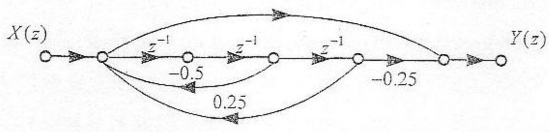


图 1.6

二、已知当输入信号为 $x(t)=u(t)-u(t-2)$ 时，某连续时间因果 LTI 系统的输出信号为 $y(t)=\sin\pi t u(t)+\sin\pi(t-1)u(t-1)$。试求：(每小题 10 分，共 20 分)

1. 该系统的单位冲激响应 $h(t)$，并概画出 $h(t)$ 的波形；
2. 当该系统输入为 $x_1(t)=u(t)-u(t-1)$ 时的输出信号 $y_1(t)$，并概画出 $y_1(t)$ 的波形。

三、已知由差分方程 $y[n]+\frac{1}{4}y[n-1]-\frac{1}{8}y[n-2]=x[n]-x[n-1]-\frac{3}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}x[n-k-1]$ 表示的因果数字滤波器（即离散时间因果 LTI 系统），试求：（共 20 分）

1. 该滤波器的系统函数 $H(z)$，并概画出其零极点图和收敛域；（8 分）
2. 该滤波器稳定吗？若稳定，概画出它的幅频响应 $\left|\tilde{H}(\Omega)\right|$ 或 $\left|H(e^{j\Omega})\right|$，并指出它是什么类型的滤波器（低通、高通、带通、全通、最小相移等）；（6 分）
3. 画出它用离散时间三种基本单元构成的**级联实现结构**的方框图或信号流图；（6 分）

四、已知一个以微分方程 $\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=x(t-1)$ 和 $y(0_-)=1$ 的起始条件表示的连续时间因果系统，试求当输入为 $x(t)=(\sin 2t)u(t)$ 时，该系统的输出 $y(t)$，并写出其中的零状态响应 $y_{zs}(t)$ 和零输入响应分量 $y_{zi}(t)$，以及暂态响应和稳态响应分量。（15 分）

五、某因果数字滤波器的零、极点如图 5(a)所示，并已知其 $\tilde{H}(\pi)=-1$。试求：（共 15 分）

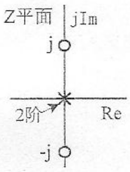


图 5(a)

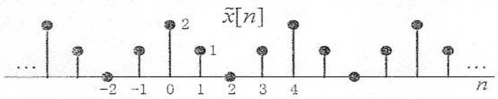


图 5(b)

1. 它的系统函数 $H(z)$ 及其收敛域，且回答它是 IIR、还是 FIR 的什么类型(低通、高通、带通、带阻或全通)滤波器？（6 分）
2. 写出图 5(b)所示周期信号 $\tilde{x}[n]$ 的表达式，并求其离散傅里叶级数的系数；（5 分）
3. 该滤波器对周期输入 $\tilde{x}[n]$ 的响应 $y[n]$。（4 分）

六、图 6 所示的连续时间信号抽样传输系统，已知系统的输入信号 $x(t)=\frac{\sin^2(4\pi\times10^3 t)}{\pi^2 t^2}$，抽样间隔 $T=0.1$ ms，图 6 中的信道滤波器是一个**实**的升余弦滚降带通滤波器，其频率响应 $H_{BP}(f)$ 如图 6(a)所示。试求：（共 20 分）

1. $x(t)$ 的频谱 $X(\omega)$，并概画出 $X(\omega)$ 以及 $x_p(t)$、$y(t)$ 的频谱 $X_p(\omega)$、$Y(\omega)$；（12 分）
2. 试设计由系统输出 $y(t)$ 恢复出 $x(t)$ 的系统，画出该恢复系统的方框图，并给出其中所用系统的系统特性（例如，滤波器的频率响应等）。（8 分）

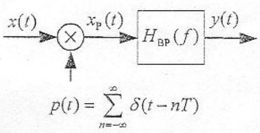


图 6

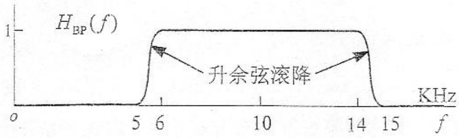


图 6(a)

2006年硕士学位研究生入学考试试题参考答 案

试题名称： **信号与系统**

一、试求解下列小题：(共6小题，每小题**10**分，合计60分)

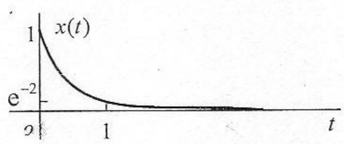
1. 已知一个以微分方程$\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=x(t)$表示的连续时间因果LTI系统，当其输入信号为$x(t)=u(t)-u(t-2)$时，试必须用时域方法求该系统的输出$y(t)$，并概画出$x(t)$和$y(t)$的波形。

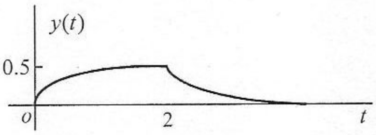
解答：先依据一阶因果LTI系统的微分方程，直接写出其单位冲激响应为$h(t)=e^{-2t}u(t)$，或通过其系统函数$H(s)=\frac{1}{s+2}$，$\mathrm{Re}(s)>-2$，反变换求得$h(t)=e^{-2t}u(t)$。 **(2分)**

然后，用时域方法、即卷积的方法求系统的输出$y(t)$为

$$y(t)=x(t)*h(t)=e^{-2t}u(t)*[u(t)-u(t-2)]=\frac{1-e^{-2t}}{2}u(t)-\frac{1-e^{-2(t-2)}}{2}u(t-2) \qquad \textbf{(6分)}$$

$x(t)$和$y(t)$的波形概画如下： **(2分)**





如果本题用变换域方法求出正确结果得一半分（5分）

2. 某稳定的连续时间LTI系统的频率响为$H(\omega)=\frac{1-e^{-(j\omega+1)}}{j\omega+1}$，试求其单位阶跃响应$s(t)$；

解答：可以用两种不同方法求解：

解法一，先用反傅里叶变换由$H(\omega)$求得系统的单位冲激响应$h(t)$，再对$h(t)$积分求得系统的单位阶跃响应$s(t)$，即

$$H(\omega)=\frac{1-e^{-(j\omega+1)}}{j\omega+1}=\frac{1}{j\omega+1}-\frac{e^{-1}}{j\omega+1}e^{-j\omega} \qquad \textbf{(1分)}$$

对上式求反傅里叶变换，得到：$h(t)=e^{-t}u(t)-e^{-1}e^{-(t-1)}u(t-1)$ **(3分)**

$$s(t)=\int_{-\infty}^{t}h(\tau)d\tau=h(t)*u(t)=e^{-t}u(t)*u(t)-e^{-1}e^{-(t-1)}u(t-1)*u(t)$$

$$=(1-e^{-t})u(t)-e^{-1}[1-e^{-(t-1)}]u(t-1) \qquad \textbf{(6分)}$$

解法二，先由系统的频率响应$H(\omega)$写出其系统函数及其收敛域，即

$$H(s)=\frac{1-e^{-1}e^{-s}}{s+1},\quad \mathrm{Re}(s)>-1 \qquad \textbf{(1分)}$$

2006 年硕士学位研究生入学考试试题参考答 案

那么，$s(t)$ 的拉氏氏变换即为 $S(s)=\dfrac{1-e^{-1}e^{-s}}{s(s+1)}$，$\mathrm{Re}(s)>0$ （2 分）

对 $S(s)$ 部分分式展开，即 $S(s)=\dfrac{1-e^{-1}e^{-s}}{s(s+1)}=\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{s+1}-\dfrac{1}{s}e^{-1}e^{-s}+\dfrac{1}{s+1}e^{-1}e^{-s}$

再对 $S(s)$ 进行反拉氏变换，得到系统的单位阶跃响应 $s(t)$，即

$$s(t)=(1-e^{-t})u(t)-e^{-1}[1-e^{-(t-1)}]u(t-1)$$ （7 分）

3. 已知序列值为 2、1、0、1 的 **4 点序列** $x[n]$，试计算 **8 点序列** $y[n]=\begin{cases}x[n/2], & n=2l\\ 0, & n\neq 2l\end{cases}$（其中 l 为整数）离散傅里叶变换 $Y(k)$，$k=0,1,2,3,4,5,6,7$。

解答：先用 DFT 公式，或 4 点 DFT 的矩阵计算式，即

$$X(k)=\sum_{n=0}^{3}x[n]e^{-j\frac{2\pi}{4}nk}=\sum_{n=0}^{3}x[n](-j)^{nk}=2+(-j)^{k}+(-j)^{3k},\qquad k=0、1、2、3$$ （3 分）

或者，$\begin{bmatrix}X(0)\\X(1)\\X(2)\\X[3]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&-j&-1&j\\1&-1&1&-1\\1&j&-1&-j\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\\0\\1\end{bmatrix}$ （或 3 分）

求得 $x[n]$ 的 4 点 DFT 为：$X(0)=4,\ X(1)=2,\ X(2)=0,\ X[3]=2$ （2 分）

由于 $y[n]=\begin{cases}x[n/2], & n=2l\\ 0, & n\neq 2l\end{cases}=x_{(2)}[n]$，因此，$\tilde{Y}(\Omega)=\tilde{X}(2\Omega)$，其中 $\tilde{Y}(\Omega)$ 和 $\tilde{X}(\Omega)$ 分别是 $y[n]$ 和 $x[n]$ 的离散时间傅里叶变换（DTFT），再依据 DFT 与 DTFT 之间的关系，可以求得 $y[n]$ 的 8 点 DFT 为

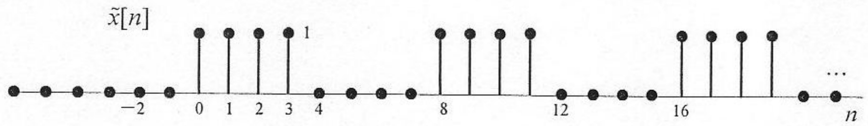
$Y(0)=X(0)=4,\ Y(1)=X(1)=2,\ Y(2)=X(2)=0,\ Y(3)=X(3)=2$

$Y(4)=X(0)=4,\ Y(5)=X(1)=2,\ Y(6)=X(2)=0,\ Y(7)=X(3)=2$ （5 分）

本题也可以先求出 8 点序列 $y[n]$ 的序列值，然后求其 8 点 DFT。

4. 概画出离散时间序列 $x[n]=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}u[n-4k]$ 的序列图形，并求它的 Z 变换 $X(z)$，以及概画出 $X(z)$ 的零极点图和收敛域。

解答：$x[n]$ 的序列图形为： （2 分）



由上图，$x[n]$ 可改写为

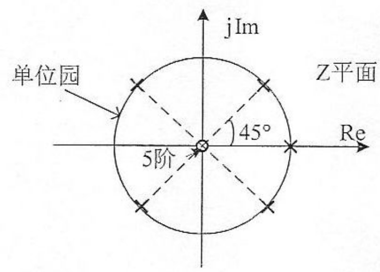
2006年硕士学位研究生入学考试试题参考答案

$x[n]=(u[n]-u[n-4])*\sum_{k=0}^{\infty}\delta[n-8k]$，其Z变换$X(z)$为

$X(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}(1-z^{-4})\frac{1}{1-z^{-8}}=\frac{1}{(1-z^{-1})(1+z^{-4})}$，收敛域为：$|z|>1$。（6分）

或者，直接对$x[n]=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k u[n-4k]$求Z变换，得到

$X(z)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{-4k}}{1-z^{-1}}=\frac{1}{1-z^{-1}}\sum_{k=0}^{\infty}(-z^{-4})^k=\frac{1}{(1-z^{-1})(1+z^{-4})}$，$|z|>1$（或6分）



$X(z)$得零极点右下图所示。（2分）

5. 某个实际测量系统（LTI系统）的单位阶跃响应$s(t)=(1-e^{-t/\tau})u(t)$，τ为系统的时间常数。显然，它不能瞬时响应被测信号的变化。试设计一个补偿系统，使得原测量系统与它级联后的输出信号，能对被测信号作出瞬时的响应，即能准确地表示被测信号。请给出你设计的补偿系统的特性（单位冲激响应或频率响应）。

解答：根据题意，要设计的补偿系统就是该实际测量系统（因果LTI系统）的逆系统。为此，先求该实际测量系统的系统函数$H(s)$，它的$s(t)$的拉氏变换$S(s)$为

$S(s)=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+(1/\tau)}=\frac{1/\tau}{s[s+(1/\tau)]}$，　$\mathrm{Re}(s)>0$（2分）

该实际测量系统的系统函数为：$H(s)=s\times S(s)=\frac{1/\tau}{s+(1/\tau)}$，　$\mathrm{Re}(s)>-\frac{1}{\tau}$（2分）

要求的补偿系统的系统函数为：$H_I(s)=\tau[s+(1/\tau)]$，收敛域为有限S平面。（4分）

其频率响应为：$H_I(\omega)=\tau[j\omega+(1/\tau)]$，或单位冲激响应为：$h_I(t)=\delta(t)+\tau\delta'(t)$（2分）

6. 图1.6信号流图所示的数字滤波器，已知有始输入数字信号$x[n]$的序列值依次为4，1，2，0，−4，2，4 •••，试求该数字滤波器输出$y[n]$的前5个序列值。

2006年硕士学位研究生入学考试试题参考答 案

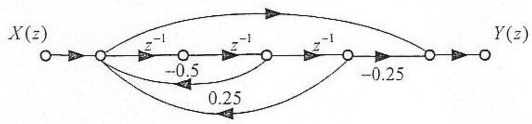


图 1.6

解答：先写出该因果数字滤波器的系统函数，再由此写出其差分方程表示，然后，利用差分方程的后推算法，逐个计算出已知有始输入 $x[n]$ 时的滤波器输出的前5个序列值。

该因果数字滤波器的系统函数为：$H(z)=\dfrac{1-0.25z^{-3}}{1+0.5z^{-2}-0.25z^{-3}}$　　　（3分）

该因果数字滤波器的系统函数差分方程为：

$$y[n]+0.5y[n-2]-0.25y[n-3]=x[n]-0.25x[n-3]$$　　　（1分）

其后推方程为：$y[n]=x[n]-0.25x[n-3]-0.5y[n-2]+0.25y[n-3]$　　　（1分）

代入已知的有始输入 $x[n]$ 的序列值，且假定起始时刻为0时刻，求得 $y[n]$ 的前5个序列值分别为：

$$y[0]=4,\quad y[1]=1,\quad y[2]=2-0.5\times4=0$$

$$y[3]=0-0.25\times4-0.5\times1+0.25\times4=-0.5$$

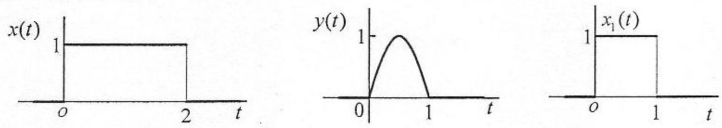
$$y[4]=-4-0.25\times1-0.5\times0+0.25\times1=-4$$　　　（5分）

由于系统是因果 LTI 系统，所以对于输入可以认为是从0开始，也可以认为是从大于0的某个时刻开始，但是，前5个序列值应该是不变的。

二、已知当输入信号为 $x(t)=u(t)-u(t-2)$ 时，某连续时间因果 LTI 系统的输出信号为 $y(t)=\sin\pi t u(t)+\sin\pi(t-1)u(t-1)$。试求：（每小题10分，共20分）

1. 该系统的单位冲激响应 $h(t)$，并概画出 $h(t)$ 的波形；
2. 当该系统输入为 $x_1(t)=u(t)-u(t-1)$ 时的输出信号 $y_1(t)$，并概画出 $y_1(t)$ 的波形。

解答： $x(t)$、$y(t)$ 和 $x_1(t)$ 的波形如下图所示。



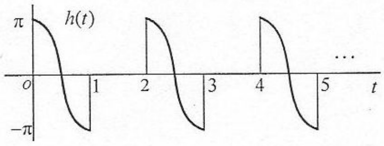
1. 先求系统的单位阶跃响应 $s(t)$，再对 $s(t)$ 微分得到其单位冲激响应 $h(t)$。

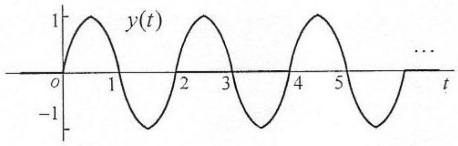
由上图的 $x(t)$ 可得 $u(t)=\sum_{k=0}^{\infty}x(t-2k)$，根据 LTI 系统的性质，对应输出 $s(t)$ 为：

$$s(t)=\sum_{k=0}^{\infty}y(t-2k)=\sum_{k=0}^{\infty}\sin\pi(t-k)u(t-k)$$ （6 分）

$$h(t)=\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}=\sum_{k=0}^{\infty}\pi\cos[\pi(t-k)]u(t-k)$$ （3 分）

$h(t)$ 的波形如左下图所示： （1 分）





说明：本小题也可以用拉氏变换方法做，得到同样结果。

2. 根据上面 $x_1(t)$ 和 $x(t)$ 的波形，$x_1(t)$ 可以写成 $x(t)$ 的如下时移线性组合：

$$x_1(t)=x(t)-x(t-1)+x(t-2)-x(t-3)+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x(t-k)$$ （3 分）

利用 LTI 系统的性质，相应输出 $y_1(t)$ 应该为： $y_1(t)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k y(t-k)$ （6 分）

$y_1(t)$ 波形如右上图所示。（1 分）

说明：本小题也可以用拉氏变换方法做，得到同样结果。

三、已知由差分方程 $y[n]+\frac{1}{4}y[n-1]-\frac{1}{8}y[n-2]=x[n]-x[n-1]-\frac{3}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}x[n-k-1]$ 表示的因果数字滤波器（即离散时间因果 LTI 系统），试求：（共 20 分）

1. 该滤波器的系统函数 $H(z)$，并概画出其零极点图和收敛域；（8 分）
2. 该滤波器稳定吗？若稳定，概画出它的幅频响应 $|\tilde{H}(\Omega)|$ 或 $|H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})|$，并指出它是什么类型的滤波器（低通、高通、带通、全通、最小相移等）；（6 分）
3. 画出它用离散时间三种基本单元构成的级联实现结构的方框图或信号流图；（6 分）

解答：

1. 差分方程可以写成：

$$y[n]+\frac{1}{4}y[n-1]-\frac{1}{8}y[n-2]=x[n]-x[n-1]-\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]*x[n-k-1]$$ （2 分）

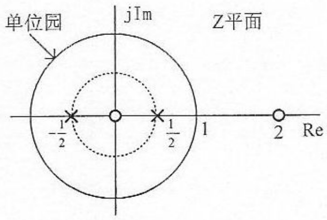
对上面方程两边取 Z 变换，得到

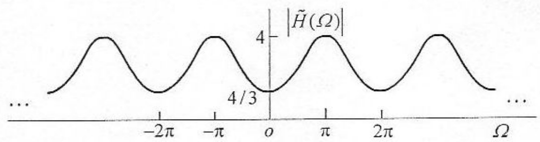
$$\left(1+\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{1}{8}z^{-2}\right)Y(z)=\left(1-z^{-1}-\frac{\frac{3}{4}z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\right)X(z)$$

2006年硕士学位研究生入学考试试题参考答　案

则有：$H(z)=\dfrac{Y(z)}{X(z)}=\dfrac{1-2z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1+\frac{1}{2}z^{-1})}$，收敛域为：$|z|>\dfrac{1}{2}$　（5分）

其零极点如左下图所示。（1分）





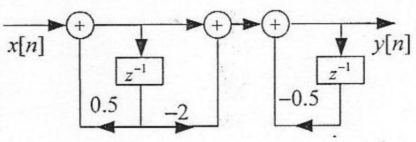
2. 因为收敛域包含单位圆，该滤波器稳定。　（1分）

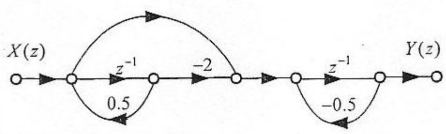
该系统相当于一个一阶全通滤波器 $H_{1AP}(z)=\dfrac{1-2z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$ 与一个一阶高通滤波器

$H_2(z)=\dfrac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$ 的级联，因此，它是一个高通滤波器。　（2分）

它的幅频响应为 $|\tilde{H}(\Omega)|=\tilde{H}_{1AP}(\Omega)\tilde{H}_2(\Omega)=2\left|\dfrac{1}{1+e^{-j\Omega}}\right|$，其图形如右上图所示。（3分）

3. 该系统的级联实现结构的方框图或信号流图如下：　（6分）





四、已知一个以微分方程 $\dfrac{dy(t)}{dt}+2y(t)=x(t-1)$ 和 $y(0_-)=1$ 的起始条件表示的连续时间因果系统，试求当输入为 $x(t)=(\sin 2t)u(t)$ 时，该系统的输出 $y(t)$，并写出其中的零状态响应 $y_{zs}(t)$ 和零输入响应分量 $y_{zi}(t)$，以及暂态响应和稳态响应分量。（15分）

解答：先求零输入响应 $y_{zi}(t)$，它满足的方程和起始条件为

$$\frac{dy_{zi}(t)}{dt}+2y_{zi}(t)=0,\quad y_{zi}(0_-)=y(0_-)=1$$

对上式用单边拉氏变换，求得 $y_{zi}(t)$ 的像函数为 $Y_{uzi}(s)=\dfrac{1}{s+2}$。

经过单边反拉氏变换，得到零输入响应为：$y_{zi}(t)=e^{-2t}$，$t\geq 0$　（4分）

再求零状态响应 $y_{zs}(t)$，对它而言，系统就成为如下微分方程表示的因果 LTI 系统：

$$\frac{\mathrm{d}y_{zs}(t)}{\mathrm{d}t}+2y_{zs}(t)=x(t)*\delta(t-1) \qquad （1 分）$$

对上式取拉氏变换或单边拉氏变换，并代入 $x(t)=(\sin 2t)u(t)$ 的拉氏变换像函数 $X(s)=\frac{2}{s^2+4}$，求得零状态响应 $y_{zs}(t)$ 的拉氏变换像函数为：

$$Y_{zs}(s)=\frac{2}{(s+2)(s^2+4)}\mathrm{e}^{-s}$$

利用上式中有理函数的部分分式展开，即 $\frac{2}{(s+2)(s^2+4)}=\frac{0.5}{s^2+4}-\frac{0.25s}{s^2+4}+\frac{0.25}{s+2}$，

得到：$Y_{zs}(s)=\left(\frac{0.5}{s^2+4}-\frac{0.25s}{s^2+4}+\frac{0.25}{s+2}\right)\mathrm{e}^{-s}$

最后，反拉氏变换求得零状态响应 $y_{zs}(t)$，即

$$y_{zs}(t)=\frac{1}{4}[\sin 2(t-1)]u(t-1)-\frac{1}{4}[\cos 2(t-1)]u(t-1)+\frac{1}{4}e^{-2(t-1)}u(t-1) \qquad （9 分）$$

系统全响应 $y(t)=y_{zs}(t)+y_{zi}(t)$ 为：

$$y(t)=0.25\{[\sin 2(t-1)]u(t-1)-[\cos 2(t-1)]u(t-1)+\mathrm{e}^{-2(t-1)}u(t-1)\}+\mathrm{e}^{-2t}u(t)$$

其中，暂态响应 $y_{暂态}(t)$ 和稳态响应 $y_{稳态}(t)$ 分别为：

$$y_{暂态}(t)=0.25\mathrm{e}^{-2(t-1)}u(t-1)+\mathrm{e}^{-2t}u(t) \qquad （1 分）$$

$$y_{稳态}(t)=0.25\{[\sin 2(t-1)]u(t-1)-[\cos 2(t-1)]u(t-1)\} \qquad （1 分）$$

五、某因果数字滤波器的零、极点如图 5(a)所示，并已知其 $\tilde{H}(\pi)=-1$。试求：（共 15 分）

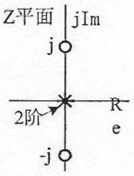


图 5(a)

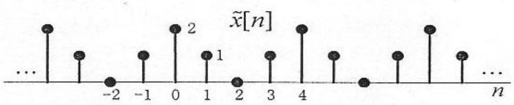


图 5(b)

1. 它的系统函数 $H(z)$ 及其收敛域，且回答它是 IIR、还是 FIR 的什么类型(低通、高通、带通、带阻或全通)滤波器？（6 分）
2. 写出图 5(b)所示周期信号 $\tilde{x}[n]$ 的表达式，并求其离散傅里叶级数的系数；（5 分）
3. 该滤波器对周期输入 $\tilde{x}[n]$ 的响应 $y[n]$。（4 分）

解答：

2006 年硕士学位研究生入学考试试题参考答案

1. 由该因果滤波器的零极点图，可以写出它的系统函数为：

$H(z)=H_0(1+z^{-2})$，$|z|>0$，其中，H_0 为常数，它可由已知的 $\tilde{H}(\pi)=-1$ 求得，即 $\tilde{H}(\pi)=H_0(1+e^{-j2\pi})=2H_0=-1$，求得 $H_0=-0.5$。因此，滤波器的系统函数为：

$H(z)=-0.5(1+z^{-2})$，$|z|>0$ （4 分）

该滤波器是 FIR 滤波器，且是带阻滤波器。（2 分）

2. 周期为 4 的周期信号 $\tilde{x}[n]$ 的表达式为：

$$\tilde{x}[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\{2\delta[n-4k]+\delta[n-4k-1]+\delta[n-4k-3]\}$$ （1 分）

可以用两种方法求得 $\tilde{x}[n]$ 的离散傅里叶级数的系数 $\tilde{X}_k$：

一种方法：周期为 4 的 $\tilde{x}[n]$ 也可以写成：$\tilde{x}[n]=1+\cos(\frac{\pi}{2}n)=1+\frac{1}{2}e^{j\frac{2\pi}{4}n}+\frac{1}{2}e^{j\frac{2\pi}{4}3n}$

因此，它的离散傅里叶级数系数也是周期为 4 的系数序列 $\tilde{X}_k$，其一个周期内的系数分别为：

$\tilde{X}[0]=1,\ \tilde{X}[1]=0.5,\ \tilde{X}[2]=0,\ \tilde{X}[3]=0.5$ （4 分）

另一种方法是直接用周期为 4 的离散傅里叶级数分析公式计算，即

$\tilde{X}_k=\sum_{n=0}^{3}x[n]e^{-jk(2\pi/4)n}=\sum_{n=0}^{3}x[n]e^{-jk(\pi/2)n}$，得到同样的结果。（或 4 分）

3. 由该滤波器零极点图可知：在频率 $\Omega=\pi/2$ 和 $\Omega=3\pi/2$ 处，频率响应为零，即 $\tilde{H}(\pi/2)=\tilde{H}(3\pi/2)=0$；而在频率 $\Omega=0$ 处，频率响应为 $\tilde{H}(0)=-1$，因此，滤波器当 $\tilde{x}[n]$ 输入时的输出 $y[n]$ 只有直流分量，即 $y[n]=-1$ （4 分）

六、图 6 所示的连续时间信号抽样传输系统，已知系统的输入信号 $x(t)=\frac{\sin^2(4\pi\times10^3t)}{\pi^2t^2}$，抽样间隔 $T=0.1$ ms，图 6 中的信道滤波器是一个实的升余弦滚降带通滤波器，其频率响应 $H_{BP}(f)$ 如图 6(a)所示。试求：（共 20 分）

1. $x(t)$ 的频谱 $X(\omega)$，并概画出 $X(\omega)$ 以及 $x_P(t)$、$y(t)$ 的频谱 $X_P(\omega)$、$Y(\omega)$；（12 分）
2. 试设计由系统输出 $y(t)$ 恢复出 $x(t)$ 的系统，画出该恢复系统的方框图，并给出其中所用系统的系统特性（例如，滤波器的频率响应等）。（8 分）

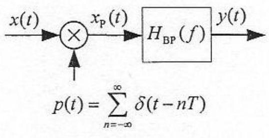


图 6

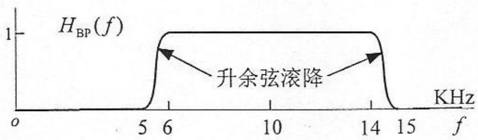


图 6(a)

2006年硕士学位研究生入学考试试题参考答　案

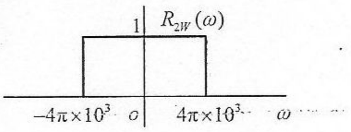
解答：

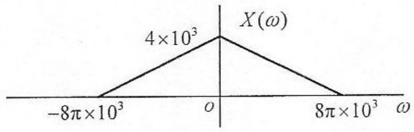
1. 输入信号 $x(t)=\dfrac{\sin^2(4\pi\times10^3t)}{\pi^2t^2}=\dfrac{\sin(4\pi\times10^3t)}{\pi t}\times\dfrac{\sin(4\pi\times10^3t)}{\pi t}$，

由于 $\dfrac{\sin(4\pi\times10^3t)}{\pi t}\xleftrightarrow{\text{CFT}}R_{2W}(\omega)=\begin{cases}1, & |\omega|<2\times10^3\\ 0, & |\omega|>2\times10^3\end{cases}$（如左下图所示）　（3 分）

利用傅里叶变换的频域卷积性质，可求得 $x(t)$ 的频谱 $X(\omega)$ 为

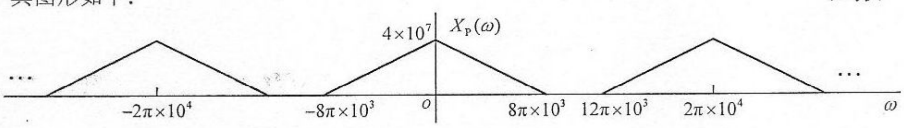
$X(\omega)=\dfrac{1}{2\pi}R_{2W}(\omega)*R_{2W}(\omega)$，频谱图形如右下狱所示。　（3 分）



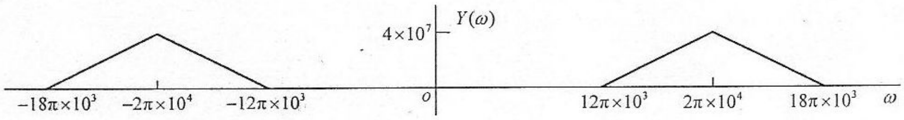


由于抽样间隔 $T=10^{-4}$ $x_{\mathrm{P}}(t)$ 的频谱 $X_{\mathrm{P}}(\omega)=\dfrac{1}{T}\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}X(\omega-k\times2\pi\times10^4)$，

其图形如下：　（3 分）



$y(t)$ 的频谱 $Y(\omega)=X_{\mathrm{P}}(\omega)H_{\mathrm{BP}}(\omega)$，其频谱图形如下　（3 分）



2. 由上图看出 $y(t)$ 的频谱 $Y(\omega)$ 是 $x(t)$ 正弦调制后的频谱，它可以写成

$Y(\omega)=2\times10^4\dfrac{1}{2\pi}X(\omega)*\pi[\delta(\omega+2\pi\times10^4)+\delta(\omega-2\pi\times10^4)]$　（2 分）

因此，可用正弦调制的相干解调恢复出 $x(t)$，这个恢复系统的方框图如左下图所示，其中的 $H_{\mathrm{L}}(\omega)$ 是一个理想低通滤波器，其滤波特性如右下图所示。　（6 分）