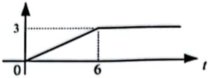
1. 连续时间信号 $x(t)=u(t)-u(t-3)$，试画出 $\int_{-\infty}^{t/2}x(\tau)d\tau$ 的波形。

解：$\int_{-\infty}^{t/2}x(\tau)d\tau$ 如下图所示：



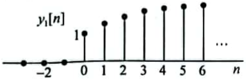
（6 分）

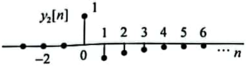
2. 对于序列 $x[n]=(\frac{1}{2})^n u[n]$，计算 $y_1[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]$ 和 $y_2[n]=\Delta x[n]$，然后分别画出 $y_1[n]$ 和 $y_2[n]$ 的波形。

解：$y_1[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]=2[1-(0.5)^{n+1}]u[n]$ 或者该式分段表达。（2 分）

$$y_2[n]=\Delta x[n]=x[n]-x[n-1]=\begin{cases}0, & n<0\\ 1, & n=0\\ -(0.5)^n, & n>0\end{cases}$$ （2 分）

它们的波形如下图所示。





（每个小图各 1 分）

3. 对于以输入输出关系 $y(t)=e^{-2t}\int_{-\infty}^{t}(e^{\tau})^2x(\tau)d\tau$ 描述的系统，判断系统的记忆性、线性、时不变性、因果性、稳定性以及可逆性，如果系统是可逆的，试求它的逆系统的单位冲激响应。 $h(t)=e^{-2t}[u(t)-u(t-2)]$ $-e^{-2(t-2)}u(t-$

解：该输入输出关系可以表示为 $y(t)=x(t)*h(t)$，其中 $h(t)=e^{-2t}u(t)$，据此可以判断系统是有记忆的、线性的，时不变的，因果的、稳定的、可逆的。（各 ~~0.5~~ 1 分，共 3 分）

其逆系统单位冲激响应 $h_I(t)$ 满足关系：$h_I(t)*h(t)=\delta(t)$。对 $h(t)$ 做微分运算：

$$\frac{d}{dt}h(t)=\frac{d}{dt}(e^{-2t}u(t))=(\frac{d}{dt}e^{-2t})u(t)+e^{-2t}\frac{d}{dt}u(t)=-2e^{-2t}u(t)+\delta(t)$$

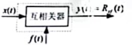
$$\begin{cases}h_1(t)+e^{-4}h_1(t-2)=\delta'(t)+\\ h_1(t)=\sum_{k=0}^{+\infty}e^{-4k}(2\delta(t-2k)+\end{cases}$$

$h'(t)+2h(t)=\delta(t)$，那么 $h_I(t)=\delta'(t)+2\delta(t)$ ~~（3 分）~~

$$\begin{cases}h_1(t)+e^{-4}h_1(t-2)=\delta'(t)+2\delta(t)\\ h_1(t)=\sum_{k=0}^{+\infty}e^{-4k}(2\delta(t-2k)+\delta'(t-2k))\end{cases}$$

4. 对于图 1.4 中虚线框内的系统，判断系统的有记忆性，线性，时不变性，因果性和稳定性，如果它是 LTI 系统，试写出它的单位冲激响应 $h(t)$。

4. 对于图 1.5 中虚线框内的系统，判断系统的有记忆性，线性，时不变性，因果性和稳定性，如果它是 LTI 系统，试写出它的单位冲激响应 $h(t)$。



解：$y(t)=R_{xf}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)f^{*}(\tau-t)d\tau=x(t)*f^{*}(-t)$，那么图 1.5 所示系统是 LTI 系统，它的单位冲激响应 $h(t)=f^{*}(-t)$。　　　　（2 分）

系统具有线性、时不变性。　　　　（1 分）

系统的有记忆性、因果性、稳定性要根据 $h(t)$ 来判断，即：

如果 $h(t)=0,\ t\neq 0$，那么系统具有无记忆性。　　　　（1 分）

如果 $h(t)=0,\ t<0$ 或 $h(t)$ 为因果信号，那么系统具有因果性。　　　　（1 分）

如果 $\int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|<\infty$ 或 $h(t)$ 为模可积信号，那么系统具有稳定性。　　　　（1 分）

5. 对于单位冲激响应为$h(t)=\delta(t-T)$的LTI系统，试证明$\phi_1(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)$是该系统的特征函数，并给出相应的特征值；与此类似，试找出相应的特征值为2的另外一个特征函数$\phi_2(t)$。

解：$h(t)*\phi_1(t)=\delta(t-T)*\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)=1\times\phi_1(t)$

按照LTI系统特征函数特征值的定义，可知$\phi_1(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)$为该系统的特征函数，相应的特征值为1； （3分）

与此类似，考虑$\phi_2(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(\frac{1}{2})^k\delta(t-kT)$的情况，即

$$h(t)*\phi_2(t)=\delta(t-T)*\sum_{k=-\infty}^{\infty}(\frac{1}{2})^k\delta(t-kT)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\{(\frac{1}{2})^k\delta(t-kT)\}*\delta(t-T)$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(\frac{1}{2})^k\delta(t-kT-T)\underline{\underline{m=k+1}}\sum_{m=-\infty}^{\infty}(\frac{1}{2})^{m-1}\delta(t-mT)=2\sum_{m=-\infty}^{\infty}(\frac{1}{2})^m\delta(t-mT)=2\times\phi_2(t)$$

可见

$\phi_2(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(\frac{1}{2})^k\delta(t-kT)$是相应的特征值为2的另外一个特征函数。 （3分）

6.

6. 试写出图1.6所示信号的闭合表达式，分别概画出信号$\frac{d}{dt}x(t)$，$\frac{d^2}{dt^2}x(t)$的波形。

8.

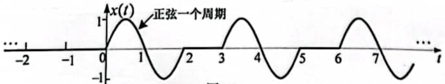
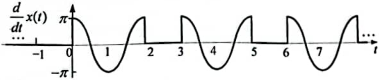
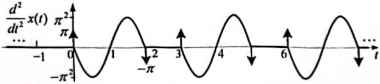


图1.6

解：$x(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\sin\pi(t-3k)[u(t-3k)-u(t-3k-2)]$ （2分）



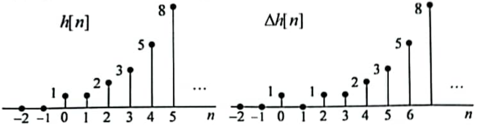
（3分）



（3分）

7. 已知一个离散时间 LTI 系统，它的单位冲激响应 $h[n]$ 为著名的 Fibonacci 序列，即当 $n<0$ 时 $h[n]=0$，$h[0]=1$，$h[1]=1$，当 $n\ge 2$ 时 $h[n]=h[n-1]+h[n-2]$。请判断它是否是可逆的系统？若不是，请说明原因；若是，请找出它的逆系统的单位冲激响应。

解：将 $h[n]$ 序列图形以及对 $h[n]$ 做一阶差分运算得到的序列 $\Delta h[n]$ 图形表示如下：



由图可见：$\Delta h[n]=\delta[n]+h[n-2]$

$$\Delta h[n]=\{\delta[n]-\delta[n-1]\}*h[n]$$ 简而言之，h[n]-h[n-1]-h[n-2]=δ[n]

$$h[n-2]=\delta[n-2]*h[n]$$

那么：$\{\delta[n]-\delta[n-1]\}*h[n]=\delta[n]+\delta[n-2]*h[n]$

$$\{\delta[n]-\delta[n-1]-\delta[n-2]\}*h[n]=\delta[n]$$

所以该系统是可逆的，其逆系统单位冲激响应为：

$$h_{inv}[n]=\delta[n]-\delta[n-1]-\delta[n-2]$$ （6 分）

8. 用递推算法求差分方程 $y[n]+0.5y[n-1]-0.5y[n-2]=\sum_{k=0}^{\infty}x[n-k]$ 表示的离散时间因果 LTI 系统的单位冲激响应 $h[n]$，至少计算前 6 个序列值。

解：根据后推方程 $h[n]=-0.5h[n-1]+0.5h[n-2]+\sum_{k=0}^{\infty}\delta[n-k]$，可得

$$h[0]=-0.5h[-1]+0.5h[-2]+\sum_{k=0}^{\infty}\delta[0-k]=-0.5\times0+0.5\times0+1+0+0+\ldots=1$$

$$h[1]=-0.5h[0]+0.5h[-1]+\sum_{k=0}^{\infty}\delta[1-k]=-0.5\times1+0.5\times0+0+1+0+\ldots=0.5$$

$$h[2]=-0.5h[1]+0.5h[0]+\sum_{k=0}^{\infty}\delta[2-k]=-0.5\times0.5+0.5\times1+0+0+1+\ldots=1.25$$ 依次

可得 $h[0]=1,h[1]=\frac{1}{2},h[2]=\frac{5}{4},h[3]=\frac{5}{8},h[4]=\frac{21}{16},h[5]=\frac{21}{32}$ （各 1 分）

9. 求信号 $x(t)=u(t)-u(t-2)$ 与 $y(t)=\cos(\pi t)[u(t)-u(t-2)]$ 的互相关函数 $R_{xy}(t)$。

解： $R_{xy}(t)=x(t)*y^*(-t)=x(t)*y_0(t)$， $y_0(t)=y^*(-t)=\cos(\pi t)[u(t+2)-u(t)]$

利用卷积的性质： $x(t)*y_0(t)=\dfrac{dx(t)}{dt}*\int_{-\infty}^{t}y_0(\tau)d\tau$

其中 $\dfrac{dx(t)}{dt}=\delta(t)-\delta(t-2)$， $\int_{-\infty}^{t}y_0(\tau)d\tau=\dfrac{1}{\pi}\sin\pi t[u(t+2)-u(t)]$

$$R_{xy}(t)=(1/\pi)\sin(\pi t)[u(t+2)-u(t)]*[\delta(t)-\delta(t-2)]$$
$$=(1/\pi)\{\sin(\pi t)u(t+2)-2\sin(\pi t)u(t)+\sin(\pi t)u(t-2)]\}$$
（6 分）

10、图 1.10 所示信号 $x(t)$ 是能量信号还是功率信号？计算它的能量或功率。

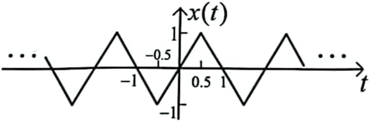


图 1.10

解：该信号是功率信号。（2 分）

信号 $x(t)$ 的功率为

$$P_x=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}|x(t)|^2dt=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}|x(t)|^2dt$$

根据信号 $x(t)$ 的对称特性， $P_x=\dfrac{1}{2}\int_{-1}^{1}|x(t)|^2dt=4\times\dfrac{1}{2}\int_{0}^{0.5}(2t)^2dt=\dfrac{1}{3}$ （4 分）

二、已知连续时间 LTI 系统的单位冲激响应 $h(t)$ 如图 2 左边所示，该系统因果吗？稳定吗？并求系统对图 2 右边所示周期输入信号 $\tilde{x}(t)$ 下的输出信号 $y(t)$。（共 10 分）

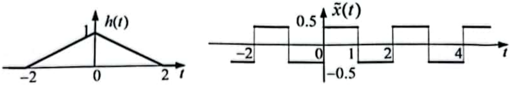


图 2

解：该系统是非因果的。（1 分）

该系统是稳定的。（1 分）

输出信号 $y(t)=0$ （8 分）

三、某系统当输入 $x(t)=\begin{cases}1, 0<t<2\\ 0, 其它\end{cases}$ 时，输出为 $y(t)=\begin{cases}1-\cos\pi t, 0\le t\le 2\\ 0, 其它\end{cases}$。已知该系统是因果的连续时间 LTI 系统。试求：（15 分）

1. 该系统的单位冲激响应 $h(t)$，并概画出 $h(t)$ 的波形；（9 分）
2. 试求该系统对于输入信号为 $x_1(t)=u(t)-u(t-1)$ 的响应 $y_1(t)$，并概画出 $y_1(t)$ 的波形。（6 分）

解：1. $x(t)*h(t)=y(t)$，利用卷积的微分性质则有 $x'(t)*h(t)=y'(t)$

$x(t)=u(t)-u(t-2)$， $x'(t)=\delta(t)-\delta(t-2)$

$y(t)=[1-\cos\pi t][u(t)-u(t-2)]$， $y'(t)=\pi\sin\pi t[u(t)-u(t-2)]$

由于 $\delta(t)=x'(t)+x'(t-2)+x'(t-4)+\cdots=\sum_{l=0}^{\infty}x'(t-2l)$，根据线性时不变性质：

$$h(t)=y'(t)+y'(t-2)+y'(t-4)+\cdots=\sum_{l=0}^{\infty}y'(t-2l)$$

$$h(t)=\pi\sin\pi t[u(t)-u(t-2)]+\pi\sin\pi(t-2)[u(t-2)-u(t-4)]+\cdots$$
$$=\pi\sin\pi t u(t)$$ （6 分）

$h(t)$ 的波形如图 3.1 所示： （3 分）

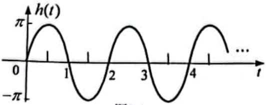


图3.1

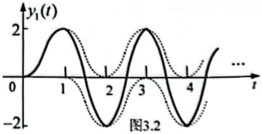


图3.2

2. 当输入信号为 $x_1(t)=u(t)-u(t-1)$ 时，可把 $x_1(t)$ 表示为原来 $x(t)$ 的线性组合

$x_1(t)=x(t)-x(t-1)+x(t-2)+\cdots=\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l x(t-l)$，根据线性时不变性质：

$$y_1(t)=y(t)-y(t-1)+y(t-2)+\cdots=\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l y(t-l)=\sum_{l=0}^{\infty}y(t-2l)-\sum_{l=0}^{\infty}y(t-2l-1)$$

$1+\cos\pi t$

$y_1(t)=[1-\cos\pi t]u(t)-[1-\cos\pi(t-1)]u(t-1)$ （3 分）

$y_1(t)$ 的波形如图 3.2 所示。 （3 分）

四、由如下微分方程和非零起始条件表示的连续时间因果系统，试求：（共 15 分）

$$\begin{cases}\dfrac{d^2y(t)}{dt^2}+4\dfrac{dy(t)}{dt}+3y(t)=\int_0^{\infty}x(t-\tau)d\tau \\ y(0_-)=1, y'(0_-)=5\end{cases}$$

1. 该系统在 $x(t)=\delta(t)$ 时的零状态响应 $y_{zs}(t)$ 和零输入响应 $y_{zi}(t)$；（10 分）
2. 如何用**最少**的基本单元（积分器、相加器、数乘器）实现上述方程描述的连续时间因果 LTI 系统。（5 分）

解：1. 表示该因果系统的方程简化为 $\dfrac{d^2y(t)}{dt^2}+4\dfrac{dy(t)}{dt}+3y(t)=x(t)*u(t)$

该系统可以表示为两个因果系统的级联，其中表示系统 1 的方程为：

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+4\frac{dy(t)}{dt}+3y(t)=x(t)$$

系统 2 的单位冲激响应为 $h_2(t)=u(t)$

则整个系统在 $x(t)=\delta(t)$ 时的零状态响应 $y_{zs}(t)$ 就是整个系统的在起始静止情况下，作为 LTI 系统的单位冲激响应 $h(t)=h_1(t)*h_2(t)$，那么先求系统 1 的单位冲激响应 $h_1(t)$：

$\dfrac{d^2h_1(t)}{dt^2}+4\dfrac{dh_1(t)}{dt}+3h_1(t)=\delta(t)$，利用方程两边奇异函数匹配的方法，可以得到 $h_1(t)$ 应满足的非零初始条件的齐次方程：

$$\begin{cases}\dfrac{d^2h_1(t)}{dt^2}+4\dfrac{dh_1(t)}{dt}+3h_1(t)=0 \\ h_1'(0+)=1，h_1(0+)=0\end{cases}$$

它相应的特征方程是 $\lambda^2+4\lambda+3=0$，两个特征根为 $\lambda_1=-1, \lambda_2=-3$，则

$h_1(t)=\begin{cases}A_1e^{-t}+A_2e^{-3t}, t>0 \\ 0, \quad t<0\end{cases}$，利用上述初始条件可得 $\begin{cases}A_1+A_2=0 \\ -A_1-3A_2=1\end{cases}$，由此可得

$A_1=0.5, A_2=-0.5$

则 $h_1(t)=(0.5e^{-t}-0.5e^{-3t})u(t)$

$y_{zs}(t)=h_1(t)*h_2(t)=(0.5e^{-t}-0.5e^{-3t})u(t)*u(t)$ $=\frac{1}{2}(1-e^{-t})u(t)-\frac{1}{6}(1-e^{-3t})u(t)$ （5分）

$=(\frac{1}{6}e^{-3t}-\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{1}{3})u(t)$.

再求零输入响应 $y_{zi}(t)$

$$\begin{cases}y_{zi}''(t)+4y_{zi}'(t)+3y_{zi}(t)=0 \\ y_{zi}(0_-)=1, \ y_{zi}'(0_-)=5\end{cases}$$

$y_{zi}(t)=B_1e^{-t}+B_2e^{-3t}$

$y_{zi}(0_-)=B_1+B_2=1$

$y_{zi}'(0_-)=-B_1-3B_2=5$

$B_1=4 \qquad B_2=-3$

$\therefore y_{zi}(t)=4e^{-t}-3e^{-3t}$ （5分）

2.