1. 对于以输入输出关系 $y(t)=e^{-2t}\int_{-\infty}^{t}(e^{\tau})^2x(\tau)d\tau$ 描述的系统，判断系统的记忆性、线性、时不变性、因果性、稳定性以及可逆性，如果系统是可逆的，试求它的逆系统的单位冲激响应。

解：该输入输出关系可以表示为 $y(t)=x(t)*h(t)$，其中 $h(t)=e^{-2t}u(t)$，据此可以判断系统是有记忆的、线性的，时不变的，因果的、稳定的、可逆的。（各 1 分，共 6 分）

其逆系统单位冲激响应 $h_I(t)$ 满足关系：$h_I(t)*h(t)=\delta(t)$。对 $h(t)$ 做微分运算：

$$\frac{d}{dt}h(t)=\frac{d}{dt}(e^{-2t}u(t))=(\frac{d}{dt}e^{-2t})u(t)+e^{-2t}\frac{d}{dt}u(t)=-2e^{-2t}u(t)+\delta(t)$$

$h'(t)+2h(t)=\delta(t)$，那么 $h_I(t)=\delta'(t)+2\delta(t)$ （2 分）

2. 对于以输入输出关系 $y[n]=(0.5)^n\sum_{k=-\infty}^{n}2^kx[k]$ 描述的系统，判断系统的记忆性、线性、时不变性、因果性、稳定性以及可逆性，如果系统是可逆的，试求它的逆系统的单位冲激响应。

解：该输入输出关系可以表示为 $y[n]=x[n]*h[n]$，其中 $h[n]=(0.5)^nu[n]$，可以判断系统是有记忆的、线性的、时不变的、因果的、稳定的、可逆的。（各 1 分，共 6 分）

其逆系统单位冲激响应 $h_I[n]$ 满足关系：$h_I[n]*h[n]=\delta[n]$。

该系统及其逆系统的系统函数分别为 $H(z)$、$H_I(z)$，则有：$H(z)\times H_I(z)=1$

$H(z)=1/(1-0.5z^{-1}),|z|>0.5$，$H_I(z)=1-0.5z^{-1}$，$h_I[n]=\delta[n]-0.5\delta[n-1]$ （2 分）

3. 对于单位冲激响应为 $h(t)=\delta(t-T)$ 的 LTI 系统，试证明 $\phi_1(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)$ 是该系统的特征函数，并给出相应的特征值；与此类似，试找出相应的特征值为2的另外一个特征函数 $\phi_2(t)$。

解：$h(t)*\phi_1(t)=\delta(t-T)*\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)=1\times\phi_1(t)$

按照 LTI 系统特征函数特征值的定义，可知 $\phi_1(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)$ 为该系统的特征函数，相应的特征值为1；

（4 分）

与此类似，考虑 $\phi_2(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(\frac{1}{2})^k\delta(t-kT)$ 的情况，即

$$h(t)*\phi_2(t)=\delta(t-T)*\sum_{k=-\infty}^{\infty}(\frac{1}{2})^k\delta(t-kT)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\{(\frac{1}{2})^k\delta(t-kT)\}*\delta(t-T)$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(\frac{1}{2})^k\delta(t-kT-T)\underline{\underline{m=k+1}}\sum_{m=-\infty}^{\infty}(\frac{1}{2})^{m-1}\delta(t-mT)=2\sum_{m=-\infty}^{\infty}(\frac{1}{2})^m\delta(t-mT)=2\times\phi_2(t)$$

可见

$\phi_2(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(\frac{1}{2})^k\delta(t-kT)$ 是相应的特征值为2的另外一个特征函数。（4 分）

4. 试写出图 1.4 所示信号的闭合表达式，分别概画出信号 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)$，$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x(t)$ 的波形。

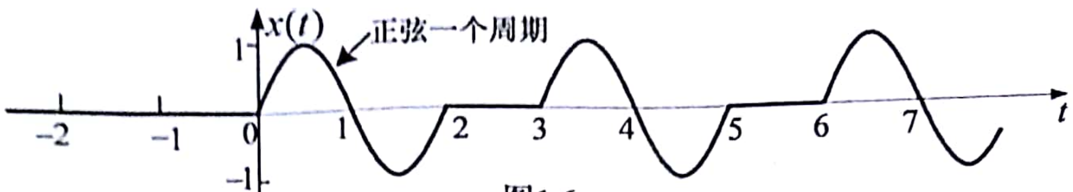
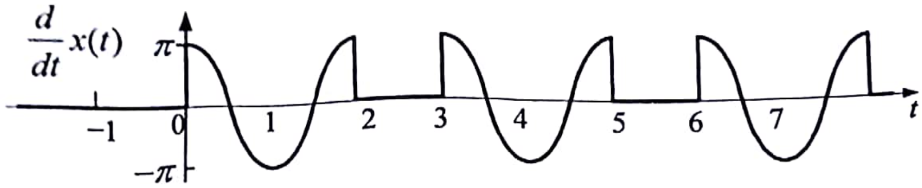
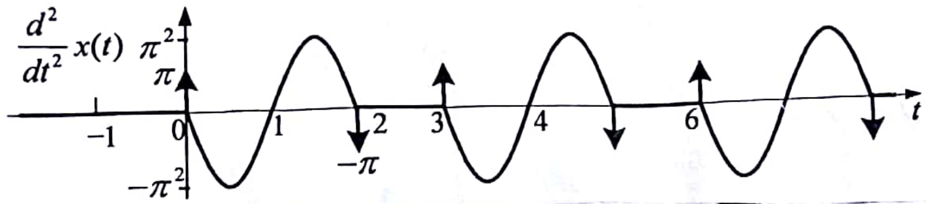


图1.6

解：$x(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\sin\pi(t-3k)[u(t-3k)-u(t-3k-2)]$（2 分）



（3分）



（3分）

5. 已知离散时间因果稳定的 LTI 系统单位冲激响应为 $h[n]=\sum_{k=0}^{\infty}h_k\delta[n-k]$，它的逆系统是因果稳定 LTI 系统，其单位冲激响应为 $h_{inv}[n]=\sum_{k=0}^{\infty}g_k\delta[n-k]$。试确定 g_k 满足的代数方程并找出计算的递推算法。

解：g_k 满足的代数方程为：$(\sum_{k=0}^{\infty}h_k\delta[n-k])*(\sum_{k=0}^{\infty}g_k\delta[n-k])=\delta[n]$（8 分）

计算的递推算法：

$$\begin{cases} h_0\times g_0=1 \\ h_1\times g_0+h_0\times g_1=0 \\ h_2\times g_0+h_1\times g_1+h_0\times g_2=0 \\ h_3\times g_0+h_2\times g_1+h_1\times g_2+h_0\times g_3=0 \\ \cdots \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g_0=1/h_0 \\ g_1=-(h_1\times g_0)/h_0 \\ g_2=-(h_2\times g_0+h_1\times g_1)/h_0 \\ g_3=-(h_3\times g_0+h_2\times g_1+h_1\times g_2)/h_0 \\ \cdots \end{cases}$$

6. 由差分方程 $y[n]-\frac{1}{2}y[n-1]=\sum_{k=0}^{2}(x[n-k]-2x[n-k-1])$ 和起始条件 $y[-1]=1$ 表示的离散时间因果系统，当系统输入 $x[n]=u[n]$ 时，试用递推算法求系统的零状态响应 $y_{zs}[n]$ 和零输入响应 $y_{zi}[n]$（各计算出前 4 个序列值）。

解：$y[n]-\frac{1}{2}y[n-1]=\sum_{k=0}^{2}(x[n-k]-2x[n-k-1])=x[n]-2x[n-1]+x[n-1]-2x[n-2]$

$+x[n-2]-2x[n-3]=x[n]-x[n-1]-x[n-2]-2x[n-3]$

递推算法公式：$y[n]=\frac{1}{2}y[n-1]+x[n]-x[n-1]-x[n-2]-2x[n-3]$

代入零起始条件 $y[-1]=0$，以及输入 $x[n]=u[n]$，可得零状态响应：

$y_{zs}[n]=\frac{1}{2}y[n-1]+u[n]-u[n-1]-u[n-2]-2u[n-3]$

依次代入 $n=0,1,2,3$ 可得：（每个序列值 1 分，共 4 分）

$$y_{zs}[0]=\frac{1}{2}y[-1]+u[0]-u[-1]-u[-2]-2u[-3]=\frac{1}{2}\times 0+1-0-0-2\times 0=1$$

$$y_{zs}[1]=\frac{1}{2}y[0]+u[1]-u[0]-u[-1]-2u[-2]=\frac{1}{2}\times 1+1-1-0-2\times 0=\frac{1}{2}$$

$$y_{zs}[2]=\frac{1}{2}y[1]+u[2]-u[1]-u[0]-2u[-1]=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+1-1-1-2\times 0=-\frac{3}{4}$$

$$y_{zs}[3]=\frac{1}{2}y[2]+u[3]-u[2]-u[1]-2u[0]=\frac{1}{2}\times\frac{-3}{4}+1-1-1-2\times 1=-\frac{27}{8}$$

代入非零起始条件 $y[-1]=1$，以及零输入 $x[n]=0$，可得零输入响应：

$y_{zi}[n]=\frac{1}{2}y[n-1]$，依次代入 $n=0,1,2,3$ 可得：（每个序列值 1 分，共 4 分）

$y_{zi}[0]=\frac{1}{2}y[-1]=\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{2}$，$y_{zi}[1]=\frac{1}{2}y[0]=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$，$y_{zi}[2]=\frac{1}{8}$，$y_{zi}[3]=\frac{1}{16}$

二、某连续时间LTI系统的单位冲激响应$h(t)=tu(t)-2(t-2)u(t-2)+(t-4)u(t-4)$，该系统因果吗？稳定吗？并求该系统对图 2 所示周期输入信号 $x(t)$ 下的输出信号 $y(t)$。(共 12 分)

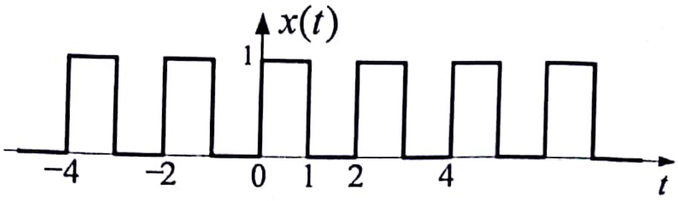


图 2

解：该系统的 $h(t)$ 的波形如图 2.1 所示。

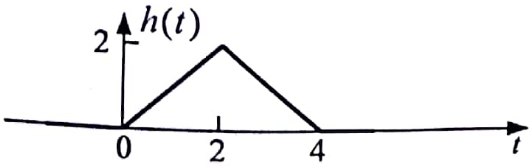


图 2.1

可以判定该系统是因果的，稳定的。（4 分）

用时域图解卷积的方法：$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau$

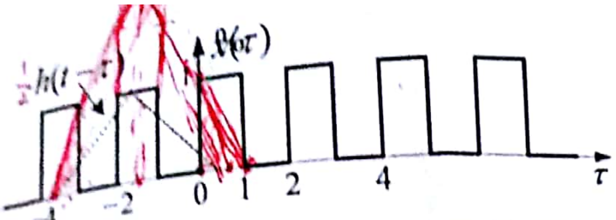


图 2.2

图2.2中画出了 $x(\tau)$ 和 $h(t-\tau)$ 的函数图形和卷积示意图。$y(t)$ 就是被积函数 $x(\tau)h(t-\tau)$ 曲线下的面积。根据 $h(t-\tau)$ 与 $x(\tau)$ 图形关系，可以发现：对于任意的 t，上述卷积积分的值均为2。因此，求得系统在 $x(t)$ 输入时的输出是常数信号，即 （8 分）

$y(t)=2$

三、已知单位阶跃响应为 $s(t)=0.5\pi[tu(t)-(t-2)u(t-2)-(t-4)u(t-4)+(t-6)u(t-6)]$ 的连续时间LTI 系统，当输入信号 $x(t)=\sin\pi tu(t)-\sin\pi(t-2)u(t-2)$，试分别概画出 $x(t)$ 和 $s(t)$ 的波形，并求出该系统对输入 $x(t)$ 的响应 $y(t)$，且概画出 $y(t)$ 的波形。（共 18 分）

解：$x(t)$ 和 $s(t)$ 的波形分别如图 3.1 和 3.2 所示。 （4 分）

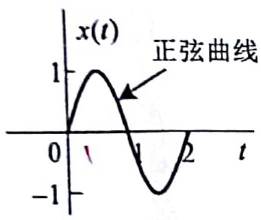


图 3.1

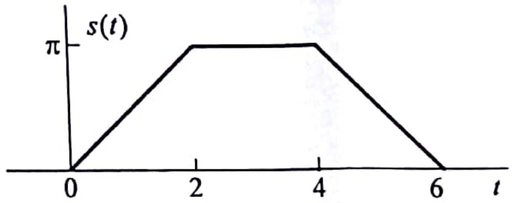


图 3.2

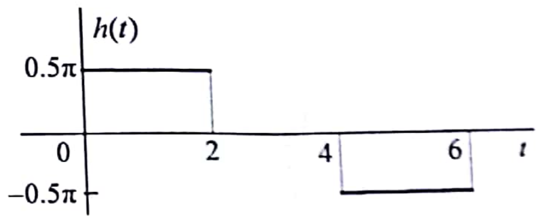


图 3.3

系统对 $x(t)$ 的响应为 $y(t)=x(t)*h(t)$，其中，$h(t)=s'(t)$，其波形见图 3.3，且可表示为：

$$h(t)=0.5\pi[u(t)-u(t-2)-u(t-4)+u(t-6)] \quad （2 分）$$

$$y(t)=x(t)*h(t)=[\sin\pi tu(t)-\sin\pi(t-2)u(t-2)]*0.5\pi[u(t)-u(t-2)-u(t-4)+u(t-6)]$$

$$=\sin\pi tu(t)*[\delta(t)-\delta(t-2)]*0.5\pi u(t)*[\delta(t)-\delta(t-2)-\delta(t-4)+\delta(t-6)]$$

$$=0.5\pi\sin\pi tu(t)*u(t)*[\delta(t)-\delta(t-2)]*[\delta(t)-\delta(t-2)-\delta(t-4)+\delta(t-6)]$$

$$=(0.5\pi)\sin\pi tu(t)*u(t)*[\delta(t)-2\delta(t-2)+2\delta(t-6)-\delta(t-8)] \quad （6 分）$$

令：$y_1(t)=(0.5\pi)\sin\pi tu(t)*u(t)=(0.5\pi)\left[\int_0^{\infty}\sin\pi\tau\,d\tau\right]u(t)=\dfrac{(1-\cos\pi t)}{2}u(t)$，则有

$$y(t)=y_1(t)-2y_1(t-2)+2y_1(t-6)-y_1(t-8)$$

$$=0.5\{(1-\cos\pi t)u(t)-2[1-\cos\pi(t-2)]u(t-2)+2[1-\cos\pi(t-6)]u(t-6)-[1-\cos\pi(t-8)]u(t-8)\}$$

上述 $y_1(t)$ 和求得的系统输出 $y(t)$ 的波形分别如图 3.4 和 3.5 所示。 （6 分）

图 3.4

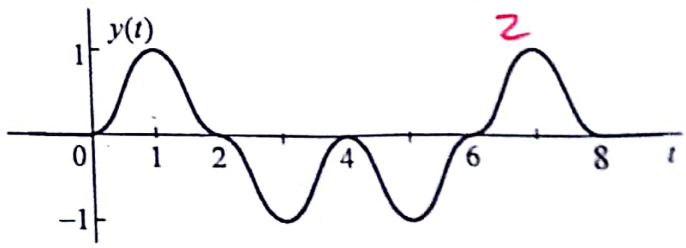


图 3.5

四、由如下微分方程和非零起始条件表示的连续时间因果系统，试求：（共 22 分）

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y(t)}{dt^2}+3\dfrac{dy(t)}{dt}+2y(t)=\dfrac{dx(t)}{dt}+x(t) \\ y(0\_)=1, y'(0\_)=-3 \end{cases}$$

1. 该系统在 $x(t)=u(t)$ 时的零状态响应 $y_{zs}(t)$ 和零输入响应 $y_{zi}(t)$；（16 分）
2. 如何用**最少**的基本单元（积分器、相加器、数乘器）实现上述方程描述的连续**时间因果 LTI 系统。**（6 分）

解：1. 表示该因果系统的方程简化为 $\dfrac{d^2y(t)}{dt^2}+3\dfrac{dy(t)}{dt}+2y(t)=x(t)*[\delta'(t)+2\delta(t)]$

该系统可以表示为两个因果系统的级联，其中表示系统 1 的方程为：

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+3\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=x(t)$$

系统 2 的单位冲激响应为 $h_2(t)=\delta'(t)+\delta(t)$ 1 3

则整个系统在 $x(t)=u(t)$ 时的零状态响应 $y_{zs}(t)=u(t)*h(t)=u(t)*h_1(t)*h_2(t)$，其中 $h_1(t)$ 是系统 1 的单位冲激响应：

$\dfrac{d^2h_1(t)}{dt^2}+3\dfrac{dh_1(t)}{dt}+2h_1(t)=\delta(t)$，利用方程两边奇异函数匹配的方法，可以得到 $h_1(t)$ 应满足的非零初始条件的齐次方程：

$$\begin{cases} \dfrac{d^2h_1(t)}{dt^2}+3\dfrac{dh_1(t)}{dt}+2h_1(t)=0 \\ h_1'(0+)=1，h_1(0+)=0 \end{cases}$$ 2 3

它相应的特征方程是 $\lambda^2+3\lambda+2=0$，两个特征根为 $\lambda_1=-1, \lambda_2=-2$，则

$h_1(t)=\begin{cases} A_1e^{-t}+A_2e^{-2t}, t>0 \\ 0, \quad t<0 \end{cases}$，利用上述初始条件可得 $\begin{cases} A_1+A_2=0 \\ -A_1-2A_2=1 \end{cases}$，由此可得

$A_1=1, A_2=-1$

则 $h_1(t)=(e^{-t}-e^{-2t})u(t)$

$$\begin{aligned} y_{zs}(t)&=h_1(t)*h_2(t)*u(t)=(e^{-t}-e^{-2t})u(t)*\{[\delta'(t)+\delta(t)]*u(t)\} \\ &=(e^{-t}-e^{-2t})u(t)*\{\delta(t)+u(t)\} \\ &=(e^{-t}-e^{-2t})u(t)+(e^{-t}-e^{-2t})u(t)*u(t) \\ &=-0.5e^{-2t}u(t)+0.5u(t) \end{aligned}$$ 3（10 分）

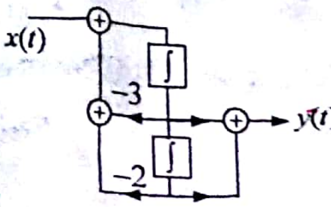
再求零输入响应 $y_{zi}(t)$，代入非零起始条件的齐次方程：

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y_{zi}(t)}{dt^2}+3\dfrac{dy_{zi}(t)}{dt}+2y_{zi}(t)=0 \\ y(0\_)=1, y'(0\_)=-3 \end{cases}$$

由相应的特征方程和特征根，可得 $y_{zi}(t)=B_1e^{-t}+B_2e^{-2t}$，利用上述起始条件可得

$\begin{cases} B_1+B_2=1 \\ -B_1-2B_2=-3 \end{cases}$，得到 $B_1=-1, B_2=2$，则 $y_{zi}(t)=-e^{-t}+2e^{-2t}$ （6 分）

2.



（6 分）