2021级6系《信号与系统》期中考试试题　2023.4.18

姓名　　　　　学号　　　　　成绩 100

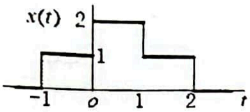
16

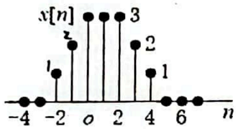
一、对下图所示连续时间函数 $x(t)$ 和离散时间序列 $x[n]$，分别试求：（共16分）

1. 概写出 $x(t)$ 和 $x[n]$ 的闭合解析表达式；(4分)

2. 分别求 $\frac{d}{dt}x(t)$、$\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau$，写出闭合解析表达式并画出波形。(8分)

3. 画出 $\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]$ 和 $\Delta x[n]$ 的序列波形。(4分)





10

二、对于下列输入输出关系描述的每个系统，其中 $x(t)$ 或 $x[n]$ 表示输入，$y(t)$ 或 $y[n]$ 表示输出，试分别判断如下的每一个性质：(10分)

(1) $y(t)=[x(t)+x(t-10)]u(t)$

(2) $y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}(1/2)^{n-k}x[k]$

a) 记忆性　　b) 因果性　　c) 稳定性　　d) 线性　　e) 时不变性

三、试求下列小题：　　(每小题10分,共20分)

10

1.已知周期信号 $\tilde{x}(t)$ 的图形如下，请问该信号是能量信号还是功率信号，如果是能量信号，求出信号的能量，如果是功率信号，求出其功率。

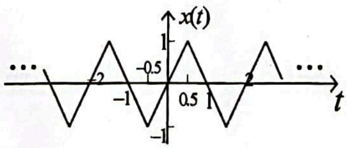


图3.1

10

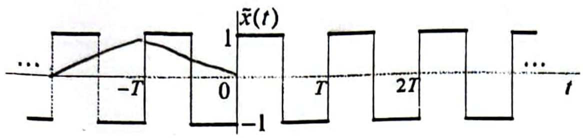
2. 对于下表所示的离散时间序列 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$，试求它们的互相关函数 $R_{x_1x_2}[n]$。

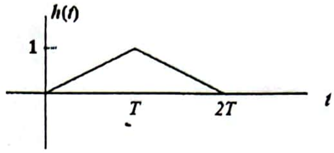
n	<-1	-1	0	1	2	>2
$x_1[n]$	0	3	-1	0	1	0

n	<0	0	1	2	3	4	>4
$x_2[n]$	0	1	-1	1	1	1	0

12

四、某连续时间 LTI 系统单位冲激响应 $h(t)$ 和输入 $\tilde{x}(t)$ 如下图所示，试求其输出 $y(t)$，并概画出它的波形。（12 分）





12

五、若已知一个离散时间因果稳定 LTI 系统的单位冲激响应为 $h[n]=\sum_{k=0}^{N}h_k\delta[n-k]$，$0\le N<\infty$，且它的逆系统也是因果稳定的 LTI 系统，其单位冲激响应可表示成 $h_I[n]=\sum_{k=0}^{N}g_k\delta[n-k]$，试确定 g_k 满足的代数方程，并找出计算它的递推算法。（12 分）

15

六、由如下方程和非零起始条件表征的离散时间因果系统：（15 分）

$$\begin{cases} y[n]-(3/2)y[n-1]+(1/2)y[n-2]=x[n]+\sum_{k=-\infty}^{n}x[k] \\ y[-1]=1,\quad y[-2]=0.25,\quad y[n]=0, n<-2 \end{cases}$$

1. 试用差分方程的递推算法，计算该系统在输入 $x[n]=u[n]$ 时的零输入响应 $y_{zi}[n]$ 和零状态响应 $y_{zs}[n]$，至少分别计算出前 4 个序列值。(10 分)
2. 对于用同样方程表示的离散时间因果 LTI 系统，试用最少数目的三种离散时间基本单元(离散时间数乘器、相加器和单位延时)实现该系统的直接实现结构。 (5 分)

15

七、由如下微分方程和起始条件表征的连续时间因果系统，试分别求：（15 分）

$$y''(t)+3y'(t)+2y(t)=x(t)\ ;\quad y(0_-)=3\ ,\ y'(0_-)=4$$

1. $x(t)=4e^{-3t}u(t)$ 时的系统输出 $y(t)$，$t\ge 0$。并指出其零输入响应和零状态响应。（10 分）
2. 对于用同样方程表示的连续时间因果 LTI 系统，试用最少数目的三种连续时间基本单元(连续时间数乘器、相加器和积分器)实现该系统的直接实现结构。（5 分）

一.

1. $x(t) = u(t+1) - u(t) + 2u(t) - 2u(t-1) + u(t-1) - u(t-2)$

$= u(t+1) + u(t) - u(t-1) - u(t-2)$

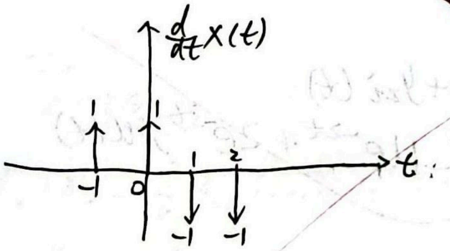
$x[n] = u[n+2] + u[n+1] + u[n] - u[n-3] - u[n-4] - u[n-5]$

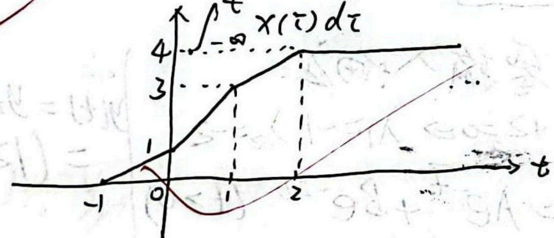
2. $\frac{d}{dt}x(t) = \delta(t+1) + \delta(t) - \delta(t-1) - \delta(t-2)$

$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau = x(t) * u(t) = u(t) * [\delta(t+1) + \delta(t) - \delta(t-1) - \delta(t-2)] * u(t)$

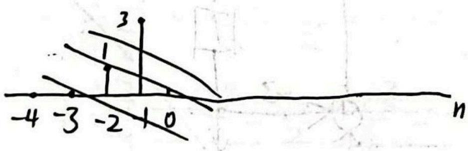
$= tu(t) * [\delta(t+1) + \delta(t) - \delta(t-1) - \delta(t-2)]$

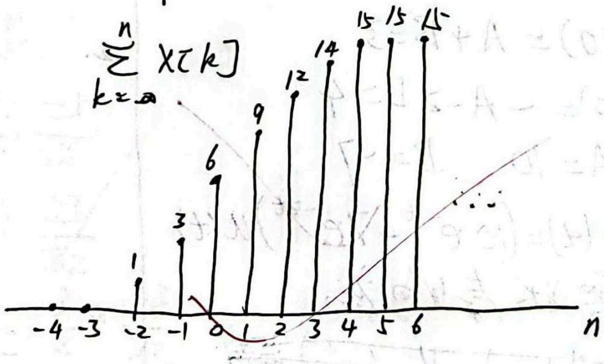
$= (t+1)u(t+1) + tu(t) - (t-1)u(t-1) - (t-2)u(t-2)$



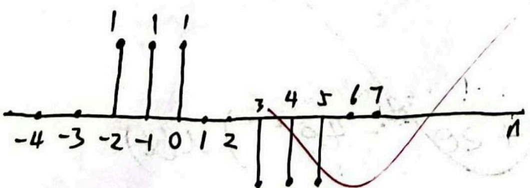


3.





$\Delta x[n]$



二、(1)

记忆性：√　因果性：√　稳定性：√　线性：√　时不变性：×

(2)

记忆性：√　因果性：√　稳定性：√　线性：√　时不变性：√

三、1.

由于信号对称性，只需取半个周期区间

功率信号　功率 $= \frac{1}{0.5-(-0.5)}\int_{-0.5}^{0.5}(2t)^2\,dt = \frac{1}{3}$

2.

记 $x_3[n] = x_2^*[-n]$

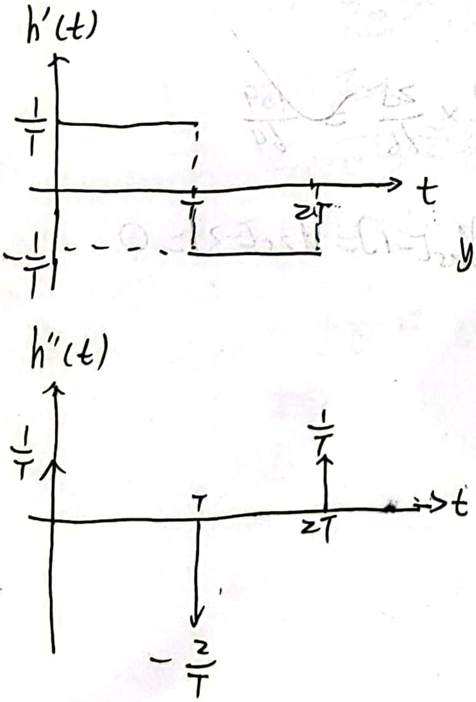
$R_{x_1x_2}[n] = x_1[n] * x_2^*[-n] = x_1[n] * x_3[n]$

n	$x_1[n]$	n: -4	-3	-2	-1	0
		$x_3[n]$: 1	1	1	-1	1
-1	3	3	3	3	-3	3
0	-1	-1	-1	-1	1	-1
1	0	0	0	0	0	0
2	1	1	1	1	-1	1

n	$R_{x_1x_2}[n]$
-5	3
-4	2
-3	2
-2	-3
-1	5
0	0
1	-1
2	1

n为其他值时 $R_{x_1x_2}[n] = 0$

四.



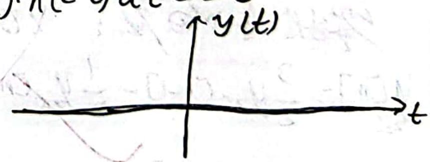
补充：$\tilde{x}(t) * h'(t) \equiv 0$

$\tilde{x}(t) * h''(t) = 0 \Rightarrow \tilde{x}(t) * h'(t) \equiv const$

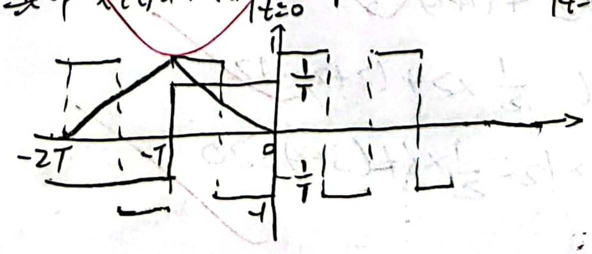
$\tilde{x}(t) * h'(t)\Big|_{t=0} = 0 \Rightarrow \tilde{x}(t) * h(t) \equiv const$

$\tilde{x}(t) * h(t)\Big|_{t=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\cdot h(-\tau)\,d\tau = 0$

$y(t) = \tilde{x}(t) * h(t) \equiv 0$



其中 $\tilde{x}(t) * h'(t)\Big|_{t=0}$ 和 $\tilde{x}(t) * h(t)\Big|_{t=0}$ 可由下图观察得到



三、

$h[n] * h_I[n] = \delta[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]\, h_I[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_k g_{n-k} = \left(\sum_{k=0}^{n} h_k g_{n-k}\right) u[n]$

$n=0$ 时, $\delta[0] = 1 = h_0 g_0 \Rightarrow g_0 = \frac{1}{h_0}$ ①

$n \neq 0$ 时, $\delta[n] = 0 = \sum_{k=0}^{n} h_k g_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} g_k h_{n-k} \Rightarrow g_n = -\frac{1}{h_0} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} g_k h_{n-k}$ ②

$\sum_{k=0}^{n} g_k h_{n-k} = \begin{cases} 0 & (n>0) \\ 1 & (n=0) \end{cases}$ ~~即为~~ g_k 满足的方程

由式① ② 即可递推出 g_n

六、

1. 零输入响应:

$y_{zi}[n] = \frac{3}{2} y_{zi}[n-1] - \frac{1}{2} y_{zi}[n-2]$, $y_{zi}[-1] = 1$, $y_{zi}[-2] = 0.25$

$y_{zi}[0] = \frac{3}{2} \times 1 - \frac{1}{2} \times 0.25 = \frac{11}{8}$

$y_{zi}[1] = \frac{3}{2} \times \frac{11}{8} - \frac{1}{2} \times 1 = \frac{25}{16}$

$y_{zi}[2] = \frac{3}{2} \times \frac{25}{16} - \frac{1}{2} \times \frac{11}{8} = \frac{53}{32}$

$y_{zi}[3] = \cancel{\frac{3}{2} \times \frac{29}{32} - \frac{1}{2} \times \frac{17}{16} = \frac{3}{8}}\ \frac{3}{2} \times \frac{53}{32} - \frac{1}{2} \times \frac{25}{16} = \frac{109}{64}$

零状态响应: $x[n] = u[n]$ 时

$y_{zs}[n] = \frac{3}{2} y_{zs}[n-1] - \frac{1}{2} y_{zs}[n-2] + (n+2)\ (n \geq 0$ 时$)$, $y_{zs}[-1] = y_{zs}[-2] = 0$

$y_{zs}[0] = 0+2 = 2$

$y_{zs}[1] = \frac{3}{2} \times 2 + (1+2) = 6$

$y_{zs}[2] = \frac{3}{2} \times 6 - \frac{1}{2} \times 2 + (2+2) = 12$

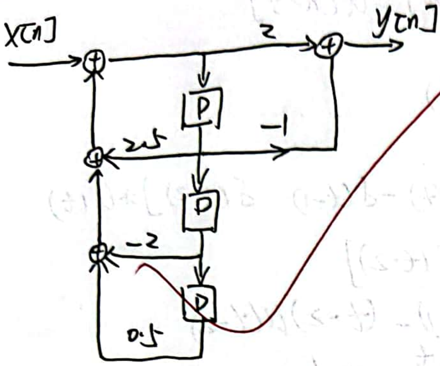
$y_{zs}[3] = \frac{3}{2} \times 12 - \frac{1}{2} \times 6 + (3+2) = 20$

3. $y[n] - 1.5y[n-1] + 0.5y[n-2] = x[n] + \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$ ①

$y[n-1] - 1.5y[n-2] + 0.5y[n-3] = x[n-1] + \sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k]$ ②

① − ② 得：

$y[n] - 2.5y[n-1] + 2y[n-2] - 0.5y[n-3] = \cancel{x[n-1]}\ 2x[n] - x[n-1]$



七、1. 零输入响应：

$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$

$y_{zi}(t) = Ae^{-t} + Be^{-2t} \quad (t \geq 0)$

$\begin{cases} y_{zi}(0) = A + B = 3 \\ y_{zi}'(0) = -A - 2B = 4 \end{cases}$

$\Rightarrow A = 10 \quad B = -7$

$\therefore y_{zi}(t) = (10e^{-t} - 7e^{-2t})u(t)$

零状态响应：

~~$y_{zs}'(0^+) = 1,\ y_{zs}(0^+) = 0$~~

$\begin{cases} h''(t) + 3h'(t) + 2h(t) = 0 \quad (t > 0) \\ h'(0^+) = 1, \quad h(0^+) = 0 \end{cases}$

设 $h(t) = Ce^{-t} + De^{-2t} \quad (t > 0)$

$\begin{cases} h'(0^+) = -C - 2D = 1 \\ h(0^+) = C + D = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow C = 1 \quad D = -1$

$\therefore h(t) = (e^{-t} - e^{-2t})u(t)$

$y_{zs}(t) = x(t) * h(t) = \left(4\,\frac{e^{-t} - e^{-3t}}{3-1} - 4\,\frac{e^{-2t} - e^{-3t}}{3-2}\right)u(t)$

$= (2e^{-t} + 2e^{-3t} - 4e^{-2t})u(t)$

$\therefore y(t) = y_{zs}(t) + y_{zi}(t)$

$= (12e^{-t} - 11e^{-2t} + 2e^{-3t})u(t)$

2.