

中国科学技术大学

2020~2021 学年第二学期考试试卷

☒A 卷 ☐B 卷

课程名称: 热学 B 课程代码: PHYS1002B.11

开课院系: 物理学院 考试形式: 半开卷

姓 名: _____ 学 号: _____ 专 业: _____

题 号	1	2	3	4	5	6	7	8	总 分
得 分									

注: 共八道大题, 请勿漏答。请在首页写上姓名和学号, 并在每道题下方空白处答题, 答题时要注意写上必要的计算步骤。本次考试允许携带一张写满笔记的 A4 纸, 但不允许使用包括计算器在内的所有电子产品。

摩尔质量: $1 \text{ mol } ^{12}\text{C}$ 原子的质量为 12 g ;

理想气体方程 $PV = \nu RT = Nk_B T$

一般气体内能关系:

$$dU = C_V dT + \left(T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V - P \right) dV$$

范德瓦尔斯气体方程:

$$\left(P + \frac{a}{V_m^2} \right) (V_m - b) = RT$$

这里, V_m 为气体摩尔体积。

(装订线内不要答题)

1. (12 分) 已知一混合理想气体中几种主要成分体积比为: CO_2 ——60%, O_2 ——30%, H_2 ——10%, 试求:

- (1) 该混合气体的平均摩尔质量;
- (2) 各组分的质量百分比;
- (3) 标准状态下各组分的分压强;
- (4) 标准状态下各组分的密度及混合气体的密度。

解: (1) 对混合气体中第 i 种组分状态方程有

$$PV_i = \frac{M_i}{\mu_i} RT$$

对各组分求和可得

$$PV = \sum_i \frac{M_i}{\mu_i} RT = \frac{\sum_i M_i RT}{\sum_i \frac{V_i}{V} \mu_i} = \frac{MRT}{\sum_i \frac{V_i}{V} \mu_i} \quad (1 \text{ 分})$$

与混合气体状态方程比较可得

$$PV = \frac{MRT}{\mu}$$

$$\mu = \sum_i \frac{V_i}{V} \mu_i = 36.2 (\text{g/mol}) \quad (1 \text{ 分})$$

(2) 由各组分气体状态方程和混合气体状态方程之比可得

$$\frac{M_i}{M} = \frac{V_i}{V} \cdot \frac{\mu_i}{\mu}$$

$$\frac{M_{\text{CO}_2}}{M} = 72.9\% \quad \frac{M_{\text{O}_2}}{M} = 26.5\% \quad \frac{M_{\text{H}_2}}{M} = 0.5\% \quad (3 \text{ 分})$$

(3) 由道尔顿分压定律

$$P_i V = \frac{M_i}{\mu_i} RT$$

$$P_i = \frac{V_i}{V} P$$

$$P_{\text{CO}_2} = 0.6 \text{ atm} \quad P_{\text{O}_2} = 0.3 \text{ atm} \quad P_{\text{H}_2} = 0.1 \text{ atm} \quad (3 \text{ 分})$$

(4) 由理想气体状态方程变形可得

$$P_i V = \frac{M_i}{\mu_i} RT \Rightarrow \rho_i = \frac{M_i}{V} = \frac{P_i \mu_i}{RT}$$

$$\rho_{\text{CO}_2} = 1.175 \text{ g/L} \quad \rho_{\text{O}_2} = 0.427 \text{ g/L} \quad \rho_{\text{H}_2} = 0.009 \text{ g/L} \quad (3 \text{ 分})$$

$$\rho_{\text{混合}} = 1.611 \text{ g/L} \quad (1 \text{ 分})$$

2. (10 分) 设理想气体的摩尔定容热容量 C_v 为常数, 体积由 V_0 膨胀到 $4V_0$, 膨胀过程中压强和体积满足 $PV^2 = C$ (常数), 试求 1mol 理想气体在上述过程中:

(1) 对外界做的功;

(2) 内能的增量;

(3) 熵的增量。

解:

(1) 对外界做的功 $W = \int_{V_0}^{4V_0} P dV = \int_{V_0}^{4V_0} \frac{C}{V^2} dV = C \left(\frac{1}{V_0} - \frac{1}{4V_0} \right) = \frac{3C}{4V_0}$ (3 分)

(2) 理想气体状态方程 $PV = RT$, 过程满足 $PV^2 = C$, 联立两式得

$$T = \frac{C}{RV} \Rightarrow dT = -\frac{C}{RV^2} dV \quad (2 \text{ 分})$$

因此内能的增量为

$$\Delta U = \int C_v dT = -\frac{CC_v}{R} \int_{V_0}^{4V_0} \frac{dV}{V^2} = \frac{CC_v}{R} \left(\frac{1}{4V_0} - \frac{1}{V_0} \right) = -\frac{3CC_v}{4RV_0} \quad (2 \text{ 分})$$

(3) 熵的增量为

$$\Delta S = \int \frac{dQ}{T} = \int \frac{C_v dT + PdV}{T} = R \int_{V_0}^{4V_0} \frac{dV}{V} - C_v \int_{V_0}^{4V_0} \frac{dV}{V} = (R - C_v) \ln 4 \quad (3 \text{ 分})$$

3. (10 分) 一容器体积为 $2V$, 隔板把它分成相等的两半。开始时, 左边有压强为 p_0 的理想气体, 右边为真空。在隔板上有一面积为 S 的小孔。求打开小孔后左边气体的压强 p 随时间 t 的变化关系。假定过程中左右两边温度相等且保持不变, 设分子的平均速率为 \bar{v} 。

解: 设小孔未打开时, 左边容器内的分子数为 N_0 , 打开小孔 t 秒后, 左边容器的分子数为 N , 则此时右边容器内的分子数为 $N_0 - N$ 。单位时间内撞击容器壁上单位面积的分子数为 $\frac{1}{4}n\bar{v}$, 在 $t \sim t+dt$ 时间内从容器左边进入到右边的分子数为

$$dN_1 = \frac{1}{4} \frac{N}{V} \bar{v} S dt \quad (1 \text{ 分})$$

从容器右边进入到左边的分子数为

$$dN_2 = \frac{1}{4} \frac{N_0 - N}{V} \bar{v} S dt \quad (1 \text{ 分})$$

这样 dt 时间内容器左边分子数净减少为

$$-dN = dN_1 - dN_2 = \frac{1}{4} \frac{2N - N_0}{V} \bar{v} S dt = \frac{1}{4} \frac{\bar{v} S}{kT} (2p - p_0) dt \quad (2 \text{ 分})$$

由 $p = nkT$, 温度不变时, 可得

$$dp = kT dn = kT \frac{dN}{V} = -\frac{\bar{v} S}{4V} (2p - p_0) dt \quad (3 \text{ 分})$$

上式整理, 然后积分, 可得

$$p = \frac{p_0}{2} e^{-\frac{\bar{v} S}{2V} t} + C \quad (2 \text{ 分})$$

当 $t=0$ 时, $p=p_0$, 可得

$$C = \frac{p_0}{2}$$

因此打开小孔后左边气体的压强 p 随时间 t 的变化关系为

$$p = \frac{p_0}{2} \left(e^{-\frac{\bar{v} S}{2V} t} + 1 \right) \quad (1 \text{ 分})$$

4. (18 分) 两个完全相同的物体, 热容量都为 C , 初始温度都为 T_i , 如果有一个制冷机工作在这两个物体之间, 使物体 1 的温度降低到 T_2 , 另一个物体 2 的温度升高。

(1) 至少要对制冷机做多少功?

(2) 如果第 (1) 问中的功由 ν mol 范德瓦尔斯气体的准静态等温膨胀过程提供, 且该过程气体对外所做的功完全提供给制冷机, 当气体由 V_i 膨胀至 V_f , 计算该过程中需要保持气体的温度 T 为多少? (结果用范德瓦尔斯气体的 a, b 系数表示)

(3) 在第 (2) 问的过程中, 范德瓦尔斯气体前后的熵变是多少?

解: (1) 暂时假设物体 2 的温度升高到 T_3 , 由题意知制冷机从物体 1 吸收的热量是:

$$Q_2 = C(T_i - T_2)$$

释放到物体 2 中的热量为 $Q_1 = C(T_3 - T_i)$

制冷机需要做功 $W = Q_1 - Q_2 = C(T_3 + T_2 - 2T_i)$ (2 分)

当制冷机可逆时, 需要做功最少, 对于整个系统而言是一个可逆孤立系统, 则前后总熵变为 0。

另一方面, 物体 1 温度降低, 其熵变为:

$$\Delta S_1 = \int_{T_i}^{T_2} \frac{C dT}{T} = C \ln\left(\frac{T_2}{T_i}\right)$$

物体 2 温度升高了, 其熵变为:

$$\Delta S_2 = \int_{T_i}^{T_3} \frac{C dT}{T} = C \ln\left(\frac{T_3}{T_i}\right)$$

$$\Delta S_1 + \Delta S_2 = 0 \Rightarrow T_3 = \frac{T_i^2}{T_2} \quad (2 \text{ 分})$$

所以最小功应该等于 $W_{\min} = C\left(\frac{T_i^2}{T_2} + T_2 - 2T_i\right)$ 。 (2 分)

(2) 由第 (1) 步的计算知该过程范德瓦尔斯气体需要对外做功:

$$W' = W_{\min} = C\left(\frac{T_i^2}{T_2} + T_2 - 2T_i\right)。$$

外界需对范德瓦尔斯气体做功: $W = -W' = -C\left(\frac{T_i^2}{T_2} + T_2 - 2T_i\right) = -\int p dV$ (1 分)

而范德瓦尔斯气体

$$p = \frac{\nu RT}{V-\nu b} - \frac{av^2}{V^2} \quad (1 \text{ 分})$$

$$\Rightarrow W = - \int_{V_i}^{V_f} \left(\frac{\nu RT}{V-\nu b} - \frac{av^2}{V^2} \right) dV = -[\nu RT \ln \left(\frac{V_f - \nu b}{V_i - \nu b} \right) - av^2 \left(\frac{1}{V_i} - \frac{1}{V_f} \right)]$$

$$\Rightarrow -C \left(\frac{T_i^2}{T_2} + T_2 - 2T_i \right) = -[\nu RT \ln \left(\frac{V_f - \nu b}{V_i - \nu b} \right) - av^2 \left(\frac{1}{V_i} - \frac{1}{V_f} \right)]$$

$$T = \frac{av^2 \left(\frac{1}{V_i} - \frac{1}{V_f} \right) + C \left(\frac{T_i^2}{T_2} + T_2 - 2T_i \right)}{\nu R \ln \left(\frac{V_f - \nu b}{V_i - \nu b} \right)} \quad (3 \text{ 分})$$

(3) 由熵的定义可知:

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = \frac{dU + p dV}{T} \quad (1 \text{ 分})$$

其中 $dU = \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T dV + \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT$

等温过程 $dT=0$, $dU = \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T dV = \left[T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V - p \right] dV \quad (1 \text{ 分})$

$$\Rightarrow dS = \frac{dU + p dV}{T} = \frac{T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V dV}{T} = \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V dV \quad (2 \text{ 分})$$

代入范氏气体的压强 $p = \frac{\nu RT}{V-\nu b} - \frac{av^2}{V^2}$,

得: $\left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V = \frac{\nu R}{V-\nu b} \quad (1 \text{ 分})$

$$\Rightarrow dS = \frac{\nu R}{V-\nu b} dV$$

积分, 得: $\Delta S = \int dS = \int_{V_i}^{V_f} \frac{\nu R}{V-\nu b} dV = \nu R \ln \left(\frac{V_f - \nu b}{V_i - \nu b} \right) \quad (2 \text{ 分})$

5. (1) (6 分) 考虑温度足够高的情况, 计算单原子分子和双原子分子理想气体的等压比热容 C_p 和等体比热容 C_v 的比值。

(2) (7 分) 考虑温度为 T , 质量为 m , 数密度为 n , 速度分布满足麦克斯韦分布, 相互碰撞截面为 σ 的气体分子, 求分子间平均碰撞率和平均自由程的表达式。

解: (1) 根据能量均分定理, 系统内能 $U=(t+r+2v)kT/2$ 。这里, t 、 r 、 v 分别为平动、转动和振动自由度。

对单原子分子, $t=3$, $r=0$, $v=0$, $U=3kT/2$ (1 分)

分子的等容摩尔热容为 $C_{V,m}=3 N_A k_B /2=3R/2$, 等压摩尔热容为 $C_p=C_v+R=5R/2$ (1 分)

$C_p/C_v=5/3$ 。(1 分)

对单原子分子, $t=3$, $r=2$, $v=1$, $U=7kT/2$ (1 分)

分子等容摩尔热容为 $C_{V,m}=7 N_A k_B /2=7R/2$, 等压摩尔热容为 $C_p=C_v+R=9R/2$ (1 分)

$C_p/C_v=9/7$ (1 分)

(2) 设分子间平均运动速度为 v_{rms} , 则其平均相对运动速度为 $2^{1/2}v_{rms}$

则在 t 时间内平均碰撞次数为: $N=2^{1/2}n\sigma v_{rms}t$

t 时间内的分子的平均运动路程为: $L= v_{rms}t$

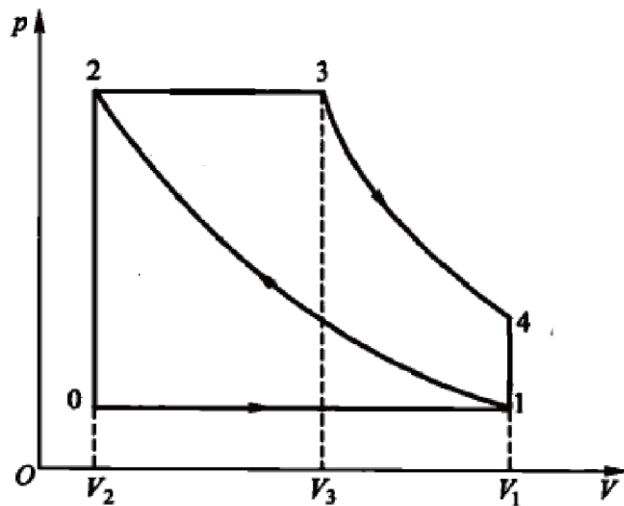
所以, 分子间的平均碰撞率为 $\Gamma=N/t=2^{1/2}n\sigma v_{rms}$ (3 分)

其中,

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \quad (2 \text{ 分})$$

平均自由程 $\lambda=L/N=1/(2^{1/2}n\sigma)$ (2 分)

6. (12 分) 如图示, 狄赛尔循环由两个绝热过程 (1-2, 3-4)、一个等压过程 (2-3) 和一个等体过程 (4-1) 组成。设一理想气体的等压与等体热容比为 $C_p/C_v=\gamma$, 基于此气体的狄赛尔循环的压缩比 $V_1/V_2=K$, $V_3/V_2=\rho$, 求基于该气体狄赛尔循环的热机效率, 结果用 ρ 、 K 和 γ 表示。



解: 绝热过程系统与外界没有热量交换。

2-3 过程, 气体压强不变, 体积增加, 温度增加, 气体对外作功, 同时吸收外部热量

$$\Delta Q_1 = \nu C_{p,m}(T_3 - T_2) \quad (1 \text{ 分})$$

4-1 过程, 气体压强减小, 体积不变, 温度减小, 气体不对外作功, 同时对外部放出热量 ΔQ_2

$$\Delta Q_2 = \nu C_{v,m}(T_4 - T_1) \quad (1 \text{ 分})$$

$$\text{热机效率为 } \eta = 1 - \Delta Q_2 / \Delta Q_1 = 1 - C_{v,m}(T_4 - T_1) / C_{p,m}(T_3 - T_2) = 1 - (T_4 - T_1) / \gamma(T_3 - T_2) \quad (2 \text{ 分})$$

$$\text{由绝热过程性质知 } T_1 V_1^{(\gamma-1)} = T_2 V_2^{(\gamma-1)}, \quad T_3 V_3^{(\gamma-1)} = T_4 V_1^{(\gamma-1)}$$

$$\text{所以, 有 } T_2/T_1 = K^{(\gamma-1)}, \quad T_3/T_4 = (K/\rho)^{(\gamma-1)} \quad (2 \text{ 分})$$

$$\text{再根据 2-3 的等压过程有: } T_3/T_2 = \rho, \quad (2 \text{ 分})$$

$$\text{综合可得: } \eta = 1 - (\rho^\gamma - 1) / \gamma K^{\gamma-1} (\rho - 1) \quad (4 \text{ 分})$$

7. (10 分) 考虑有速度梯度分布的层流运动, 层与层之间的粘滞力 F 与粘滞系数 η 之间关系满足:

$$F = -\eta \left(\frac{du}{dz} \right)_{z_0} \Delta S$$

其中, u 为层流速度, du/dz 为速度梯度, ΔS 为层之间的接触面积。请简述粘滞系数的实验测量方法。

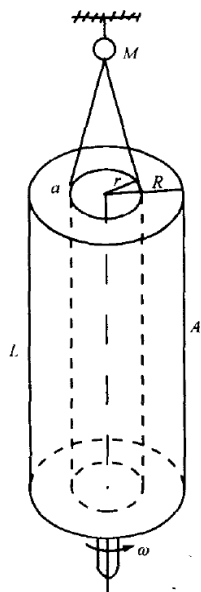
解: 实验测量装置如下图所示。外筒 A 半径为 R , 以固定的角速度 ω 转动。内筒 a 半径为 r , 受黏滞力和悬丝上的扭矩两种作用, 处于稳态。(图+文字, 6 分)

当 R 与 r 很接近时:

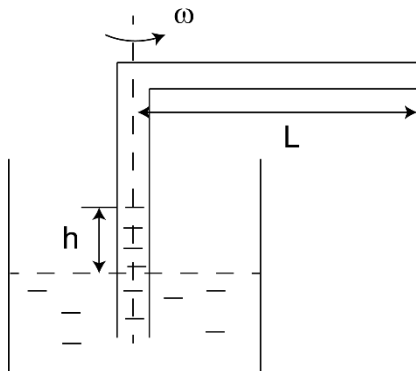
$$\frac{du}{dz} = \frac{u_A - u_a}{R - r} = \frac{\omega R}{\delta} \quad (2 \text{ 分})$$

悬丝的扭矩 T 可以通过实验测量, 这样可以利用下面的式子求出 η

$$T = fr = \eta \frac{\omega R}{\delta} 2\pi r L \cdot r \approx \eta 2\pi L \frac{\omega R^3}{\delta} \quad (2 \text{ 分})$$

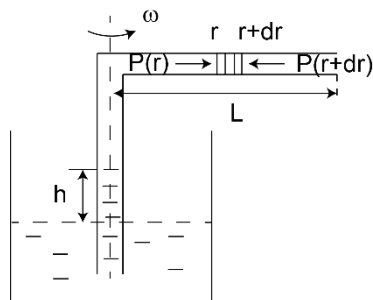


8. (15 分) 如图所示, 将两端开口、水平长度为 L 的弯管插入密度为 ρ 的液体中。使弯管绕其竖直部分的中心以角速度为 ω 转动。设环境温度为 T , 大气压为 P_0 , 空气分子质量为 m_0 , 求管内液体相对于容器内的液体的高度 h 。



解: 如图示, 考虑 r - $r+dr$ 段的空气受力, 在平衡态下有:

$$P(r)S + m\omega^2 r = P(r + dr)S \quad (3 \text{ 分})$$



设气体密度为 ρ_g , 有:

$$dP(r) = \rho_g \omega^2 r dr$$

考虑到 $P = nk_B T = \rho_g k_B T / m_0$, 有:

$$\frac{dP(r)}{P(r)} = \frac{\rho_g \omega^2 r}{P(r)} dr = \frac{m_0 \omega^2 r}{k_B T} dr \quad (5 \text{ 分})$$

积分, 并考虑到 $P(L) = P_0$, 有:

$$P(r) = P(0) e^{\frac{m_0 \omega^2 r^2}{2k_B T}} = P_0 e^{\frac{m_0 \omega^2 (r^2 - L^2)}{2k_B T}} \quad (4 \text{ 分})$$

所以, $P(0) = P_0 e^{-\frac{m_0 \omega^2 L^2}{2k_B T}}$, 弯管竖直部分气压小于外界大气压, 从而有:

$$\rho g h = P_0 - P(0) = \left(1 - e^{-\frac{m_0 \omega^2 L^2}{2k_B T}}\right) P_0$$

$$h = \left(1 - e^{-\frac{m_0 \omega^2 L^2}{2k_B T}}\right) P_0 / \rho g \quad (3 \text{ 分})$$