座位号:________ 考场:________ 所在院系:________ 姓名:________ 学号:________

密封线 答题时不要超过此线

中国科学技术大学 2021年秋季学期
(数学分析(B1) 期中考试试卷, 2021 年 11 月 20 日)

考试形式: 闭卷　考试时间: 120 分钟　满分: 100 分

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
分数										
评阅人										

一、(5 分) 用 $\varepsilon-\delta$ 语言证明: $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}=0$.

证明　对任意 $\varepsilon>0$, 取 $\delta=\varepsilon^2$, 则当 $x\in(0,\delta)$ 时, 有

$$\left|\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}-0\right|\leqslant\sqrt{\delta}=\varepsilon.$$

故, 根据极限的定义 $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}=0$.

二、(24 分) 求下面的极限:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(1+n)^n+e^{2n}}{n^{n+1}}=e$;

2. $\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n^2}}=1$;

3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+3x-4}{x^2+2x-3}=\dfrac{5}{4}$;

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1+\frac{1}{2}x^2}{x^3\sin x}=\dfrac{1}{24}$.

三、(12 分) 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{e^x-1}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0.\end{cases}$ 求 $f'(x)$.

解 当 $x\neq 0$ 时,

$$f'(x)=\frac{xe^x-(e^x-1)}{x^2}=\frac{(x-1)e^x+1}{x^2}. \qquad (6\text{ 分})$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}&=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^x-1}{x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x^2}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

故, $f'(0)=\frac{1}{2}$. ....(12 分)

四、(12 分) 设 $y(x)=x^2e^{-x}$, $f(x)=xy^{(n+1)}(x)+(n+x-2)y^{(n)}(x)+ny^{(n-1)}(x)$.

(1) 求 $y^{(n)}(x)$; (2) 求证 $f(x)=0$.

解

$$\begin{aligned}y^{(n)}(x)&=\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{n}(x^2)^{(k)}(e^{-x})^{(n-k)}\\&=(-1)^nx^2e^{-x}+(-1)^{n-1}2nxe^{-x}+(-1)^{n-2}n(n-1)e^{-x}\\&=(-1)^ne^{-x}\left(x^2-2nx+n(n-1)\right). \qquad (\text{.........8 分})\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}f(x)&=xy^{(n+1)}(x)+(n+x-2)y^{(n)}(x)+ny^{(n-1)}(x)\\&=x\Big((-1)^{n+1}e^{-x}\left(x^2-2(n+1)x+n(n+1)\right)\Big)\\&\quad+(n+x-2)\Big((-1)^ne^{-x}\left(x^2-2nx+n(n-1)\right)\Big)\\&\quad+n\Big((-1)^{n-1}e^{-x}\left(x^2-2(n-1)x+(n-2)(n-1)\right)\Big)\\&=0. \qquad (\text{.........12 分})\end{aligned}$$

座位号:______ 考场:______ 所在院系:______ 姓名:______ 学号:______

密封线 答题时不要超过此线

五、(12 分) 求函数 $f(x)=\left(x-\frac{5}{2}\right)x^{\frac{2}{3}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的极大值和极小值.

解 当 $x\neq 0$ 时, 有

$$f'(x)=\frac{5}{3}x^{-\frac{1}{3}}(x-1).$$

由此 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 单调递增,在 $(0,1)$ 单调递减, 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增. 故, $f(0)=0$ 是 $f(x)$ 的极大值; $f(1)=-\frac{3}{2}$ 是 $f(x)$ 的极小值.

注: 求得驻点 $x=1$ 给 4 分.

指出 $f(0)=0$ 是 $f(x)$ 的极大值给 4 分.

指出 $f(1)=-\frac{3}{2}$ 是 $f(x)$ 的极小值给 4 分.

六、(10 分) 设函数 $y=y(x)$ 是由方程 $y=1+xe^{y}$ 确定的隐函数. 求该函数曲线上点 $(0,1)$ 处的切线方程.

解 该隐函数就是函数 $f(x)=e^{-x}(x-1)$ 的反函数. 显然 $f(x)$ 可导, 且 $f'(1)=e^{-1}<0$. 故, $y(x)$ 在 $f(1)=0$ 附近可导, 且 $y'(0)=e$. 于是, 在点 $(0,1)$ 处, 函数 $y(x)$ 的切线方程为

$$y=ex+1.$$

七、(10 分) 设函数 $f(x)$ 定义在 $[a,b]$ 且 $f(x)\in[a,b]$, 又 $[a,b]$ 中任意不同的 x,y 满足 $|f(x)-f(y)|<|x-y|$. 令 $x_1\in[a,b]$, 并归纳定义 $x_{n+1}=\frac{1}{2}\big(x_n+f(x_n)\big)$. 求证:

(1) $\{x_n\}$ 是单调数列; (2) $\{x_n\}$ 收敛于 $[a,b]$ 中一点 c, 且 $f(c)=c$; (3) 满足 $f(x)=x$ 的 x 是唯一的.

证明 (1) 由条件 $|f(x)-f(y)|<|x-y|$ 可知

$$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{2}\big(x_n-x_{n-1}+f(x_n)-f(x_{n-1})\big)$$

与 x_n-x_{n-1} 同号, 因而与 x_2-x_1 同号. 故, $\{x_n\}$ 是单调数列. .... (4 分)

(2) 因为 $x_n\in[a,b]$ 且 $\{x_n\}$ 单调, 所以 $\{x_n\}$ 收敛. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=c$. 则 $c\in[a,b]$. 由

$$|f(x)-f(y)|<|x-y|$$

可知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

在

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\big(x_n+f(x_n)\big)$$

令 $n\to\infty$, 得 $c=\frac{1}{2}(c+f(c))$. 即, $f(c)=c$. .... (7 分)

(3) 若另有 $c_1\in[a,b]$, $c_1\neq c$ 使得 $f(c_1)=c_1$. 则

$$|c-c_1|=|f(c)-f(c_1)|<|c-c_1|.$$

这不可能. 故, 满足 $f(x)=x$ 的 x 是唯一的. .... (10 分)

八、(8 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上存在二阶导数, $f(0)=0,\ f'(0)>0$, $f''(x)\leqslant\alpha<0$, 其中 α 是常数. 证明:

(1) 存在 $x_0>0$ 使得 $f'(x_0)=0$; (2) 方程 $f(x)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 内有唯一实根.

证明 (1) 对于 $x\in(0,+\infty)$ 根据 Taylor 公式, 存在 $\theta\in(0,1)$ 使得

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\theta x)}{2}x^2.$$

于是由条件可得

$$f(x)\leqslant f'(0)x+\frac{\alpha}{2}x^2.$$

由于 $\alpha<0$, 当 $x>-\frac{2f'(0)}{\alpha}$ 时, $f(x)<0$. 又 $f'(0)>0$. 由导数的定义可知存在 $\delta>0$ 使得 $f(x)>f(0)=0,\ x\in(0,\delta)$. 根据介值定理可知存在 $a>0$ 使得 $f(a)=0$. 再由 Rolle 定理可知存在 $x_0\in(0,a)$ 使得 $f'(x_0)=0$. ....(4分)

(2) 若 $f(x)=0$ $(0,+\infty)$ 内有不同的实根 x_1,x_2, 不妨设 $0<x_1<x_2$. 由 Rolle 定理, 存在 $b_1\in(0,x_1)$ 和 $b_2\in(x_1,x_2)$ 使得

$$f'(b_1)=f'(b_2)=0.$$

再根据 Rolle 定理, 存在 $c\in(b_1,b_2)$ 使得 $f''(c)=0$. 这与条件 $f''(x)\leqslant\alpha<0$ $(x>0)$ 矛盾! 故, $f(x)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 内有唯一的实根. ....(8分)

九、(7 分) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有任意阶导数, 且对任意实数 x 及 $n=0,1,2\cdots$ 满足 $|f^{(n)}(x)|\leqslant n!|x|$. 求证: $f(x)=0$.

证明 由 $|f^{(n)}(x)|\leqslant n!|x|$ 可知对任意自然数 n 有 $f^{(n)}(0)=0$. 对于 $x\in(-1,1)$ 根据 Taylor 展开存在 $\theta\in(0,1)$ 使得

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}+\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n=\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n. \qquad (1\text{ 分})$$

因此

$$|f(x)|\leqslant|\theta x|\cdot|x|^n\leqslant|x|^{n+1}.$$

在此式中令 $n\to\infty$ 得 $f(x)=0$ $(x\in(-1,1))$. 由连续性可知

$$f(x)=0,\ x\in[-1,1]. \qquad (4\text{ 分})$$

假设 $f(x)=0,\ x\in[-k,k]$. 令 $g(x)=f(x+k)$, $h(x)=f(x-k)$. 则 $g(x)$ 和 $h(x)$ 在 0 点的任意阶导数为 0. 根据 Taylor 展开存在 $\theta_1,\theta_2\in(0,1)$ 使得

$$g(x)=\frac{g^{(n)}(\theta_1 x)}{n!}x^n=\frac{f^{(n)}(\theta_1 x+k)}{n!}x^n.$$
$$h(x)=\frac{h^{(n)}(\theta_2 x)}{n!}x^n=\frac{f^{(n)}(\theta_2 x-k)}{n!}x^n.$$

因此

$$|g(x)|\leqslant|\theta_1 x+k|\cdot|x|^n,$$
$$|h(x)|\leqslant|\theta_2 x+k|\cdot|x|^n.$$

令 $n\to\infty$ 得 $g(x)=0,h(x)=0,\ x\in(-1,1)$. 于是 $f(x)=0,\ x\in[-k-1,k+1]$. 根据归纳原理可知 $f(x)=0,\ x\in\mathbb{R}$. (7 分)