中国科学技术大学 2015–2016 学年第 1 学期

《单变量微积分》期中考试试卷

(闭卷 120 分钟)

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
分 数									
评卷人									

学生所在系＿＿＿＿＿ 姓 名＿＿＿＿＿ 学号＿＿＿＿＿

装 订 线

得分	评卷人

一、求下列极限或导数 (每题 5 分，共 30 分)

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\tan x}{\left(\sqrt[3]{1+x^2}-1\right)\ln(1-x)}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{\cot x}{x}\right)$

(3) $\lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n^2}e^n\right]$

(4) 设$f(x)$在$x=0$有二阶导数，$f(0)=1, f'(0)=0$,求$\lim_{x\to+\infty}\left[f\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)\right]^x$.

学号________ 姓名________ 学生所在系________

装 订 线

(5) 设$f(x)=\begin{cases} x^3\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$, 求$f'(x)$.

(6) 设$f(x)=xe^{-\frac{x^2}{2}}$, 求$f^{(9)}(0)$.

得分	评卷人

二、(本题 10 分)

$y=f(x)$由方程组$\begin{cases} x=t+\sin t \\ y+te^y=t^2 \end{cases}$ 确定， 求$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$, $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}$.

得分	评卷人

三、(本题 10 分)

设 $0<x_1<3$,$x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}$ 证明数列$\{x_n\}$ 的极限存在并求此极限.

学生所在系________ 姓名________ 学号________

装 订 线

得分	评卷人

四、(本题 8 分)

设$f(x)$在$[0,\pi]$连续，在$(0,\pi)$可导，且$f(0)=0$, 证明存在$\xi\in(0,\pi)$,
使得 $2f'(\xi)=\tan\dfrac{\xi}{2}f(\xi)$.

得分	评卷人

五、(本题 10 分)

证明方程$x^2=x\sin x+\cos x$ 仅有两个实根.

得分	评卷人

六、(本题 10 分)

讨论函数$f(x)=x(1+e^x)-2(e^x-1)$的单调性，并证明不等式

$$\frac{e^a-e^b}{a-b}<\frac{e^a+e^b}{2}\quad (a\neq b).$$

得分	评卷人

七、(本题 6 分)

函数$f(x)$在$x=0$的某邻域中有三阶连续导数，$f'(0)=1, f''(0)=0, f'''(0)=-1$,设$a_{n+1}=f(a_n)$满足$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0, (a_n\neq 0,\ n=1,2,\cdots)$, 求$\lim\limits_{n\to+\infty}na_n^2$.

学号______ 姓名______ 学生所在系______

装 订 线

得分	评卷人

八、单项选择题 (每题 4 分，共 16 分)

1. 设数列$\{x_n\}$ 与$\{y_n\}$ 满足$\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$，则下列断言正确的是 (　　)

(A) 若$\{x_n\}$发散，则$\{y_n\}$ 必发散．

(B) 若$\{x_n\}$ 无界，则$\{y_n\}$必有界．

(C) 若$\{x_n\}$ 有界，则$\{y_n\}$ 必为无穷小．

(D) 若$\{\frac{1}{x_n}\}$无穷小，则$\{y_n\}$ 必为无穷小.

2. 设当$x\to 0$时，$e^{\sin x}-(ax^2+bx+1)$是比x^2 高阶的无穷小，则 (　　)

(A) $a=\frac{1}{2}, b=1.$　　(B) $a=1, b=1.$

(C) $a=-\frac{1}{2}, b=1.$　　(D) $a=-1, b=1.$

3. 已知函数$f(x)$在x=0的某个邻域内连续，且$f(0)=0$，又$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{\sin^2 x}=2$，则在点$x=0$ 处$f(x)$ (　　)

(A) 不可导.　　(B) 可导，且$f'(0)\neq 0$.

(C) 取得极大值.　　(D) 取得极小值.

4. 设$f(x)$在$[a,b]$上可导，且$f'(a)>0, f'(b)<0$，则下列结论中错误的是 (　　)

(A) 至少存在一点$x_0\in(a,b)$，使得$f(x_0)>f(a)$.

(B) 至少存在一点$x_0\in(a,b)$，使得$f(x_0)>f(b)$.

(C) 至少存在一点$x_0\in(a,b)$，使得$f(x_0)=0$.

(D) 至少存在一点$x_0\in(a,b)$，使得$f'(x_0)=0$.