

中国科学技术大学2019—2020学年秋季学期
数学分析A1 期中考试试卷

考试时间：2019年11月9日下午2:30—4:30

姓名：_____ 学号：_____ 得分：_____

一、(10分)

设实数 q 属于开区间 $(-1, 1)$. 请用 $\epsilon - N$ 语言证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$.

得分	
----	--

二、(10分)

请用 $\epsilon - \delta$ 语言证明 $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + 4x) = 21$.

得分	
----	--

三、(10分)

设 μ 为正常数. 请问函数 $f(x) = \begin{cases} |x|^{1+\mu} \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ 是否在 $x = 0$ 处可导? 并说明理由.

得分	
----	--

四、(共30分, 每题6分) 要求完整解答过程.

得分	
----	--

(1). 求函数极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2^{1/x} + 8^{1/x}}{2} \right)^x$;

(2). 设函数 $f(x) > 0$ 且在定义域内二阶可导, 求函数 $\ln(f(x))$ 的二阶导数;

(3). 求数列极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.

(4). 求数列极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2^2} \cdots \cos \frac{\theta}{2^n} \right)$;

(5). 求函数极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{x^4}$.

⑤ (8分)

得分	
----	--

设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 对于任意的 $x_1, x_2 \in [a, b]$ 满足:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq (x_1 - x_2)^2.$$

证明: $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是常值函数.

六、(8分)

设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 内连续, $(0, 1)$ 上可导, 且 $f(1) = 2f(0)$. 证明: 存在 $\xi \in (0, 1)$ 使得 $(1 + \xi) f'(\xi) = f(\xi)$.

得分	
----	--

七、(8分)

设函数 f 在 $(0, 1)$ 上连续. 证明: f 在 $(0, 1)$ 上一致连续当且仅当 $f(0^+)$ 与 $f(1^-)$ 都存在且有限.

得分	
----	--

八、(8分)

设函数 $f(x)$ 在 (a, b) 上二阶可导, 且存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $f''(\xi) \neq 0$. 证明: 在区间 (a, b) 中可以找出两个值 x_1 和 x_2 满足

得分	
----	--

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi).$$

九、(8分)

称形如 $g(x) = ax + b$ (其中 a, b 为常数) 的函数为一次函数. 证明: 定义在区间 I 上的函数 f 为凸函数的充分必要条件是: 对于任意 I 的内部的点 x_0 , 存在一次函数 g 使得在 I 上 $g \leq f$ 恒成立并且 $f(x_0) = g(x_0)$.

得分	
----	--

附加题、(12分)

得分	
----	--

称实数 x 为函数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 的可去不连续点, 是指 f 在 x 处的极限存在有限但不等于 $f(x)$. 称 $|f(x) - \lim_{y \rightarrow x} f(y)|$ 为 f 的可去不连续点 x 的跳跃.

A1. 设 x 为 f 的可去不连续点, 且其跳跃大于等于某个正数 δ . 证明: 存在 x 的邻域 U_x 使得对于任意 $y, z \in U_x - \{x\}$ 都有

$$|f(y) - f(z)| < \delta/8, \quad |f(y) - f(x)| > \delta/2.$$

A2. 在 A1 的设定下, 证明: 除了 x 之外, 在 U_x 中不存在其他跳跃 $\geq \delta$ 的可去不连续点.

A3. 证明 f 的可去不连续点全体为至多可数集合.