一、1. $\int \frac{1}{1-x^4}dx = -\frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{x^2-1} - \frac{1}{x^2+1}\right)dx$

$= -\frac{1}{2}\int \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) - \frac{1}{x^2+1}\right]dx$

$= -\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + \frac{1}{2}\arctan x + C$

不加绝对值扣1分，不加C扣1分

2. $\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx = \int_0^2 \frac{2u}{1+u}du = \int_0^2 \left(2 - \frac{2}{1+u}\right)du = 4 - 2\ln 3$

3. $I = \int_0^{+\infty} \cancel{\cos} e^{-x}\cos x\,dx = -e^{-x}\cos x\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \sin x\, e^{-x}dx$

$= 1 - \left(-e^{-x}\sin x\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x}\cos x\,dx\right)$

$= 1 - I$

$\Rightarrow I = \frac{1}{2}$

4. $x \geq 1$，$\int |\ln x|\,dx = x\ln x - x + C_1$

$x < 1$，$\int |\ln x|\,dx = -x\ln x + x + C_2$

原函数在$x=1$连续 $-1+C_1 = 1+C_2 \Rightarrow C_2 = C_1 - 2$ （2分）

5. $\lim\limits_{n\to\infty}[f(1)f(2)\cdots f(n)]^{\frac{1}{n^{p+1}}} = \lim\limits_{n\to\infty} e^{\frac{1^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} e^{\int_0^1 x^p dx}$

$= e^{\frac{1}{p+1}}$

用二项式定理的要注意到p不一定是整数

二、$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 3$

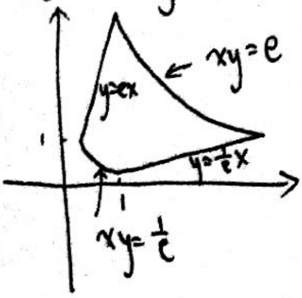
通解 $y = (C_1 + C_2 x)e^{3x}$ —— 3分

特解 $y = \frac{1}{2}x^2 e^{3x}$ —— 3分

初值 $y(0) = 0$ $y'(0) = 2$ —— 3分

$y = \left(2x + \frac{1}{2}x^2\right)e^{3x}$ —— 1分

三 $\frac{1}{e} \le x, y \le e$



正确标区域得 6分

积分正确得 4分 $(e-\frac{1}{e})$.

四、(10分)

得分	

设α,β为实数，函数$f(x)=\begin{cases} x^{\alpha}\sin\frac{1}{x^{\beta}}, & x\in(0,1] \\ 0, & x=0 \end{cases}$，

问当且仅当α,β取何值时，$f(x)$在区间$[0,1]$上可积(需说明理由)?

(注:此处的可积是指有通常意义的积分，不包含反常积分)

法一、

1° $\alpha>0$　　$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$　　3分

$\Rightarrow f(x)$ 连续

$\Rightarrow$ 可积

2° $\alpha=0$　　$f(x)\leq 1$　　2分

且只有 0 个间断点

$\Rightarrow$ 可积

3° $\alpha<0$　　1° $\beta>0$

$f(x)$ 在 0 附近无界，不可积

2° $\beta<0$　　5分

$x^{\alpha}\sin\frac{1}{x^{\beta}}\sim x^{\alpha-\beta}$　$(x\to 0)$

若 $\alpha<\beta$，$f(x)$ 无界，不可积

$\alpha=\beta$ 漏掉扣1分　　若 $\alpha\geq\beta$，$f(x)$ 有界 $\Rightarrow$ 可积

且最多一个间断点

综上　$\alpha\geq 0$ 或 $\beta\leq\alpha<0$

四、(10分)

得分	

设α,β为实数, 函数$f(x)=\begin{cases} x^{\alpha}\sin\frac{1}{x^{\beta}}, & x\in(0,1] \\ 0, & x=0 \end{cases}$,

问当且仅当α,β取何值时, $f(x)$在区间$[0,1]$上可积(需说明理由)?

(注:此处的可积是指有通常意义的积分, 不包含反常积分)

法二、

1° $\beta\geq 0$

1. $\alpha>0$, $f(x)$连续 $\Rightarrow$ 可积 (3分)

2. $\alpha=0$, $f(x)$有界 $\Rightarrow$ 可积 (2分)
最多一个间断

3. $\alpha<0$, $f(x)$无界 $\Rightarrow$ 不可积

2° $\beta<0$

$x^{\alpha}\sin\frac{1}{x^{\beta}}\sim x^{\alpha-\beta}$ $(x\to 0)$

1. $\alpha\geq\beta$ $f(x)$有界 $\Rightarrow$ 可积 (5分)
最多一个间断

$\alpha=\beta$
不写扣1分

2. $\alpha<\beta$, $f(x)$无界 $\Rightarrow$ 不可积

综上 $\beta\geq 0$, $\alpha\geq 0$ 或 $\beta<0$, $\alpha\geq\beta$

五、(12分)

得分

(1) 设实数$\alpha > 0$, 讨论正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha})$的敛散性.

(2) 设实数$A > 0$, 讨论函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{x}{n} - \sin\frac{x}{n})$在闭区间$[-A, A]$上的一致收敛性.

(1)

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} < \int_1^{n+1} \frac{1}{x^\alpha}dx \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}\left[(n+1)^{1-\alpha} - 1\right] & \alpha \neq 1 \\ \ln(n+1) & \alpha = 1 \end{cases}$$

1° $\alpha \neq 1$ 时

$$\forall N, \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}\right) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{n^{1+\alpha}} - \frac{1}{n^2}\right)$$

$$= \frac{1}{1-\alpha}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\alpha}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right)$$

$$< +\infty$$

$\Rightarrow$ 收敛

2° $\alpha = 1$ 时

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} < \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{\frac{1}{2}}}$$

$$\Rightarrow \forall N, \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} < \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{\frac{1}{2}}} < +\infty$$

$\Rightarrow$ 收敛

综上 $\alpha > 0$ 时收敛

方法非常多，不一一例举

证出 $\alpha > 1$ 时收敛 —(2分)

$\alpha = 1$ 时收敛 —(3分)

$\alpha < 1$ 时收敛 —(4分)

本问共6分

因为由上面2°可知 $\alpha<1$ 推出 $\alpha=1$，$\alpha=1$ 推出 $\alpha>1$ 非常容易。

全部证出得6分

五、(12分) 得分

(1) 设实数$\alpha > 0$, 讨论正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha})$的敛散性.

(2) 设实数$A > 0$, 讨论函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{x}{n} - \sin\frac{x}{n})$在闭区间$[-A, A]$上的一致收敛性.

(2)

$\frac{x}{n} - \sin\frac{x}{n}$ 在 $[-A, A]$ 上单调

$\Rightarrow \left|\frac{x}{n} - \sin\frac{x}{n}\right| < \frac{A}{n} - \sin\frac{A}{n}$ …… (2分)

$\frac{A}{n} - \sin\frac{A}{n} \sim \frac{1}{n^3}$

且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ 收敛

$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{A}{n} - \sin\frac{A}{n}$ 收敛 (4分)

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n} - \sin\frac{x}{n}$ 一致收敛

(只证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n} - \sin\frac{x}{n}$ 收敛得 2 分)

六、共8分

$$\int f^{-1}(x)\,dx$$

令 $y=f^{-1}(x)$

$$\underline{\underline{\quad}}\ \int y\,d(f(y)) \quad \cdots\ 2分$$

分部

$$\underline{\underline{\quad}}\ y f(y) - \int f(y)\,dy \quad \cdots\ 3分$$

$$= y f(y) - F(y) + C$$

$$= \underbrace{x f^{-1}(x) - F(f^{-1}(x))}_{2分} + \underbrace{C}_{1分}$$

七、共12分

"⇒"：F 为 f 的原函数 $\Rightarrow F(x) = \int_0^x f(t)\,dt + C$

"⇒"：F 以 T 为周期 $\Rightarrow F(T) - F(0) = 0$

$$\Rightarrow \int_0^T f(x)\,dx = 0$$

"⇐"：$F(x+T) - F(x) = \int_x^{x+T} f(t)\,dt$

$$= \int_x^T f(t)\,dt + \int_T^{x+T} f(t)\,dt \ \overset{t=T+u}{=\!=}\ \int_x^T f(t)\,dt + \int_{u=0}^{u=x} f(u+T)\,du$$

$$= \int_x^T f(u)\,du + \int_0^x f(u)\,du = \int_0^T f(u)\,du = 0.$$

八. 8分.

a_n 有界 $\Rightarrow$ $\exists M>0$ s.t. $|a_n| < M$

$|x|<1$ 时, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n x^n| \le M\sum_{n=1}^{\infty}|x|^n$

$$= M\cdot\frac{|x|}{1-|x|}$$

$\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 收敛, $|x|<1$ 时. ··· 4分.

$\Rightarrow$ 收敛半径 ≥ 1.

$x=1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散 ··· 4分

$\Rightarrow$ 收敛半径 ≤ 1

$\Rightarrow$ 收敛半径 $=1$.