第2章综合习题题解

1. 证明, 函数 $f(x)=\begin{cases}0, & x \text{ 为有理数}\\ x, & x \text{ 为无理数}\end{cases}$ 仅在点 $x=0$ 处连续.

证明 对任意 $x_0\neq 0$, 分别取有理点列 $a_n\to x_0\ (n\to\infty)$ 和无理点列 $b_n\to x_0\ (n\to\infty)$. 那么

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n)=0;\ \lim_{n\to\infty} f(b_n)=\lim_{n\to\infty} b_n=x_0$$

所以$f(x)$ 在 x_0 没有极限, 因此不连续.

当 $x_0=0$ 时, 对任意 $\varepsilon>0$, 取 $\delta=\varepsilon$, 则当 $|x-0|<\delta=\varepsilon$ 时, 有

$$|f(x)-f(0)|=|f(x)|=\begin{cases}0, & x \text{ 为有理数}\\ |x|, & x \text{ 为无理数}\end{cases}<\varepsilon,$$

所以函数在 $x=0$ 连续.

点评 与处处不连续的Dirichlet函数 $f(x)=\begin{cases}1, & x \text{ 为有理数}\\ 0, & x \text{ 为无理数}\end{cases}$ 相比, 该函数只在一点连续, 其它点都间断.

2. 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in[0,1]$, 记 $f(x)=\dfrac{|x-x_1|+\cdots+|x-x_n|}{n}$, 证明: 存在 $x_0\in[0,1]$, 使得 $f(x_0)=\dfrac{1}{2}$.

证明 因为 $f(x)$ 是连续函数, 且

$$\begin{aligned}f(0)&=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n},\\ f(1)&=\frac{1-x_1+1-x_2+\cdots+1-x_n}{n},\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow f(1)+f(0)=1,\quad \text{或}\quad \frac{f(1)+f(0)}{2}=\frac{1}{2}.$$

因

$$\min\{f(1),f(0)\}\leqslant\frac{f(1)+f(0)}{2}\leqslant\max\{f(1),f(0)\},$$

根据介值定理, 存在 $x_0\in[0,1]$, 使得

$$f(x_0)=\frac{f(1)+f(0)}{2}=\frac{1}{2}.$$

3. 证明: 函数 $f(x)=\dfrac{a_1}{x-\lambda_1}+\dfrac{a_2}{x-\lambda_2}+\dfrac{a_3}{x-\lambda_3}$ (其中 $a_1,a_2,a_3>0$, 且 $\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3$) 在 (λ_1,λ_2) 与 (λ_2,λ_3) 内恰好各有一个零点.

证明 （存在性）考虑 $f(x)$ 在 (λ_1,λ_2) 中两个端点的单侧极限:

$$\lim_{x\to\lambda_1^+} f(x)=+\infty,\ \lim_{x\to\lambda_2^-} f(x)=-\infty,$$

所以在 (λ_1,λ_2) 有一个零点.

（唯一性）假设在 (λ_1,λ_2) 中有两个零点 $x_1<x_2$： $\lambda_1<x_1<x_2<\lambda_2$, 那么有

$$\begin{aligned}
\frac{a_1}{x_1-\lambda_1}+\frac{a_2}{x_1-\lambda_2}+\frac{a_3}{x_1-\lambda_3}=0,\ \Longrightarrow \frac{a_1}{x_1-\lambda_1}=\frac{a_2}{\lambda_2-x_1}+\frac{a_3}{\lambda_3-x_1}\\
\frac{a_1}{x_2-\lambda_1}+\frac{a_2}{x_2-\lambda_2}+\frac{a_3}{x_2-\lambda_3}=0,\ \Longrightarrow \frac{a_1}{x_2-\lambda_1}=\frac{a_2}{\lambda_2-x_2}+\frac{a_3}{\lambda_3-x_2}
\end{aligned}$$

由$\lambda_1<x_1<x_2<\lambda_2$ 得

$$\frac{a_1}{x_1-\lambda_1}>\frac{a_1}{x_2-\lambda_1};\quad \frac{a_2}{\lambda_2-x_1}<\frac{a_2}{\lambda_2-x_2};\quad \frac{a_2}{\lambda_3-x_1}<\frac{a_2}{\lambda_3-x_2}$$

推出矛盾, 因此零点唯一. 同理可证在(λ_2,λ_3) 恰有一个零点.

点评 零点的唯一性也可借助第3章§3.5 节关于函数极值讨论: 这是因为

$$f'(x)=-\left(\frac{a_1}{(x-\lambda_1)^2}+\frac{a_2}{(x-\lambda_2)^2}+\frac{a_3}{(x-\lambda_3)^2}\right)<0,\ x\neq\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,$$

也就是 $f(x)$ 在每个开区间内严格单调减, 所以零点唯一.

4. 设 $f(x)$ 是一个多项式, 则必存在一点 x_0, 使得 $|f(x_0)|\leqslant|f(x)|$ 对任意实数 x 成立.

证明 不妨设多项式 $f(x)$ 的最高次项系数为 1：

$$f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

那么 $f(x)=x^n\left(1+a_{n-1}\dfrac{1}{x}+\cdots+a_1\dfrac{1}{x^{n-1}}+a_0\dfrac{1}{x^n}\right)$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty,\ \lim_{x\to-\infty} f(x)=\begin{cases}+\infty & \text{当 } n \text{ 是偶数;}\\ -\infty & \text{当 } n \text{ 是奇数,}\end{cases}$$

设 $g(x)=|f(x)|$, 它是连续函数 $z=|y|$ 与连续函数 $y=f(x)$ 的复合, 因此连续, 且

$$\lim_{x\to+\infty}|f(x)|=+\infty,$$

所以最小值一定在有限处取到, 即存在 x_0, 使得 $|f(x_0)| \leqslant |f(x)|$ ($x \in \mathbb{R}$) .

5. 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续, 且 $f(0)=f(1)$. 证明: 对任意自然数 n, 在区间 $\left[0,1-\dfrac{1}{n}\right]$ 中有一点 ξ, 使得 $f(\xi)=f\left(\xi+\dfrac{1}{n}\right)$.

证明一 设 $F(x)=f(x)-f\left(x+\frac{1}{n}\right)$ $x\in\left[0,1-\frac{1}{n}\right]$, 则 $F(x)$ 在$\left[0,1-\frac{1}{n}\right]$ 上连续且在 n 个点 $0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\cdots\frac{n-1}{n}$ 处的平均值为

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}F\left(\frac{k}{n}\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left[f\left(\frac{k}{n}\right)-f\left(\frac{k+1}{n}\right)\right]=0$$

$F(x)$ 在$\left[0,1-\frac{1}{n}\right]$ 上n 个点的平均值为零, 必在某些点取负值, 某些点取正值, 所以

$$\min_{x\in\left[0,1-\frac{1}{n}\right]}F(x)\leqslant 0,\quad \max_{x\in\left[0,1-\frac{1}{n}\right]}F(x)\geqslant 0,$$

因此存在 $\xi\in\left[0,1-\dfrac{1}{n}\right]$, 使得

$$F(\xi)=f(\xi)-f\left(\xi+\frac{1}{n}\right)=0.$$

证明二 (反证) 若 $F(x)=f(x)-f(x+\frac{1}{n})$. 在 $[0,1-\frac{1}{n}]$ 上无零点, 则由介值定理知, $F(x)$ 在 $[0,1-\frac{1}{n}]$ 上不变号. 不妨设 $F(x)$ 在 $[0,1-\frac{1}{n}]$ 上恒为正, 则有

$$F\left(\frac{j}{n}\right)=f\left(\frac{j}{n}\right)-f\left(\frac{j+1}{n}\right)>0,\quad j=0,1,\cdots,n-1.$$

将上式对 $j=0,1,\cdots,n-1$ 求和, 得到

$$f(0)>f(1).$$

这与条件矛盾!

6. 证明, 存在一个实数 x, 满足 $x^5+\dfrac{\cos x}{1+x^2+\sin^2 x}=72$.

证明 因

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(x^5+\frac{\cos x}{1+x^2+\sin^2 x}-72\right)=\pm\infty,$$

所以存在零点 x_0.

7. 若 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在, 则 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上或者有最大值, 或者有最小值.

证明 若 $f(x)$ 是常值函数, 结论显然成立. 设 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$.

当 $l=+\infty$ 时, 取充分大的 $M>0$ 使其大于某点的函数值 $M>f(x_0)$, 则存在 $A>0$, 当 $x>A$ 时, 有

$$f(x)>M>f(x_0).$$

显然 $x_0<A$. 设$f(x)$ 在$[a,A]$ 上的最小值点为 $\xi\in[a,A]$, 即对任意 $x\in[a,A]$, 有 $f(x)\geqslant f(\xi)$. 但是对 $x\in[A,+\infty)$, 也有 $f(x)>f(x_0)\geqslant f(\xi)$, 因此 $f(\xi)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上的最小值.

当 $l=-\infty$ 时, 通过类似证明得 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上取到最大值.

当 l 是有限数时, 若 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上取不到最大值, 则一定有 $f(x)<l, x\in[a,+\infty)$. 取$\varepsilon=l-f(x_0)>0$, 则存在 $A>0$, 当 $x>A$ 时, 有

$$f(x)>l-\varepsilon=f(x_0),$$

所以 $x_0\in[a,A]$. 设 $f(x)$ 在$[a,A]$ 上的最小值点为 ξ, 即对 $x\in[a,A]$, 有 $f(x)\geqslant f(\xi)$, 但是对 $x>A$, 也有 $f(x)>f(x_0)\geqslant f(\xi)$. 即 $f(\xi)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上的最小值.

8. 设函数 $f(x)$ 定义在区间 $[a,b]$ 上, 满足条件: $a\leqslant f(x)\leqslant b$ ($x\in[a,b]$), 且对 $[a,b]$ 中任意的 x,y 有 $|f(x)-f(y)|\leqslant k|x-y|$, 这里 k 是常数, $0<k<1$. 证明
(1) 存在唯一的 $x_0\in[a,b]$, 使得 $f(x_0)=x_0$ (不动点).
(2) 任取 $x_1\in[a,b]$, 并定义数列 $\{x_n\}$: $x_{n+1}=f(x_n)$, $n=1,2,\cdots$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$.
(3) 给出一个在实轴上的连续函数使得对任意 $x\neq y$ 有 $|f(x)-f(y)|<|x-y|$, 但方程 $f(x)-x=0$ 无解.

证明（1）（存在性）设 $F(x)=f(x)-x$, 则

$$F(a)=f(a)-a\geqslant 0,\ F(b)=f(b)-b\leqslant 0,$$

所以存在 $x_0\in[a,b]$, 使得 $F(x_0)=0$, 即 $f(x_0)=x_0$.

（唯一性）若另有 $x_0'\neq x_0$ 使得 $f(x_0')=x_0'$, 则$|x_0-x_0'|=|f(x_0)-f(x_0')|\leqslant k|x_0-x_0'|$. 推出 $k=1$, 矛盾. 因此唯一.

（2）设 $x_{n+1}=f(x_n),\ n=1,2,\cdots$, 因 $x_1\in[a,b]$, 所以 $x_n\in[a,b],\ n=1,2,\cdots$.

$$\begin{aligned}\Longrightarrow |x_{n+p}-x_n| &= |f(x_{n+p-1})-f(x_{n-1})|\leqslant k|x_{n+p-1}-x_{n-1}|\\ &\leqslant\cdots\leqslant k^n|x_p-x_1|\\ &\leqslant k^n(b-a)\to 0\ (n\to\infty),\end{aligned}$$

对 $\forall p$ 成立, 根据Cauchy收敛准则 $\{x_n\}$ 收敛. 记 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$, 因 $a\leqslant x_n\leqslant b$, 所以$a\leqslant x_0\leqslant b$. 对$x_{n+1}=f(x_n)$取极限并根据 $f(x)$ 的连续性, 得 $x_0=f(x_0)$.

（3）(反例) 设

$$f(x)=\begin{cases}x+\dfrac{1}{1+x}, & x>0\\ \mathrm{e}^x, & x\leqslant 0\end{cases}$$

则 $f(x)$ 连续（$\lim\limits_{x\to 0^{\pm}}f(x)=1$）. 当 $x,y\geqslant 0$ 时:

$$|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|+\left|\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1+y}\right|<|x-y|,$$

当 $x,y\leqslant 0$ 时

$$|f(x)-f(y)|=|\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^y|=\mathrm{e}^x|1-\mathrm{e}^{y-x}|<|x-y|,$$

当 $x>0,y<0$ 时

$$|f(x)-f(y)|\leqslant|f(x)-f(0)|+|f(y)-f(0)|<x+|y|=|x-y|.$$

因此 $f(x)$ 满足 $|f(x)-f(y)|<|x-y|$. 但是 $f(x)>x\ (x\geqslant 0)$, $f(x)>0\geqslant x\ (x<0)$, 所以 $f(x)=x$ 无解.

注: 若$f(x)$ 在区域 I 中满足 $|f(x)-f(y)|\leqslant k|x-y|$, 则称 $f(x)$ 满足 Lipschitz 条件. 本题表明对 $f:[a,b]\longrightarrow[a,b]$ 的连续映射, 若满足 Lipschitz 条件$(0<k<1)$, 则一定存在不动点 $x_0:\ f(x_0)=x_0$.

9. 证明: 对任意自然数 n, 方程 $x^n+x^{n-1}+\cdots+x=1$ 恰有一个正根 x_n; 进一步证明, 数列 $\{x_n\}(n\geqslant 1)$ 收敛, 并求其极限.

证明 设 $f(x)=x^n+x^{n-1}+\cdots+x-1$, 则对任意的 $x>y>0$, 有

$$f(x)-f(y)=(x-y)[(x^{n-1}+\cdots+y^{n-1})+(x^{n-2}+\cdots+y^{n-2})+\cdots>0,$$

因此 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上严格单调增, 连续, 如果有正根, 则一定唯一. 另一方面当 $n\geqslant 2$ 时

$$f(1)=n-1>0,\ f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2^n}<0,$$

故在区间 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 内存在唯一正根, 即存在 x_n, $\frac{1}{2} < x_n < 1$, 使得

$$x_n^n + x_n^{n-1} + \cdots + x_n = 1, \ n = 2, 3, \cdots,$$

$$\Longrightarrow x_n(1 - x_n^n) = 1 - x_n.$$

假如 $x_n \leqslant x_{n+1}$, 则

$$1 = x_{n+1}^{n+1} + x_{n+1}^n + \cdots + x_{n+1} \geqslant x_{n+1}^{n+1} + (x_n^n + x_n^{n-1} + \cdots + x_n) = x_{n+1}^{n+1} + 1$$

推得 $x_{n+1} \leqslant 0$, 矛盾. 因此必有 $x_n > x_{n+1}$. 即, 数列 $\{x_n\}$ 严格单调减的正数列. 于是它是收敛的. 设 $\lim x_n = d$. 因 $0 < x_n < x_2 < 1$, 得 $x_n^n < x_2^n \to 0 \ (n \to \infty)$, 所以在

$$x_n(1 - x_n^n) = 1 - x_n$$

两边令 $n \to +\infty$ 得

$$d = 1 - d, \implies d = \frac{1}{2}.$$

10. 设 $a < b$. $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且对任意 $x \in [a, b)$ 存在 $y \in (x, b)$ 使得 $f(y) > f(x)$. 求证: $f(b) > f(a)$.

证明 因$f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 所以在 $[a, b]$ 上有最大值点 x_0.

若 $x_0 < b$, 即 $x_0 \in [a, b)$, 由条件存在 $y \in (x_0, b)$ 使得 $f(y) > f(x_0)$, 这与 $f(x_0)$ 是最大值矛盾. 矛盾说明 $f(x)$在$[a, b)$ 上无最大值点, 所以 $x_0 = b$, 且 $f(b) > f(a)$..