中国科学技术大学数学科学学院

2022～2023 学年第 1 学期期中考试试卷

■ A 卷　　□ B 卷

课程名称 数学分析 (B1)　　课程编号 MATH1006

考试时间 2022 年 11 月 12 日　　考试形式 闭卷

姓 名 ________　　学 号 ________　　学 院 ________

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								

一、 填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

(1) 若 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x}\right)^{kx}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$, 则参数 $k=(\qquad)$. $(\frac{1}{2})$

思路. $\left(\dfrac{x-2}{x}\right)^{kx}=\left(1+\dfrac{1}{\frac{x}{-2}}\right)^{\frac{x}{-2}\cdot(-2k)}$. □

(2) 设有参数曲线 $\begin{cases} x=t\sin t+\cos t, \\ y=\sin t. \end{cases}$ 则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(\qquad)$, $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=(\qquad)$. $(\frac{1}{t};\ -\frac{1}{t^3\cos t})$

思路. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{1}{t}$, $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(1/t)}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{-1/t^2}{t\cot(t)}$. □

(3) $f(x)=\ln(\cos x)$ 的 Maclaurin 多项式 x^4 项的系数是 $(\qquad)$. $(-\frac{1}{12})$

思路.

$$\begin{aligned}\ln(\cos(x))&=\ln\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o\left(x^4\right)\right)\\&=\left(-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o\left(x^4\right)\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o\left(x^4\right)\right)^2+o\left(x^4\right)\\&=-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}+o(x^4).\end{aligned}$$ □

(4) 若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x+f(x)}{x^3}=0$, 则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x+f(x)}{x^3}=(\qquad)$. $(\frac{1}{2})$

思路. 由条件可知 $f(x)=-\sin(x)+o(x^3)=-x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)$, 故 $\tan(x)+f(x)=x+\frac{x^3}{3}+o(x)-x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)=\frac{x^3}{2}+o(x^3)$. □

(5) 设函数 $f(x)$ 在 x_0 附近有反函数, 且二阶可导, 满足当 $x\to x_0$ 时有 $f(x)=1+2(x-x_0)+3(x-x_0)^2+o((x-x_0)^2)$, 则 $x=f^{-1}(y)$ 在 $y_0=f(x_0)=1$ 处的二阶导数等于 $(\qquad)$. $(-\frac{3}{4})$

思路. 由条件可知, 在 $x = x_0$ 处, $y'(x) = 2$, $y''(x) = 6$. 于是

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}y^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right) = \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}\right)}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}} = \frac{-\frac{y''(x)}{(y'(x))^2}}{y'(x)} = -\frac{y''(x)}{y'(x)^3}.$$

故所求为 $-\frac{6}{2^3} = -\frac{3}{4}$. □

二、 选择题 (每小题 3 分, 共 15 分)

(B) (1) 已知函数 $f(x)$ 在 x_0 可导, 则 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x} = (\qquad)$.

A. $f'(x_0)$　　B. $2f'(x_0)$　　C. 0　　D. $f''(x_0)$

思路. $\dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x} = \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} + \dfrac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)}{-\Delta x}$. □

(C) (2) 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ 则其导函数 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处 $(\qquad)$.

A. 没有定义　　B. 连续但不可导　　C. 不连续　　D. 连续且可导

思路. 易见当 $x \neq 0$ 时, $f'(x) = 2x\cos(1/x) + \sin(1/x)$, 从而 $x \to 0$ 时 $f'(x)$ 不收敛. □

(A) (3) 设函数 $f(x)$ 有连续的二阶导数, $F(x) = f(\cos x)$, 则 $F(x)$ 在 $x = 0$ 处取得极小值的一个充分条件是 $(\qquad)$.

A. $f'(1) < 0$　　B. $f'(1) > 0$　　C. $f''(1) < 0$　　D. $f''(1) > 0$

思路. $F'(x) = f'(\cos(x))(-\sin(x))$, 故 $F'(0) = 0$, $x = 0$ 为 $F(x)$ 的稳定点. $F''(x) = f''(\cos(x))\sin^2(x) - f'(\cos(x))\cos(x)$, 故 $F''(0) = -f'(1)$. 若 $f'(1) < 0$, 则 $F''(0) > 0$. 由 f'' 的连续性可知, 这说明在 $x = 0$ 附近 $F''(x) > 0$, 即 $F(x)$ 为凸函数. 这说明 $x = 0$ 为 $F(x)$ 的极小值点. (这一题里其实 f'' 存在导数就可以了, 由 $F''(0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{F'(x) - F'(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{F'(x)}{x}$ 可知, 在 $x < 0$ 时, 局部地有 $F'(x) < 0$, 从而 $F(x)$ 严格单调递减; $x > 0$ 时可类似讨论) □

(C) (4) 设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 且 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x^2)}{x^2} = 1$, 则 $(\qquad)$.

A. $f(0) = 0$ 且 $f'_-(0) = 1$　　B. $f(0) = 0$ 且 $f'(0) = 1$

C. $f(0) = 0$ 且 $f'_+(0) = 1$　　D. $f(0) = 1$ 且 $f'(0) = 1$

思路. 若令 $u = x^2$, 若 $x \to 0$, 则 $u \to 0^+$. 由 $\lim\limits_{u \to 0^+} \frac{f(u)}{u} = 1$, 可以推出 $f(0) = \lim\limits_{u \to 0^+} f(u) = \lim\limits_{u \to 0^+} u = 0$, 以及 $f'_+(0) = \lim\limits_{u \to 0^+} \frac{f(u) - f(0)}{u} = \lim\limits_{u \to 0^+} \frac{f(u)}{u} = 1$. □

(5) 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $x\mathrm{e}^{f(y)}=\mathrm{e}^{y}\ln 2022$ 确定, 其中 $f(x)$ 具有二阶导数, $f'(x)\neq 1$, 则 $\mathrm{d}y=($ $)$.

(A)

A. $\dfrac{\mathrm{d}x}{x(1-f'(y))}$ B. $\dfrac{1}{x(1-f'(y))}$ C. $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{f(y)}(1-f'(y))}$ D. $\dfrac{1}{\mathrm{e}^{f(y)}(1-f'(y))}$

思路. 化简方程, 我们有 $x=\ln(2022)\mathrm{e}^{y-f(y)}$, 对 x 求导后, 有 $1=\ln(2022)\mathrm{e}^{y-f(y)}(1-f'(y))y'$, 即 $1=x(1-f'(y))y'$. □

三、 简单计算推理题. (每题 6 分, 共 30 分)

(1) 用数列极限定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{n!}=0$.

证明. 注意到

$$\left|\frac{2^n}{n!}-0\right|=\frac{2\cdot 2\cdots 2}{1\cdot 2\cdots n}<2\cdot\frac{2}{n}=\frac{4}{n},$$

于是, 对任意的正数 ε, 若取 $N=[\frac{4}{\varepsilon}]+1$, 则当 $n>N$ 时有

$$\left|\frac{2^n}{n!}-0\right|=\frac{2^n}{n!}\leq\frac{4}{n}<\frac{4}{N}<\varepsilon.$$

由定义, 这说明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{n!}=0$. □

(2) 设 $\lim\limits_{n\to\infty}(3a_n+b_n)=7$, $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+2b_n)=4$. 证明数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的极限存在, 并求出它们的极限值.

证明. 我们有

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{5}\left(2\left(3a_n+b_n\right)-\left(a_n+2b_n\right)\right)=\frac{1}{5}(2\cdot 7-4)=2,$$
$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\left(\left(3a_n+b_n\right)-3a_n\right)=7-3\cdot 2=1.$$

特别地, $\{a_n\}_n$ 与 $\{b_n\}_n$ 有极限. □

(3) 求出函数 $f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$ 的单调性和凹凸性区间.

解. 我们有 $f'(x)=-2x\mathrm{e}^{-x^2}$. 故 $x<0$ 时, $f'(x)>0$, 从而 $f(x)$ 是严格单调递增; $x>0$ 时, $f'(x)<0$, 从而 $f(x)$ 是严格单调递减.

同时我们又有 $f''(x)=(4x^2-2)\mathrm{e}^{-x^2}$. 这说明在 $(-\infty,-1/\sqrt{2})$ 和 $(1/\sqrt{2},+\infty)$ 这两个区间上, 皆有 $f''(x)>0$, 从而 $f(x)$ 都是凸函数; 在区间 $(-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$ 上, 有 $f''(x)<0$, 从而 $f(x)$ 为凹函数. □

(4) 已知数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n}{n^2}$.

解. 用 $\frac{\infty}{\infty}$ 型 Stolz 定理, 我们有

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n}{n^2}\\
=&\lim_{n\to\infty}\frac{(a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n)-(a_1+2a_2+3a_3+\cdots+(n-1)a_{n-1})}{n^2-(n-1)^2}\\
=&\lim_{n\to\infty}\frac{na_n}{2n-1}=\frac{a}{2}.
\end{aligned}$$

□

(5) 数列 $\{x_n\}$ 由递推公式定义: $x_0=1$, $x_{n+1}=f(x_n)$, 其中 $f(x)=\dfrac{x+2}{x+1}$. 试求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解. 注意到 $f(x)=1+\frac{1}{1+x}$, 由于 $x_0=1$, 用归纳法不难验证, $\{x_n\}_n$ 是一个正数数列. 假定 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, 对于递推公式取极限, 可得 $a=1+\frac{1}{1+a}$, 又由于 $a>0$, 这说明极限 $a=\sqrt{2}$. 下面证明 $\{x_n\}_n$ 确实以 $\sqrt{2}$ 为极限, 为此, 注意到

$$|x_{n+1}-\sqrt{2}|=\left|\left(1+\frac{1}{1+x_n}\right)-\left(1+\frac{1}{1+\sqrt{2}}\right)\right|=\frac{|x_n-\sqrt{2}|}{\left(1+\sqrt{2}\right)(1+x_n)}<\frac{|x_n-\sqrt{2}|}{\left(1+\sqrt{2}\right)}.$$

由此不难推出所证的结果. □

四、 (本题 10 分) 对于函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+ax^3)}{x-\arcsin(x)}, & x<0,\\ 6, & x=0,\\ \dfrac{\mathrm{e}^{ax}+x^2-ax-1}{x\cdot\sin(x/4)}, & x>0,\end{cases}$$

问参数 a 为何值时, $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续; 参数 a 为何值时, $x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点?

解. 我们有

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{\ln(1+ax^3)}{x-\arcsin(x)}=\lim_{x\to0^-}\frac{ax^3}{x-\left(x+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\right)}=-6a,$$

另一方面, 我们同时有

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\mathrm{e}^{ax}+x^2-ax-1}{x\cdot\sin(x/4)}=\lim_{x\to0^+}\frac{(1+ax+\frac{(ax)^2}{2}+o(x^2))+x^2-ax-1}{x^2/4}=2a^2+4.$$

令 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$, 我们有 $-6a=2a^2+4$, 即 $a=-1$ 或 -2.

(i) 若 $a=-1$, 则 $\lim_{x\to0}f(x)=6=f(0)$, 故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

(ii) 若 $a=-2$, 则 $\lim_{x\to0}f(x)=12\neq f(0)$, 故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处有可去间断点. □

五、 (本题 12 分) 求方程 $k\cdot\arctan(x)-x=0$ 的不同实根的个数, 其中 k 为参数.

解. 令 $f(x)=k\arctan(x)-x$. 为了讨论其零点个数, 由于 f 为奇函数, 我们不妨先考虑 $x\ge 0$ 的情形. 容易看到,

$$f(0)=0,\qquad \lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty,\qquad \text{以及}\qquad f'(x)=\frac{k}{1+x^2}-1.$$

(i) 若 $k\le 1$, 则当 $x>0$ 时 $\frac{k}{1+x^2}\le\frac{1}{1+x^2}<1$, 于是 $f'(x)<0$, 从而 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上严格单调递减, 仅有 $x=0$ 为零点. 这说明 $f(x)$ 在实轴上仅有一个根.

(ii) 若 $k>1$, 则 $f'(x)=0$ 在 $x>0$ 时仅有一个根 $x_0=\sqrt{k-1}$. 当 $0<x<x_0$, $f'(x)>0$, 故 $f(x)$ 严格单调递增; 当 $x>x_0$, $f'(x)<0$, 故 $f(x)$ 严格单调递减. 由于 $f(0)=0$ 而 $f(+\infty)=-\infty$, 这说明 $f(x)$ 在 $x>0$ 时恰有一个实根 x_1, 并且 $x_1>x_0$. 综上, 这说明 $f(x)$ 在实轴上恰有三个根: $-x_1,0,x_1$. □

六、 (本题 12 分) 设 $y=f(x)$ 二阶可导且 $f''(x)>0,\ f(0)=0,\ f'(0)=0$. 求

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2f(u)}{f(x)\sin^2u},$$

其中 $u=u(x)$ 是曲线 $y=f(x)$ 上点 $P=(x,f(x))$ 处切线在 x 轴上的截距.

解. 曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x,f(x))$ 处的切线方程为

$$Y-f(x)=f'(x)(X-x).$$

若令 $Y=0$, 则 $X=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$. 这说明截距 $u=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$. 经计算, 我们有

$$\lim_{x\to0}u=\lim_{x\to0}\left(x-\frac{f(x)}{f'(x)}\right)=-\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{f'(x)}=-\lim_{x\to0}\frac{\frac{f(x)-f(0)}{x}}{\frac{f'(x)-f'(0)}{x}}=-\frac{f'(0)}{f''(0)}=0.$$

我们没有假设 f'' 连续, 因此上面的计算不能用洛必达法则. 另外, 上面的计算表明, $x\to0$ 时 $u(x)$ 是一个无穷小量; 我们必须验证这一点, 下面才可以用 $\frac{0}{0}$ 型的洛必达法则. 函数 $f(x)$ 有麦克劳林公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2)=\frac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2).$$

于是

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{u}{x}&\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}1-\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{xf'(x)}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2)}{xf'(x)}=1-\lim_{x\to0}\frac{\frac{f''(0)}{2}+o(1)}{\frac{f'(x)-f'(0)}{x}}\\&=1-\frac{1}{2}\cdot\frac{f''(0)}{f''(0)}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

这说明 u 是 1 阶无穷小量. 由此可知

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2f(u)}{f(x)\sin^2u}\xlongequal{\sin(u)\sim u}\lim_{x\to0}\frac{x^2\left(\frac{f''(0)}{2}u^2+o(u^2)\right)}{u^2\left(\frac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2)\right)}=1. \qquad \square$$

七、 (本题 6 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 是有二阶导函数, 且 $f(0)=f'(0)$, $f(1)=f'(1)$. 求证: 存在 $\xi\in(0,1)$ 满足 $f(\xi)=f''(\xi)$.

证明. 考虑辅助函数 $F(x)=(f(x)-f'(x))\mathrm{e}^x$. 由于 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导, 满足 $F(0)=F(1)$, 由 Rolle 定理可知, 存在 $\xi\in(0,1)$ 满足 $F'(\xi)=0$, 即 $(f(\xi)-f''(\xi))\mathrm{e}^\xi=0$. 由于 $\mathrm{e}^\xi\neq0$, 这说明 $f(\xi)=f''(\xi)$. $\square$