中国科学技术大学 2023 秋季学期
《概率论》期末试题 2023.12.29

姓名: 学号: 分数:

1. **(15分) 有序与无序，确定与随机，纯粹数学与应用数学，好似硬币的两面，看似截然不同，有时很像一样的东西。概率模型、随机现象与概率方法，与其他学科联系甚多，尤以数论与概率的互动最为吸引人. 且欣赏数论中 Erdös-Kac 定理:**

   记 $\omega(n)$ 表示正整数 n 的互异素因子个数, 即 $\omega(n) = \#\{素数p : p|n\}$, 则任给实数 $a < b$ 有

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \# \left\{ k : 1 \le k \le n, a \le \frac{\omega(k) - \log\log n}{\sqrt{\log\log n}} \le b \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x.$$

   回答问题: (1) 以 Erdös-Kac 定理为背景构造一个**概率模型**; (2) 至少写出两个 Erdös-Kac 定理中出现的相关**概率概念或结论**.

2. **(20分)** 令 $\phi_n(t) = \cos^n t,\ t \in \mathbb{R}$.
   (1) 求特征函数 $\phi_1(t)$ 与 $\phi_2(t)$ 对应的分布函数;
   (2) 对一般的正整数 n, $\phi_n(t)$ 是否为特征函数? 回答并给出理由.

3. **(15分)** $X_1, \cdots, X_n$ ($n \ge 2$) 相互独立且均服从标准正态分布, 记

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k, \quad S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \overline{X})^2,$$

   证明 $\overline{X}$ 与 S^2 独立.

4. **(15分)** 若随机变量 X 的尾部概率对某正常数 K_1 满足

$$\mathbb{P}(|X| \ge t) \le 2e^{-\frac{t^2}{K_1^2}}, \quad \forall t \ge 0,$$

   则称 X 为**次高斯随机变量**. 试证明
   (1) 若 X 的矩母函数

$$\mathbb{E}[e^{sX}] \le e^{\frac{1}{2}s^2}, \quad \forall s \in \mathbb{R},$$

   则 X 为次高斯随机变量.
   (2) 次高斯随机变量的矩满足不等式

$$\mathbb{E}[|X|^p] \le (K_2\sqrt{p})^p, \quad \forall p \ge 1,$$

   这里 K_2 为不依赖 p 的正常数. **(提示: $\mathbb{E}[|X|] = \int_0^\infty \mathbb{P}(|X| \ge t)dt$ 可能有用!)**

5. **(15分)** 对正随机变量 $X_1, \cdots, X_n$, 假设 $X_n \xrightarrow{\mathrm{P}} 0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n] = 1$.
   (1) 举例说明存在满足假设条件的随机变量列 $\{X_n\}$;
   (2) 对任意 $a > 0$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}[|X_n - a|]$ 存在, 并求其极限.

6. (20分) $\{X(x,t)\}_{x\in\mathbb{Z},t\in\mathbb{Z}_+}$ 为独立同分布的随机变量列，对 $\delta>0$, 递归定义随机增长函数

$$S_\delta(x,t)=\frac{S_\delta(x-1,t-1)+S_\delta(x+1,t-1)}{2}+n^{-\delta}X(x,t),\qquad S(x,0)=0.$$

记 $p(x,t)$ 为直线上从原点出发的简单对称随机游走从时刻 0 到时刻 t 到达位置 x 的概率.

(1) 对正整数 m,n, 试证明

$$S_\delta(m,n)=n^{-\delta}\sum_{t=1}^{n}\sum_{x=m-n+t}^{m+n-t}p(m-x,n-t)X(x,t).$$

(2) 若 $X(1,1)$ 均值为 0 方差 σ_0^2 为有限正数, 试选择合适的 δ_0 与 $B>0$ 并证明

$$\frac{1}{B}S_{\delta_0}(0,n)\xrightarrow{\mathrm{D}}N(0,1).$$

(3) 若 $X(1,1)$ 有界且所有的奇数阶矩为 0, 证明 $S_{\frac{3}{4}}(0,n)\xrightarrow{\text{a.s.}}0$.

(4) (附加题 5 分) 在 (2) 中 δ_0 和 (3) 问中假设条件下, 试证明对任意 $\delta>\delta_0$ 有 $S_\delta(0,n)\xrightarrow{\text{a.s.}}0$.

(注: 此附加题的 δ 不必一定做到最优，自由探索精神比白银更珍贵!)

附: 以上各题可能用到的数学公式:

(i) $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}$; (ii) Stirling 公式: $n!\sim n^n\mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}$.