宝宝的数理方程期末复习 2022 Spring

林绮欢

总之这个就是波波讲义的浓缩版

chap 1. **偏微分方程定解问题**

一. 三个基本方程类以及最基本方程形式

1. 波动方程类：$\partial_t^2 u = a^2 \Delta u + f(t, \vec{x}) \Rightarrow$ 弦振动方程：$\partial_t^2 u = a^2 \partial_x^2 u + f(t, \vec{x})$
2. 热传导方程类：$\partial_t u = a^2 \Delta u + f(t, \vec{x}) \Rightarrow$ 一维热传导方程：$\partial_t u = a^2 \partial_x^2 u + f(t, \vec{x})$
3. 场位方程类：$\Delta u = f(t, \vec{x}) \Rightarrow$ 拉普拉斯方程（场位方程）：$\Delta_3 u = f(x, y, z)$

二. 含有两个自变量的一阶线性偏微分方程的特征线法

$$a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x,y)u = f(x,y) \tag{1.1}$$

1. 列出特征线方程

$$\frac{dx}{a(x,y)} = \frac{dy}{b(x,y)}$$

2. 从以上特征方程求出首次积分 $\varphi(x,y) = C_1$
3. 做自变量替换 $\xi = \varphi(x,y), \eta = \psi(x,y)$, 其中 $\psi(x,y)$ 为与 $\varphi(x,y)$ 无关的任意函数
4. 利用新变量 ξ, ψ 代替 x, y 化简原方程，则新的一阶线性偏微分方程不再含有 ξ 的偏导数项，借助一阶常微分方程公式求解即可

$$y' + P(x)y = Q(x) \Rightarrow y = e^{-\int P(x)dx}(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C) \tag{1.2}$$

三. 含有三个自变量的一阶线性偏微分方程的特征线法

$$a(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial z} + D(x,y,z)u = f(x,y,z) \tag{1.3}$$

1. 列出特征线方程

$$\frac{dx}{a(x,y,z)} = \frac{dy}{b(x,y,z)} = \frac{dz}{c(x,y,z)}$$

2. 从以上特征方程求出两个彼此独立的首次积分 $\varphi(x,y,z) = C_1, \psi(x,y,z) = C_2$
3. 做自变量替换

$$\begin{cases} \xi = \varphi(x,y,z) \\ \eta = \psi(x,y,z) \end{cases}$$

再取 $\tau=\theta(x,y,z)$，其中 $\theta(x,y,z)$ 与 $\xi(x,y,z),\psi(x,y,z)$ 无关偏导数项，借助一阶常微分方程公式求解即可

四. 含 n 个自变量的一阶线性偏微分方程的特征线法

$$\sum_{j=1}^{n} b_j(x_1,x_2,\cdots x_n)\frac{\partial u}{\partial x_j}=f(x_1,x_2,\cdots,x_n) \tag{1.4}$$

1. 列出特征线方程 $dx_1/b_1=dx_2/b_2=\cdots=dx_n/b_n$
2. 从以上特征方程求出 n-1 个彼此独立的首次积分

$$\varphi_k=(x_1,x_2,\cdots,x_n)=C_k,(k=1,2,\cdots,n-1)$$

3. 作自变量替换

$$\begin{cases}\xi_j=\varphi_j(x_1,x_2,\cdots,x_n),(j=x_1,x_2,\cdots,x_n)\\ \xi_n=\varphi_n(x_1,x_2,\cdots,x_n).\end{cases}$$

φ_n 为任取的与 φ_j 独立的函数

4. 用 ξ_j 代替 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 化简原方程, 借助一阶常微分方程公式求解即可

五. 自由弦振动方程的通解

$$u_{tt}=a^2u_{xx}(t>0)\Rightarrow u=f(x-at)+g(x+at) \tag{1.5}$$

六. 达朗贝尔公式

无限长的弦的自由振动初值问题

$$\begin{cases}u_{tt}=a^2u_{xx}(t>0,-\infty<x<+\infty)\\ u|_{t=0}=\varphi(x),u_t|_{t=0}=\psi(x)\end{cases} \tag{1.6}$$

$$\Rightarrow u=\frac{1}{2}[\varphi(x-at)+\varphi(x+at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi \tag{1.7}$$

非齐次问题，即泛定方程为 $u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x)$, 先求出泛定方程的一个特解将其齐次化；对于半直线上的达朗贝尔公式，先进行相应的延拓

1.$u(t,0)=0$, 进行奇延拓

2.$u_t(t,0)=0$, 进行偶延拓

七. 两个自变量二阶线性偏微分方程的分类和标准

$$a_{11}u_{xx}+2a_{12}u_{xy}+a_{22}u_{yy}+b_1u_x+b_2u_y+cu=0 \tag{1.8}$$

特征方程为 $a_{11}y_x^2-2a_{12}y_x+a_{22}=0$, 判别式 $\Delta=a_{12}^2-a_{11}a_{22}$

1.$\Delta>0$, 双曲型；不妨设 $a_{11\neq 0}$, 此时有

$$y_x=\frac{a_{12}+\sqrt{\Delta}}{a_{11}};y_x=\frac{a_{12}-\sqrt{\Delta}}{a_{11}}$$

对应两族实特征线 $\varphi(x,y)=h_1,\psi(x,y)=h_2$, 做自变量替换 $\xi=\varphi(x,y),\eta=\psi(x,y)$ 则以 ξ,η 为自变量时有 $u_{\xi\eta}+C_1u_\xi+C_2u_\eta+C_3u=0$, 其中 C_1,C_2,C_3 为 ξ,η 的函数
$2.\Delta=0$, 抛物型；不妨设 $a_{11\neq0}$, 此时有 $y_x=a_{12}/a_{11}$, 对应唯一特征线族 $\varphi(x,y)=h$, 做自变量替换 $\xi=\varphi(x,y),\eta=\psi(x,y)$, 其中 $\psi(x,y)$ 可选取与 $\varphi(x,y)$ 独立的任意函数，因此标准型为 $u_{\eta\eta}+D_1u_\xi+D_2u_\eta+D_3u=0$, 其中 D_1,D_2 为 ξ,η 的函数
$3.\Delta<0$, 椭圆形；不妨设 $a_{11\neq0}$, 此时有

$$y_x=\frac{a_{12}+i\sqrt{\Delta}}{a_{11}};y_x=\frac{a_{12}+i\sqrt{\Delta}}{a_{11}}$$

对应两族成共轭形式的隐式解 $\varphi(x,y)+i\psi(x,y)=h_1,\varphi(x,y)-i\psi(x,y)=h_2$, 做自变量替换 $\xi=\varphi(x,y),\eta=\psi(x,y)$, 则标准型为 $u_{\varphi\varphi}+u_\eta\eta+E_1u_\varphi+E_2u_\eta+E_3u=0$, 其中 E_1,E_2,E_3 为 ξ,η 的函数

八. 叠加原理

1. 二阶微分算子

$$L=\sum_{k,l=1}^{n}a_{kl}\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_l}+\sum_{l=1}^{m}b_l\frac{\partial}{\partial x_l}+c \tag{1.9}$$

则含有 n 个自变量的二阶线性偏微分方程可表示为 $Lu(\vec{x})=f(\vec{x}),\vec{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$
2. 设 u_i 满足线性方程 $Lu_i=f_i,(i=1,2,\cdots,n)$，那么 $u=\sum_{i=1}^{n}c_iu_i$ 满足方程 $Lu=\sum_{i=1}^{n}c_if_i$
3. 设 u_i 满足线性方程 $Lu_i=f_i,(i=1,2,\cdots)$, 那么级数 $u=\sum_{i}^{+\infty}c_iu_i$ 满足方程 $Lu=\sum_{i}^{+\infty}c_if_i$
4. 设 $u(M,M_0)$ 满足线性方程 (或线性定解条件)$Lu=f(M,M_0)$，其中 M 表示自变量组，M_0 表示参数组, 又积分 $U(M)=\int_V u(M,M_0)dM_0$ 收敛，那么 $U(M)$ 满足 $LU(M)=\int_V f(M,M_0)dM_0$
5. 对于线性偏微分方程 $Lu(\vec{x})=f(\vec{x})$, 其非齐次方程通解等于齐次方程的通解加上非齐次方程的一个特解

九. 齐次化原理

1. 定理：对于弦的纯受迫振动问题

$$\begin{cases}u_{tt}=a^2u_{xx}+f(t,x),(t>0,-\infty<x<+\infty)\\u|_{t=0}=0,u_t|_{t=0}=0\end{cases} \tag{1.10}$$

则其解 $u(t,x)=\int_0^t w(t,x,\tau)d\tau$, 而 $w(t,x,\tau)$ 满足齐次方程

$$\begin{cases}w_{tt}=a^2w_{xx},(t>\tau,-\infty<x<+\infty)\\w|_{t=\tau}=0,w_t|_{t=\tau}=f(\tau,x)\end{cases} \tag{1.11}$$

作自变量平移 $t_1=t-\tau$, 则由达朗贝尔公式求得

$$w(t_1,x,\tau)=\frac{1}{2a}\int_{x-at_1}^{x+at_1}f(\tau,\xi)d\xi=\frac{1}{2a}\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\tau,\xi)d\xi \tag{1.12}$$

2. 求解弦振动非齐次方程初值问题

$$\begin{cases}u_{tt}=a^2u_{xx}+f(t,x),(t>0,-\infty<x<+\infty)\\u|_{t=0}=\varphi(x),u_t|_{t=0}=\psi(x)\end{cases} \tag{1.13}$$

令 $u=u_1+u_2$, 其中 u_1 满足原问题对应的其次问题，由达朗贝尔公式求解

$$\begin{cases} u_{1tt}=a^2u_{xx},(t>0,-\infty<x<+\infty) \\ u_1|_{t=0}=\varphi(x),u_{1t}|_{t=0}=\psi(x) \end{cases}$$

u_2 满足相应的费其次但初值为 0 的纯受迫振动问题，由齐次化原理求出

$$\begin{cases} u_{2tt}=a^2u_{2xx}+f(t,x),(t>0,-\infty<x<+\infty) \\ u_2(0,x)=0,u_{2t}(0,x)=0 \end{cases}$$

因此

$$\begin{aligned} u(t,x) &= u_1(t,x)+u_2(t,x) \\ &= \frac{1}{2}[\varphi(x-at)+\varphi(x+at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi+\frac{1}{2a}\int_0^t d\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\tau,\xi)d\xi \end{aligned} \tag{1.14}$$

特别地

$$u=u(r),v=ru(r)\Rightarrow\Delta_3u=u_{rr}+\frac{2}{r}u_r=\frac{1}{r}V_{rr}$$

chap 2. **分离变量法**

一. 预备知识

1. 二阶常系数微分方程 $y''+py'+qy=0$, 特征方程为 $\lambda^2+p\lambda+q=0$

(1) 特征方程有两个不同实根 λ_1,λ_2, 通解 $y=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}$

(2) 特征方程由唯一实根 λ_0, 通解 $y=C_1e^{\lambda_0 x}+C_2xe^{\lambda_0 x}$

(3) 特征方程有一对共轭复根 $\lambda_{1,2}=\alpha\pm i\beta$, 通解为 $y=C_1e^{\alpha x}cos\beta x+C_2e^{\alpha x}sin\beta x$

2. 欧拉方程 $x^2y_{xx}+pxy_x+qy=0$, 作变换 $t=lnx$，方程化为 $y_{tt}+(p-1)y_t+qy=0$

3. 余弦级数展开

$$f(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}A_n\cos\frac{n\pi x}{l}, x\in[0,l]$$

系数

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx, (n=0,1,2,\cdots)$$

正弦级数展开

$$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}A_n\sin\frac{n\pi x}{x}, x\in[0,l]$$

系数

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, (n=1,2,3,\cdots)$$

二. 常见固有值问题

$$\begin{cases}y''+\lambda y=0\\ y(0)=0,y(l)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda_n=(\frac{n\pi}{l})^2,(n=1,2,\cdots)\\ y_n(x)=\sin\frac{n\pi x}{l}\end{cases}$$

$$\begin{cases}y''+\lambda y=0\\ y'(0)=0,y'(l)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda_n=(\frac{n\pi}{l})^2,(n=0,1\cdots)\\ y_n(x)=\cos\frac{n\pi x}{l}\end{cases}$$

$$\begin{cases}y''+\lambda y=0\\ y(0)=0,y'(l)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda_n=(\frac{(2n+1)\pi}{2})^2,(n=0,1\cdots)\\ y_n(x)=\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\end{cases}$$

$$\begin{cases}y''+\lambda y=0\\ y'(0)=0,y(l)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda_n=(\frac{(2n+1)\pi}{2})^2,(n=0,1\cdots)\\ y_n(x)=\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\end{cases}$$

$$\begin{cases}y''+\lambda y=0\\ y(\theta)=y(\theta+2l)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda_n=(\frac{n\pi}{l})^2,(n=0,1\cdots)\\ y_n(\theta)=A_n\cos\frac{n\pi x}{l}+B_n\sin\frac{n\pi x}{l}\end{cases}$$

三. 两个分离变量典型例子与分离变量法

1. 无限长圆柱体稳态温度边值问题：一个无限长圆柱 $(x^2+y^2<a^2,-\infty<z<+\infty)$ 内部无热源，边界柱面温度为 $F(x,y)$, 则柱内稳态温度分布满足

$$\begin{cases}\Delta_2 u=0,(x^2+y^2<a^2)\\ u|_{x^2+y^2=a^2}=F(x,y)\end{cases}\tag{2.1}$$

化为极坐标

$$\begin{cases} \Delta_2 u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial u}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial^2 \theta} = 0 \\ u|_{r=a} = F(acos\theta, b\cos\theta) \triangleq f(\theta) \end{cases} \tag{2.2}$$

分离变量得固有值问题以及微分方程

$$\begin{cases} \Theta''(\theta) + \lambda\Theta(\theta) = 0 \\ \Theta(\theta) = \Theta(\theta + 2\pi) \end{cases}, r^2R'' + rR' - \lambda R(r) = 0$$

$$\Rightarrow u(r,\theta) = A_0 + B_0 lnr + \sum_{n=1}^{+\infty}(A_n r^n + B_n r^{-n})(C_n \cos n\theta + D_n \sin n\theta) \tag{2.3}$$

2. 弦振动的混合问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, (0 < x < l, t > 0) \\ u(t,0) = u(t,l) = 0 \\ u(0,x) = \varphi(x), u_t(0,x) = \psi(x) \end{cases} \tag{2.4}$$

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}d\xi \cdot \cos\frac{n\pi at}{l} + \frac{2}{n\pi a}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{n\pi\xi}{l}d\xi \cdot \sin\frac{n\pi at}{l}\Big)\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{2.5}$$

四.Strum-Liouville 定理

1. 权重：对于二阶齐次偏微分方程 $b_0(x)y''(x) + b_1(x)y'(x) + b_2(x)y(x) + \lambda y(x) = 0$, 两端同时乘以待定权重 $\rho(x)$，方程化为 $\rho(x)b_0(x)y''(x) + \rho(x)b_1(x)y'(x) + b_2(x)\rho(x)y(x) + \lambda\rho(x)y(x) = 0$, 使此方程前两项构成全导数，则权值 $\rho(x)$ 为

$$\rho(x) = \frac{1}{b_0(x)}\exp\{\int\frac{b_1(x)}{b_0(x)}dx\} \tag{2.6}$$

方程化为 Strum-Liouville 型方程

$$\begin{cases} [k(x)y'(x)]' - q(x)y(x) + \lambda\rho(x)y(x) = 0 \\ k(x) = \rho(x)b_0(x), q(x) = -b_2(x)\rho(x) \end{cases}$$

2. 固有函数系 $\{y_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$ 是完备的，即对 $\forall F(x) \in L^2_\rho[a,b], f(x)$ 可在固有函数系 $\{y_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$ 下展开为广义 $Fourier$ 级数

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(x) \tag{2.7}$$

$$\begin{cases} c_n = \frac{1}{\|y_n(x)\|^2}\int_a^b \rho(x)f(x)y_n(x)dx \\ \| y_n(x) \|^2 = \int_a^b \rho(x)y_n^2(x)dx \end{cases} \tag{2.8}$$

五. 方程非齐次、边界条件为齐次的混合问题

1. 特解法：先求出 u 满足的非齐次方程与齐次边界条件的一个特解 u_1，再做变换 $u = v + u_1$, 则

V 满足的新的混合问题的泛定方程和边界条件都是齐次的。

tip: 如果求得的 u_1 只满足非齐次方程而不满足齐次边界条件，则可设 $u_2 = u_1 + f_n(x), f_n(x)$ 为 n 次多项式, 再代入边界条件待定系数法求解

2. 利用叠加原理结合齐次化原理：考虑弦振动非齐次混合问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(t,x), (t>0, 0<x<l) \\ u(t,0) = u(t,l) = 0 \\ u(0,x) = \varphi(x), u_y(0,x) = \psi(x) \end{cases} \tag{2.9}$$

将 u 分解为 $u = u_1 + u_2$，分别满足

$$\begin{cases} u_{1tt} = a^2 u_{1tt}, (t>0, 0<x<l) \\ u_1(t,x) = u_1(t,l) = 0 \\ u_1(0,x) = \varphi(x), u_{1t} = \psi(x) \end{cases} ; \quad \begin{cases} u_{2tt} = a^2 u_{2xx} + f(t,x), (t>0, 0<x<l) \\ u_2(t,0) = u_2(t,l) = 0 \\ u_2(0,x) = 0, u_{2t}(0,x) = 0 \end{cases}$$

u_1 由分离变量法求解，u_2 可通过齐次化原理解出

$$\begin{cases} w_{tt} = a^2 w_{xx}, (t>\tau, 0<x<l) \\ w(t,0) = w(t,l) = 0 \\ w|_{t=\tau} = 0, \frac{\partial w}{\partial t}|_{t=\tau} = f(\tau,x) \end{cases}$$

再作时间平移 $t_1 = t - \tau$ 则可求得 w

$$\Longrightarrow u_2(t,x) = \int_0^t w(t,x,\tau) d\tau$$

3. 固有函数展开法 (Fourier 方法)：利用对应的齐次方程以及已知的齐次边界条件组成一个齐次问题，用分离变量法求解此齐次问题产生完备的正交函数系。非齐次方程的解可在这个完备的正交函数系展开，然后再根据方程和定解条件求出展开系数

六. 一般非齐次混合问题

一般非齐次方程混合问题是指不仅泛定方程有可能非齐次化，而且边界条件也可能非齐次再进行处理。常用方法是先把边界条件齐次化，再使用以上处理方程非齐次、边界条件为齐次的混合问题的方法解决问题

齐次化方法：设满足边界条件的解为 $v(t,x) = A(t)x + B(t)$, 利用两个端点的边界条件得出关于 $A(x)$ 和 $B(x)$ 的线性方程组从而解出 $A(x)$ $B(x)$；若无解则客舍 $v(t,x) = A(t)x^2 + B(x)$。求出 $v(t,x)$ 后作变换 $u = w(t,x) + v(t,x)$, 这样 $w(t,x)$ 满足齐次边界条件的混合问题

七. 环域内 Laplace 方程

$$\begin{aligned} &\Delta_2 u = 0, (a_1 < r < a_2) \\ \Rightarrow &u(r,\theta) = C_0 + D_0 \ln r + \sum_{n=1}^{+\infty} (C_n r^n + D_n r^{-n})(A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) \end{aligned}$$

chap 3. **特殊函数**

本章中主要讲述三维 Laplace 方程 (Helmholtz 方程) 进行在不同坐标系下坐标分离：在柱坐标系进行坐标分离产生 Bessel 方程，在球坐标对称情形下产生 Legendre 方程；分别求解可得 Bessel 函数与 Legendre 函数。

一. 分离变量

Helmholtz 方程:$\Delta_3 v + k^2 v = 0$

1. 定理: 设 $X_n(x), n = 1, 2\cdots$ 为区间 $[0, a]$ 上带权 $\rho(x)$ 的一元完备正交系, 设 $Y_m(y), m = 1, 2\cdots$ 为区间 $[0, b]$ 上带权 $\sigma(x)$ 的一元完备正交系，则二元函数系 $X_n(x)Y_m(y)$ 是 $[0, a]\times[0, b]$ 上加权 $\rho(x)\cdot\sigma(y)$ 的完备正交系，任取

$$f(x, y) \in L^2_{\rho\sigma}[[0, a]\times[o, b]] = \{f(x, y) \int_0^a\int_0^b |f(x, y)|^2\rho(x)\sigma(y)dydx < +\infty\}$$

有

$$f(x, y) = \sum_{nm=1}^{+\infty} C_{nm}X_n(x)Y_m(y)$$
$$with\ \ C_{nm} = \frac{\int_0^a\int_0^b f(x, y)X_n(x)Y_m(y)\rho(x)\sigma(y)dydx}{\|X_n(x)\|^2\|Y_m(y)\|^2}$$

有时候 Y 的完备系是相对于每个固定的 n 而言的，即完备系为 $Y_{nm}(y)$，则以上二元函数的广义 Fourier 展开定理修正为以下形式:

定理：: 设 $X_n(x), n = 1, 2\cdots$ 为区间 $[0, a]$ 上带权 $\rho(x)$ 的一元完备正交系，对于每个固定的 n,$Y_{nm}(y), m = 1, 2\cdots$ 为区间 $[0, b]$ 上带权 $\sigma(x)$ 的一元完备正交系，则二元函数系 $X_n(x)Y_{nm}(y)$ 是 $[0, a]\times[0, b]$ 上加权 $\rho(x)\cdot\sigma(y)$ 的完备正交系，任取

$$f(x, y) \in L^2_{\rho\sigma}[[0, a]\times[o, b]] = \{f(x, y) \int_0^a\int_0^b |f(x, y)|^2\rho(x)\sigma(y)dydx < +\infty\}$$

有

$$f(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty} C_{nm}X_n(x)Y_{nm}(y)$$
$$with\ \ C_{nm} = \frac{\int_0^a\int_0^b f(x, y)X_n(x)Y_{nm}(y)\rho(x)\sigma(y)dydx}{\|X_n(x)\|^2\|Y_{nm}(y)\|^2}$$

2. 在柱坐标系下分离变量：柱坐标系下 Helmholtz 方程为

$$\Delta_3 u + k^2 u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial u}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2 u = 0 \tag{3.1}$$

令 $u(r, \theta, z) = R(r)\Theta(\theta)Z(z), Z''/Z = -\mu, \Theta''/\Theta = -\sigma = -\nu^2, \lambda = k^2 - \mu$ 代入整理得

$$\begin{cases} Z'' + \mu Z = 0, \Theta'' + \sigma\Theta = 0 \\ (rR)' + (\lambda r - \frac{\nu^2}{r})R = 0 \end{cases}$$

进行变换 $x = \sqrt{\lambda}r$, 记 $y(x) = R(\frac{x}{\sqrt{\lambda}})$, 方程化为 ν 阶 Bessel 方程

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0 \tag{3.2}$$

3. 在球坐标系下分离变量:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial u}{\partial r})+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta})+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+k^2u=0 \tag{3.3}$$

令 $u=R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi),\Phi''/\Phi=-\mu,(sin\theta\Theta')'/(sin\theta\Theta)-\mu/sin^2\theta=-\lambda$, 代入得

$$\Phi''+\mu\Phi=0$$

$$\frac{1}{\sin\theta}(\sin\theta\Theta')'+(\lambda-\frac{\mu}{\sin^2\theta})\Theta=0 \tag{3.4.a}$$

$$\frac{1}{r^2}(r^2R')'+(k^2-\frac{\lambda}{r^2})R=0 \tag{3.4.b}$$

式 (3.4.b) 在 $k\neq 0$ 时称为球 Bessel 方程，在 $k=0$ 时为欧拉方程;
令 $x=\cos\theta,\mu=m^2,y(x)=\Theta(\arccos x)$, 则式 (3.4.a) 化为

$$[(1-x^2)y']'+(\lambda-\frac{m^2}{1-x^2})y=0 \tag{3.5}$$

式 (3.5) 称为 m 阶伴随 Legendre 方程，特别地，在 $m=0$ 时为 legendre 方程

$$[(1-x^2)y']'+\lambda y=0 or (1-x^2)y''-2xy'+\lambda y=0 \tag{3.6}$$

三.Legendre 函数

1.Legendre 函数表示

(1) 微分表示:

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

(2) 二项式展开表示:

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\frac{(-1)^k(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k},n=0,1,2\cdots$$

(3) 积分表示：其中 c 为围绕着 x 的任意闭路

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n 2\pi i}\oint_c\frac{(z^2-1)^n}{(z-x)^{n+1}}dz$$

$$P_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi(x+\sqrt{1-x^2}i\cos\theta)^n d\theta$$

(4) 母函数表示:

$$(1-2xt+t^2)^{-1/2}=\sum_{n=o}^{+\infty}P_n(x)t^n,|t|<1$$

2. 函数性质

(1) 奇偶性: $P_n(-x)=(-1)^nP_n(x)$

(2) 次数性质: $P_n(x)$ 是 n 次多项式

(3) 特殊点的函数值:

$$P_n(x)=\begin{cases}0,n=2m+1\geq 1\\ \frac{(-1)^m(2m-1)!!}{2m!!},n=2m\geq 2\\ 1,n=0\end{cases}$$

$$P_n(1)=1,P_n(-1)=(-1)^n$$

(4) 递推公式

$$\begin{aligned}
&(n+1)P_{n+1}(x)-(2n+1)xP_n(x)+nP_{n-1}(x)=0\\
&nP_n(x)-xP'_n(x)+P'_{n-1}(x)=0\\
&nP_{n-1}(x)-P'_n(x)+xP'_{n-1}(x)=0\\
&P'_{n+1}(x)-P'_{n-1}(x)=(2n+1)P_n(x)
\end{aligned}$$

(5) 模的平方:

$$\| P_n(x) \|^2=\int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx=\frac{2}{2n+1}$$

(6) 正交性:

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)=0, n\neq m$$

(7) 广义傅里叶展开：取 $f(x), x\in[-1,1]$ 有

$$\begin{aligned}
&f(x)=\sum_{-\infty}^{+\infty} C_nP_n(x)\\
&C_n=\frac{1}{\| P_n(x) \|^2}\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)dx=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)dx
\end{aligned}$$

特别的

$$\int P_n(x)dx=\frac{P_{n+1}(x)-P_{n-1}(x)}{2n+1}$$

四.Bessel 函数

1.Bessel 方程: $x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0, (\nu\geqslant 0)$, 通解为 $y=CJ_\nu(x)+DN_\nu(x)$,$J_\nu(x)$ 和 $N_\nu(x)$ 分别为第一类和第二类 Bessel 函数

$$\begin{aligned}
&J_\nu(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!(k+\nu+1)}(\frac{x}{2})^{2k+\nu}\\
&\nu\neq m, N_\nu=\frac{\cos\nu\pi}{\sin\nu\pi}J_\nu(x)-\frac{1}{\sin\nu\pi}J_{-\nu}(x),\\
&\nu=m, N_m(x)=\lim_{\nu\to m}N_\nu(x)\\
&(m\in Z^+)
\end{aligned}$$

2. 函数性质

(1) 递推公式

$$\begin{aligned}
&(x^\nu J_\nu(x))'=x^\nu J_{\nu-1}(x)\\
&(x^{-\nu}J_\nu(x))'=-x^{-\nu}J_{\nu+1}(x)\\
&2J'_\nu(x)=J_{\nu-1}(x)-J_{\nu+1}(x)\\
&2\nu x^{-1}J_\nu(x)=J_{\nu-1}(x)+J_{\nu+1}(x)\\
\Rightarrow&\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n(x^\nu J_\nu)=x^{\nu-n}J_{\nu-n}(x)\\
&\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n(x^{-\nu}J_\nu)=(-1)^nx^{-(\nu+n)}J_{\nu+n}(x)
\end{aligned}$$

(2) 渐进性质

$$\lim_{x\to 0} J_\nu(x) = \begin{cases} 1, \nu = 0 \\ 0, \nu > 0 \end{cases}$$
$$\lim_{x\to 0} N_\nu(x) = \infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} J_\nu(x) = \lim_{x\to+\infty} N_\nu(x) = 0$$

(3) 零点和震荡性:$J_\nu(x), J'_\nu(x), J_\nu(x) + hxJ'_\nu(x)$ 都有无穷可数个非负零点，且分布在 $(0, +\infty)$ 内
(4) 整阶 Bessel 函数的母函数和积分表示：

$$\exp\{\frac{x}{2}(\xi - \xi^{-1})\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x)\xi^n, (0 < \xi < +\infty)$$
$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(x\sin\theta - n\theta)} d\theta$$

五. 方程求解

1. 三维拉普拉斯方程在轴对称情形下的解：此时 $u = u(r, \theta)$, 固有值 $\lambda_n = n(n+1)$

$$\Delta_3 u = 0 \Rightarrow u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} [C_n r^n + D_n r^{-(n+1)}] P_n(\cos\theta) \tag{3.7}$$

$$P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = \frac{3x^2-1}{2}, P_3(x) = \frac{5x^3-3x}{2}$$

2.Bessel 方程
(1).Bessel 方程固有值问题

$$\begin{cases} (rR')' + (\lambda r - \frac{\nu^2}{r})R = 0, (0 < r < a) \\ |R(0)| < +\infty, \alpha R(a) + \beta R'(a) = 0 \end{cases} \tag{3.8}$$

令 $\lambda = \omega^2, x = \omega r$, 则泛定方程化为标准 Bessel 方程

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0 \Rightarrow y = AJ_\nu(x) + BN_\nu(x)$$

即泛定方程解为

$$R(r) = AJ_\nu(\omega r) + BN_\nu(\omega r)$$
$$with\ |R(0)| < +\infty \Rightarrow R(r) = AJ_\nu(\omega r)$$

将 $r = a$ 边界条件代入得 $\alpha J_\nu \omega a + \beta\omega J'_\nu(\omega a) = 0$
设以上方程的非负实根从小到大依次为 $(\omega_0 = 0), \omega_{k1}, \omega_{k2}, \cdots, \omega_{kn}, \cdots$ 其中 $\omega_0 = 0$ 的解只能在零阶 Bessel 方程第二类边界条件下才有可能，ω_{kn} 是指在第 k 类边界条件下解得的第 n 个正根，则

$$\begin{cases} \lambda_n = \omega_{kn}^2 \\ R_n(r) = J_\nu(\omega_{kn} r) \end{cases}$$

(2).Bessel 函数系下广义 Fourier 展开

固有函数系 $J_\nu(\omega r)$ 是完备的带权正交系 (权值为 r)，所以任取函数 $f(r) \in L_r^2[0,a]$,f(r) 可在此函数系下展开为 Fourier-Bessel 级数

$$
\begin{aligned}
f(r) &= \sum_{n=0 or 1}^{+\infty} C_n J_\nu(\omega_{kn} r) \\
C_n &= \frac{1}{N_{\nu kn}^2} \int_0^a r f(r) J_\nu(\omega_{kn} r) dr \\
N_{\nu kn}^2 &= \parallel J_\nu(\omega_{kn} r) \parallel^2 = \int_0^a r J_\nu^2(\omega_{kn} r) dr
\end{aligned}
$$

在 a 点附加三类不同边界条件可得

$$
\begin{cases}
N_{\nu 1n}^2 = \frac{a^2}{2} J_{\nu+1}^2(\omega_{1n} a) \\
N_{\nu 2n}^2 = \frac{1}{2}(a^2 - \frac{\nu^2}{w_{2n}^2}) J_\nu^2(w_{2n} a) \\
N_{\nu 3n}^2 = \frac{1}{2}(a^2 - \frac{\nu^2}{\omega_{3n}^2} + \frac{a^2\alpha^2}{\beta^2\omega_{3n}^2}) J_\nu^2(\omega_{3n} a)
\end{cases}
$$

边界条件：$\alpha u + \beta \frac{u}{n} = \varphi(x,y,z)$; 第一类边界条件 $\alpha \neq 0, \beta = 0$, 第二类边界条件 $\alpha = 0, \beta \neq 0$, 第三类边界条件 $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$

特别地

$$
1 - x^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n J_0(\omega_n x) \Rightarrow C_n = \frac{8}{\omega_n^3 J_1(\omega_n)}
$$

3. 虚变量的 Bessel 方程

$x^2 y'' + x t' - (x^2 + \nu^2) y = 0, (\nu \geqslant 0)$, 令 $\xi = ix$ 则化为 ν 阶 Bessel 方程

$$
\begin{aligned}
\xi^2 \frac{d^2 y}{d\xi^2} + \xi \frac{dy}{d\xi} + (\xi^2 - \nu^2) y = 0 \\
\Rightarrow y(x) = C J_\nu(ix) + D J_\nu(ix)
\end{aligned}
$$

引入实函数

$$
\begin{aligned}
I_\nu(x) &= e^(- i\frac{\nu\pi}{2}) J_\nu(ix) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!\Gamma(k+\nu+1)} (\frac{x}{2})^{2k+\nu} \\
K_\nu(x) &= \frac{\pi[-I_\nu(x) + I_{-\nu}(x)]}{2\sin\nu\pi} (\nu \neq n), K_n(x) = \lim_{\nu \to n} K_\nu(x) (n \in Z)
\end{aligned}
$$

$I_\nu(x)$ $K_\nu(x)$ 仍为 ν 虚变量 Bessel 方程的解，分别称为 ν 阶虚变量 Bessel 函数

$$
\Rightarrow y(x) = A I_\nu(x) + B K_\nu(x)
$$

4. 球 Bessel 方程与球 Bessel 函数

球 Bessel 方程为 $x^2 y'' + 2xy' + [x^2 - l(l+1)] y = 0$，令 $z(x) = \sqrt{x} y(x)$

球 Bessel 方程化为 $l + 1/2$ 阶 Bessel 方程

$$
x^2 z'' + x z' + [x^2 - (l + \frac{1}{2})^2] z = 0
$$

$$
\Rightarrow y(x) = \frac{C}{\sqrt{x}} J_{l+\frac{1}{2}}(x) + \frac{D}{\sqrt{x}} N_{l+\frac{1}{2}}(x)
$$

chap 4. **积分变换方法**

一.Fourier 变换

1. 定义：

$$F(\lambda) = \mathcal{F}[f(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\lambda x}dx$$
$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda$$

2. 性质:

$$\mathcal{F}[c_1f_1(x) + c_2f_2(x)] = c_1\mathcal{F}[f_1(x)] + c_2\mathcal{F}[f_2(x)]$$
$$\mathcal{F}[f(x)e^{i\lambda_0 x}] = \mathcal{F}(\lambda - \lambda_0)$$
$$\mathcal{F}[f^n(x)] = (i\lambda)^n\mathcal{F}(\lambda)$$
$$\mathcal{F}[f(x) * g(x)] = \mathcal{F}(\lambda)G(\lambda)$$
$$\mathcal{F}[\int_{-\infty}^{x} f(\xi)d\xi] = \frac{1}{i\lambda}F(\lambda)$$

3. 高维 Fourier 变换

$$F(\lambda,\mu,\nu) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} f(x,y,z)e^{-i(\lambda x+\mu y+\nu z)}dxdydz$$
$$f(x,y,z) = \frac{1}{(2\pi)^3}\iiint_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda,\mu,\nu)e^{i(\lambda x+\mu y+\nu z)}d\lambda, d\mu d\nu$$
$$especially\ \mathcal{F}[\Delta_3 u] = -(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)\bar{u}$$

4.Fourier 变换求解步骤

(1) 找出 Fourier 变换的自变量 (作用于全局上), 设立像函数

(2) 对原定解问题进行 Fourier 变换，求出像函数满足的定解问题

(3) 求解像函数

(4) 反变换

5. 正弦余弦变换设 f(x) 是定义在 $[0,+\infty)$ 上的函数

(1). 正弦变换及反变换

$$\overline{f}_s(\lambda) = \int_0^{+\infty} f(x)\sin\lambda x dx$$
$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \overline{f}_s(\lambda)\sin\lambda x d\lambda$$

(2). 余弦变换及反变换

$$\overline{f}_c(\lambda) = \int_0^{+\infty} f(x)\cos\lambda x dx$$
$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \overline{f}_c(\lambda)\cos\lambda x d\lambda$$

6. 常用 Fourier 反变换相关

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2x}\cos bx dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{b^2}{4a}}$$
$$e^{-x^2} * \frac{1}{4\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{16t}} = e^{-\frac{x^2}{1+16t}}\frac{1}{\sqrt{1+16t}}$$
$$\mathcal{F}^{-1}[\cos a\lambda^2 t] = \frac{1}{2\sqrt{2\pi at}}(\cos\frac{x^2}{4at}+\sin\frac{x^2}{4at})$$
$$\mathcal{F}^{-1}[\sin a\lambda^2 t] = \frac{1}{2\sqrt{2\pi at}}(\cos\frac{x^2}{4at}-\sin\frac{x^2}{4at})$$

二.Laplace 变换

1. 定义：

$$F(p) = L[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt, p\in\mathbb{C}$$

2. 性质

$$L[\alpha f(t)+\beta g(t)] = \alpha L[f(t)]+\beta L[g(t)]$$
$$L[e^{\lambda t}f(t)] = F(p-\lambda)$$
$$L[f(\alpha t)] = \frac{1}{\alpha}F(\frac{p}{\alpha})$$
$$L[f^{(n)}(t)] = p^nF(p)-p^{n-1}f(0^+)-p^{n-2}f'(0^+)-\cdots-f^{n-1}(0^+)$$
$$L[t^nf(t)] = (-1)^nF^{(n)}(p)$$
$$L[\int_0^t f(\xi)d\xi] = \frac{F(p)}{p}$$
$$L[f(t)*g(t)] = F(p)G(p), L^{-1}[F(p)G(p)] = f(t)*g(t)$$
$$L[f(t-\tau)] = e^{-p\tau}F(p), (t\geq\tau)$$
$$L[\frac{f(t)}{t}] = \int_p^{+\infty} F(p)$$
$$f(t+T) = f(t), L[f(t)] = \frac{1}{1-e^{pT}}\int_0^T f(t)e^{-pt}dt$$

3. 常用结果

$$f(t) = L^{-1}[F(p)] = \sum_{k=1}^n Res[F(p)e^{pt}, p_k], (\lim_{p\to\infty}F(p)=0)$$

$$L[1] = \frac{1}{p} \quad L[\frac{t^n}{n!}] = \frac{1}{p^{n+1}}, (n=0,1,2\dots) \quad L[\frac{t^\alpha}{p(\alpha+1)}] = \frac{1}{p^{\alpha+1}}, (\alpha>-1) \quad L[e^{at}] = \frac{1}{p-a}$$
$$L[\cos\omega t] = \frac{p}{p^2+\omega^2} \quad L[\sin\omega t] = \frac{\omega}{p^2+w^2} \quad L[\sinh\omega t] = \frac{\omega}{p^2-\omega^2} \quad L[\cosh\omega t] = \frac{p}{p^2-\omega^2}$$
$$L[\frac{e^{bt}-e^{at}}{t}] = \ln\frac{p-a}{p-b}$$

chap 5. **基本解方法**

一.δ 函数

1. 定义：δ 函数为满足以下两个条件的函数

$$\delta(x)=\begin{cases}+\infty, x=0\\ 0, x\neq 0\end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)dx=1$$

2. 性质

(1) 筛选性

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\varphi(x)dx=\varphi(0)$$

$$\int_a^b\delta(x-\xi)\varphi(x)dx=\begin{cases}\varphi(\xi), \xi\in[a,b]\\ 0, \xi\notin[a,b]\end{cases}\qquad\forall\varphi(x)\in C(R)$$

(2) 对称性:$\delta(x)=\delta(-x)$

(3) 卷积性质：$\delta(x)*\varphi(x)=\varphi(x)*\delta(x)=\varphi(x)$

(4)Fourier 变换与反变换

$$F(\delta(x))=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)e^{-i\lambda x}dx=1$$

$$F^{-1}(1)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\lambda x}d\lambda=\delta(x)$$

(5)Fourier 展开: 当 $x,\xi\in(-l,l)$ 时，

$$\delta(x-\xi)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l})$$

$$with\quad\begin{cases}a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\delta(x-\xi)\cos\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{1}{l}\cos\frac{n\pi\xi}{l},(n=0,1,2,\cdots)\\ b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\delta(x-\xi)\sin\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{1}{l}\sin\frac{n\pi\xi}{l},(n=1,2,3,\cdots)\end{cases}$$

(6) 导数与原函数

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta'(x)\varphi(x)dx=-\varphi'(0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta^{(n)}(x)\varphi(x)dx=(-1)^n\varphi^{(n)}(0)$$

分别要求 $\varphi(x)\in C^1(R),\varphi(x)\in C^n(R)$

$$H(x)=\begin{cases}0, x<0\\ 1, x\geqslant 0\end{cases}\quad\Rightarrow H'(x)=\delta(x)$$

3.Fourier 变换中包含 $\delta(x)$ 的常用函数

$$F[e^{iax}]=2\pi\delta(\lambda-a)$$

$$F[\cos ax]=\pi\big(\delta(\lambda-a)+\delta(\lambda+a)\big)$$

$$F[x]=2\pi i\delta'(\lambda)$$

4. 高维 Fourier 变换

(1) 定义：$\delta(x,y,z)=\delta(x)\delta(y)\delta(z)$

(2) 性质

$$\delta(x,y,z)=\begin{cases}+\infty,(x,y,z)=(0,0,0)\\0,else\end{cases}$$

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty}\delta(x,y,z)dxdydz=1$$

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-\xi,y-\eta,z-\varsigma)f(x,y,z)dxdydz=f(\xi,\eta,\varsigma)$$

$$\iiint_V\delta(M-M_0)f(M)dM=\begin{cases}f(M_0),M\in V\\0,else\end{cases}$$

二. 基本解

设 L 是自变量 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的线性偏微分算子，则非齐次方程 $Lu=f(M)$ 的基本解为 $LU=\delta(M)$，其中 $M=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in R^n$

1. 定理：如果 $U(M)$ 是基本解方程 $LU=\delta(M)$ 的解，则 $u(M)=U(M)*f(M)$ 为原方程的解

2. 常用基本解

(1)$\Delta_3U=\delta(x,y,z)$ 有中心对称形式解

$$U=-\frac{1}{4\pi r},r=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \tag{5.1}$$

(2)$\Delta_2U=\delta(x,y)$ 有中心对称形式解

$$U=-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r},r=\sqrt{x^2+y^2} \tag{5.2}$$

3.Green 第二公式

$$3D:\iint_S\Big(u\frac{\partial v}{\partial\vec{n}}-v\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}\Big)dS=\iiint_V(u\Delta_3v-v\Delta_3u)dV$$
$$2D:\int_l\Big(u\frac{\partial v}{\partial\vec{n}}-v\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}\Big)dl=\iint_D(u\Delta_2v-v\Delta_2u)dS$$

三. 边值问题的格林函数法

1. 引理：格林函数具有对称性 (倒易性)$G(M_1,M_2)=G(M_2,M_1),(M_i)=(\xi_i,\eta_i,\zeta_i,i=1,2,3)$

2. 电像法

(1) 边界为平面：像电荷正负与原电荷相反，位置关于平面 (边界) 作对称即可

(2) 边界为球面：设球面半径为 R，原电荷到球心距离为 ρ,(r<R), 则像电荷为 $(-\frac{R}{\rho}q,\frac{R^2}{\rho})$

3. 三维泊松方程第一类边值问题

$$\begin{cases}\Delta_3u=-f(x,y,z),((x,y,z)\in V)\\u|_{\partial V}=\varphi(x,y,z)\end{cases} \tag{5.3}$$

此边值问题对应格林函数

$$\begin{cases}\Delta_3G=-\delta(x-\xi,y-\eta,z-\zeta),((x,y,z),(\xi,\eta,\zeta)\in V)\\G|_{\partial V=0}\end{cases} \tag{5.4}$$

若 $f(M),\varphi(M)$ 都为连续函数，而 $G(M,M_0)$ 是边值问题 (5.4) 解得的格林函数，则 (5.3) 的基本解为

$$u(M)=\iiint_V f(M_0)G(M,M_0)dM_0-\iint_{\partial V}\varphi(M_0)\frac{\partial G}{\partial\vec{n}_0}(M,M_0)dS_0 \tag{5.5}$$

其中 $\vec{n}_0$ 为几何体 V 在边界的外法向量 (用 ξ,η,ζ 表示)

四. 初值问题的基本解法

1.$u_t=Lu$ 型方程初值问题

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t}=Lu+f(t,M),(t>0,M\in R^n,n=1,2,3)\\ u|_{t=0}=\varphi(M)\end{cases} \tag{5.6}$$

对应的基本解问题为

$$\begin{cases}\frac{\partial U}{\partial t}=LU,(t>0,M\in R^n,n=1,2,3)\\ U|_{t=0}=\delta(M)\end{cases} \tag{5.7}$$

则 (5.6) 的基本解为

$$u(t,M)=U(t,M)*\varphi(M)+\int_0^t U(t-\tau,M)*f(\tau,M)d\tau \tag{5.8}$$

2.$u_{tt}=Lu$ 型方程初值问题

$$\begin{cases}u_{tt}=LU+f(t,M),(t>0,M\in R^n,n=1,2,3)\\ u|_{t=0}=\varphi(M),u_t|_{t=0}=\psi(M)\end{cases} \tag{5.9}$$

对应的基本解问题为

$$\begin{cases}U_{tt}=LU,(t>0,M\in R^n,n=1,2,3)\\ U|_{t=0}=0,U_t|_{t=0}=\delta(M)\end{cases} \tag{5.10}$$

则 (5.9) 的基本解为

$$u(t,M)=U(t,M)*\psi(M)+\frac{\partial}{\partial t}\Big[U(t,M)*\varphi(M)\Big]+\int_0^t U(t-\tau,M)*f(\tau,M)d\tau \tag{5.11}$$

特别地

$$\begin{cases}u_{tt}=a^2\Delta_3 u,(t>0,-\infty<x,y,z+\infty)\\ u|_{t=0}=\varphi(x,y,z),u_t|_{t=0}=\psi(x,y,z)\end{cases}$$

$$\Rightarrow U=\frac{\delta(r-at)}{4\pi ar},r=\sqrt{x^2+y^2+x^2} \tag{5.12}$$

$$\Rightarrow u=\frac{1}{4\pi a^2t}\iint_{S_{at}}\psi(\xi,\eta,\zeta)dS+\frac{\partial}{\partial t}\Big[\frac{1}{4\pi a^2t}\iint_{S_{at}}\varphi(\xi,\eta,\zeta)dS\Big] \tag{5.13}$$

$$\begin{cases}u_{tt}=a^2\Delta_2 u,(t>0,-\infty<x,y,z+\infty)\\ u|_{t=0}=\varphi(x,y,z),u_t|_{t=0}=\psi(x,y,z)\end{cases}$$

$$\Rightarrow u=\frac{1}{2\pi a}\iint_{D_{at}}\frac{\psi(\xi,\eta)d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}+\frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\iint_{D_{at}}\frac{\varphi(\xi,\eta)d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}} \tag{5.14}$$