数分第四至七章复习提纲及例题

说明:

1、本提纲不是划定考试范围（也不会给大家划定范围）. 提纲中没有提到的地方并不表示考试不会涉及.

2、所举例题不一定具有代表性, 更不是考试的模拟试题.

3、希望同学们学会总结,在总结中提高. 充分理解概念和含义,关注不同内容的关联性,掌握分析、证明、推导和计算.

积分的复习要点

一、原函数

1、**定义**: $F(x)$ 称为给定的函数 $f(x)$ 的原函数, 如果

$$F'(x) = f(x), \quad \text{或} \quad \mathrm{d}F(x) = f(x)\,\mathrm{d}x$$

2、**方法**: 换元法和分部积分法. 虽然有些函数存在原函数, 但未必能够把原函数表示成初等函数. 但是对于有理式、三角有理式等类型, 通过换元或分部积分, 是一定能够将原函数表示成初等函数的.

注意: 积分方法要灵活掌握, 不必死记硬背.

二、定积分

1、**定义**: 对任意分割

$$T : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

以及任意分割点 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, 如下列极限存在则可积

$$\lim_{|T|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

如果已知函数可积, 可对特殊分割和取特殊分割点, 从Riemann 和的极限计算积分.

2、**定积的几何意义** : 区间 $[a, b]$ 上被积函数 $f(x)$ “覆盖”下的面积.

3、**性质**: 被积函数的可加性、积分区间的可加性、保序性、绝对值的积分、积分中值定理（包括广义积分中值定理）.

4、**可积函数的基本理论**: $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 当且仅当

$$\lim_{|T|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i = 0.$$

这里 ω_i 是函数 $f(x)$ 在小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的振幅.

而一般来说, 函数在区间上的振幅可由

$$\omega = \sup\{|f(x) - f(y)| \mid x, y \in [a, b]\}.$$

给出.

由此推出以下三类函数一定是可积的: 连续函数、有有限个间断点的函数、区间 $[a, b]$ 上单调函数.

注意: 连续、有有限间断点、单调是函数可积的必要条件.

4、**变上限积分**: 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 则

$$\varphi(x) = \int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x$$

定义了$[a, b]$ 上一个函数. $\varphi(x)$ 有下列性质:

$f(x)$ 可积 $\Longrightarrow \varphi(x)$ 连续.

$f(x)$ 连续 $\Longrightarrow \varphi(x)$ 可导, 且 $\varphi'(x) = f(x)$.

因此连续函数 $f(x)$ 的变上限积分给出 $f(x)$ 的一个原函数, 从而证明了连续函数必有原函数, (注意这是必要条件, 也就是说有原函数的 $f(x)$, 未必一定连续).

变上限积分是一个函数. 对它的求导(包括复合函数求导)如下:

$$\varphi(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^{b(x)} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi(b(x)) = \varphi'(x)b'(x) = f(b(x))b'(x)$$

5、Newton-Leibniz **公式**

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

其中$F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数: $\mathrm{d}F(x) = f(x)\,\mathrm{d}x$, 或 $F'(x) = f(x)$.

6、**方法**: **换元、分部、 Newton-Leibniz 公式、利用奇偶性等对称性、利用被积函数可加性、积分区间可加性、还可以将被积函数进行展开.**

7、**两个重要公式**:

广义积分中值定理: 函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$上连续, $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积且不变号, 则存在 $\xi \in [a, b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Cauchy-Schwarz **不等式**:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\,dx \int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

三、积分的应用:

弧长

$$\mathrm{d}s = \sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x, \quad \text{或} \quad \mathrm{d}s = \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,\mathrm{d}t.$$

旋转体体积:

$$\mathrm{d}V = \pi f^2(x)\,\mathrm{d}x = \pi y^2(t)x'(t)\,\mathrm{d}t.$$

旋转体侧面积:

$$\mathrm{d}S = 2\pi f(x)\,\mathrm{d}s = 2\pi f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x = 2\pi y(t)\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,\mathrm{d}t$$

方程的复习要点

一、一般概念:通解、特解、全部解;

二、方法:分离变量法、降阶法、常数变易法(一阶或二阶线性方程)、待定系数法、幂级数解法、观察法 .

三、二阶线性方程:

1、**对解的存在唯一性的理解**

2、**齐次方程的基本解组** 特别是常系数二阶线性方程的基本解组.

3、**非齐次二阶线性方程的特解和通解**:通解=特解+齐次方程基本解组的线性组合.

级数的复习要点

一、一般概念:级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛 $\Longleftrightarrow$ 部分和 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ 收敛.

1、Cauchy **收敛准则** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛 $\Longleftrightarrow$

任给 $\varepsilon > 0$, 存在 N, 使得

$$|a_{n+1} + \cdots + a +_{n+p}| < \varepsilon,$$

对任意 $n > N$ 和任意 p 成立.

2、**收敛的必要条件**: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛 $\Longrightarrow$ $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$

二、正项级数:

1、**基本特点**: **正项级数收敛 $\Longleftrightarrow$ 部分和单调增有界**.

2、**判别法**: 比较判别法(比较通项无穷小的阶)、d'Alembert 判别法、Cauchy 判别法和 Cauchy 积分判别法.

3、**交错级数**: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ $(a_n \geq 0)$: a_n 单调减趋于零, 则级数收敛.

4、**一般级数**:

绝对收敛和条件收敛: 一般级数取绝对值后就是正项级数, 因此利用正项级数判别法可判别绝对收敛性. 绝对值收敛的级数本身一定也收敛.

但是条件收敛是指: 本身收敛, 但是取绝对之后发散. 例子:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \ (\alpha > 0); \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n}$$

对于前者是交错级数, 当 $\alpha > 1$, 绝对收敛; 当 $0 < \alpha \leq 1$, 条件收敛.

对于后者用 Dirichlet 判别法判别其收敛性, 用反证法证明其不是绝对收敛, 因此条件收敛.

一般级数的Dirichlet 判别法和Abel 判别法.

级数乘法(Cauchy乘法).

三、级数与广义积分(无穷区间)之间的关系:

1、**级数的Cauchy积分判别法**: 该方法实际上是一个充分必要条件, 也可以利用正项级数的收敛性, 判别广义积分的收敛性.

2、**非负函数的广义积分与正项级数有不少可比性**. 例如

正项级数: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛 $\Longleftrightarrow$ 部分和单调增有上界.

非负函数的广义积分: $\int\limits_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ $(f(x) \leq 0)$ 收敛 $\Longleftrightarrow$ $\int\limits_a^{x} f(u)\,\mathrm{d}u$ 对 x 单调增有上界.

四、函数项级数的逐点收敛和一致收敛:

1、**逐点收敛**: 对 $x \in I$, 若对任意的 $\varepsilon > 0$, 都存在 $N > 0$, 使得

$$|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon \ \ (S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x))$$

成立, 则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u(x)$ 在 I 上逐点收敛于 $S(x)$.

2、**一致收敛**：对任意的 $\varepsilon > 0$, 都存在 $N > 0$, 使得

$$|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon \quad (S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x))$$

对任意的 $x \in I$ 成立, 则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u(x)$ 在 I 上一致收敛于 $S(x)$. 一致收敛就是对定义域内任何一点级数的收敛速度是一致的.

一致收敛的定义等价于

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I}\{|S_n(x) - S(x)|\} = 0.$$

Cauchy **收敛准则** 级数一致收敛当且仅当

$$\sup_{x\in I} |u_{n+1}(x) + \cdots u_{n+p}(x)| < \varepsilon$$

对任何 p 成立.

一致收敛的必要条件：

$$\sup_{x\in I} |u_n(x)| \to 0$$

一致收敛判别法：Weierstrass, Dirichlet, Abel 判别法.

3、**一致收敛级数的性质**：连续、可积（逐项积分）、可导（逐项求导）、内闭一致性.

五、幂级数: **一种特殊的函数项级数**：

1、**收敛区域**：收敛半径以内以及可能的端点.

2、**收敛的性质**：主要是一致收敛的特殊性质.

3、**函数的**Taylor**展开以及求出幂级数的和函数** 注意点：在哪里展开, 展开后在什么区域相等, 如何利用幂级数的性质, 在收敛区域范围内求出和函数.

六、Stirling **公式**：记住结果.

例题

1. 计算 $I = \displaystyle\int \frac{\sin x \,\mathrm{d}x}{2\sin x + 3\cos x}$

解 令 $J = \displaystyle\int \frac{\cos x \,\mathrm{d}x}{2\sin x + 3\cos x}$, 则

$$2I + 3J = \int \mathrm{d}x = x + C$$

$$-3I + 2J = \int \frac{(-3\sin x + 2\cos x)\,\mathrm{d}x}{2\sin x + 3\cos x} = \ln|2\sin x + 3\cos x| + C$$

从上述方程中解出 I:

$$I=\frac{1}{13}\left(2x-3\ln|2\sin x+3\cos x|\right)+C$$

2. 计算下列积分（2001年研究生考试题）

$$\int_{-\frac{n\pi}{2}}^{\frac{n\pi}{2}}\left(x^3+\sin^2 x\right)\cos^2 x\,\mathrm{d}x$$

解 因为 $x^3\cos^2 x$ 是积分区域上奇函数, $\sin^2 x\cos^2 x=\frac{1}{8}(1-\cos 4x)$ 是周期为 $\frac{\pi}{2}$ 的偶函数, 所以

$$\int_{-\frac{n\pi}{2}}^{\frac{n\pi}{2}}\left(x^3+\sin^2 x\right)\cos^2 x\,\mathrm{d}x=\int_{-\frac{n\pi}{2}}^{\frac{n\pi}{2}}\frac{1}{8}(1-\cos 4x)\,\mathrm{d}x=\frac{n\pi}{8}.$$

3. 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln\left(1^{2020}+2^{2020}+\cdots+n^{2020}\right)}$$

解

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln\left(1^{2020}+2^{2020}+\cdots+n^{2020}\right)}\\
=&\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{2020\ln n+\ln\left(\left(\frac{1}{n}\right)^{2020}+\left(\frac{2}{n}\right)^{2020}+\cdots+1\right)}\\
=&\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{2021\ln n+\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{2020}\right)}
\end{aligned}$$

其中

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{2020}\to\int_0^1 x^{2020}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2021}$$

有界,所以原式的极限为 $\frac{1}{2021}$.

4. 设 $f(x)=\int\limits_{x}^{x^2}|\sin t|\,\mathrm{d}t$, 求 $f'(x)$.

解

$$f'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_0^{x^2}|\sin t|\,\mathrm{d}t\right)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_0^{x}|\sin t|\,\mathrm{d}t\right)=2x|\sin x^2|-|\sin x|$$

5. 证明

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\sin x)\,\mathrm{d}x \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\cos x)\,\mathrm{d}x.$$

证明 在 $[0,\pi/2]$ 中, 有$\sin x \le x$, $\cos x \ge 1-\dfrac{1}{2}x^2$, 因此

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\sin x)\,\mathrm{d}x \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\mathrm{d}x. = 1,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\cos x)\,\mathrm{d}x \ge \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\frac{1}{2}\cos^2 x\right)\,\mathrm{d}x = \frac{3\pi}{8} > 1.$$

6. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续可微, $f(0)=0, f(1)=1$, 试证

$$\int_0^1 |f'(x)-f(x)|\,\mathrm{d}x \ge \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

证明 设 $F(x)=\mathrm{e}^{-x}f(x)$, 则 $F'(x)=\mathrm{e}^{-x}(f'(x)-f(x))$, 因此

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}(f'(x)-f(x))\,\mathrm{d}x = \int_0^1 F'(x)\,\mathrm{d}x = F(1)-F(0) = \frac{1}{\mathrm{e}},$$

在 $[0,1]$ 上, $|\mathrm{e}^{-x}(f'(x)-f(x))| \le |f'(x)-f(x)|$, 因此有

$$\frac{1}{\mathrm{e}} = \left|\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}(f'(x)-f(x))\,\mathrm{d}x\right| \le \int_0^1 |\mathrm{e}^{-x}(f'(x)-f(x))|\,\mathrm{d}x \le \int_0^1 |f'(x)-f(x)|\,\mathrm{d}x$$

7. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可导, 且 $f(a)=0$. 求证

$$\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b (f'(x))^2\,\mathrm{d}x.$$

证明 根据 Newton-Leibniz 公式, 有

$$f(x) = f(x)-f(a) = \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t, \quad x\in[a,b].$$

所以应用 Cauchy 积分不等式, 可得

$$\begin{aligned}|f(x)|^2 &= \left|\int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t\right|^2 \leqslant \int_a^x 1^2\,\mathrm{d}t \int_a^x |f'(t)|^2\,\mathrm{d}t \\ &= (x-a)\int_a^x |f'(t)|^2\,\mathrm{d}t \leqslant (x-a)\int_a^b |f'(t)|^2\,\mathrm{d}t \quad x\in[a,b].\end{aligned}$$

两边在 $[a,b]$ 上积分即得所证.

8. 设 $f \in C[a,b]$, $f \geq 0$, 证明

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b f^n(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} = M = \max\{f(x) \mid x \in [a,b]\}.$$

证明： 不妨设 $M > 0$, 对任意的 $0 < \varepsilon < M$, 存在 $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$, 使得

$$M - \varepsilon \leq f(x) \leq M, x \in [\alpha,\beta]$$

于是有

$$M\sqrt[n]{b-a} \geq \left(\int_a^b f^n(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} \geq \left(\int_\alpha^\beta f^n(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} \geq (M-\varepsilon)\sqrt[n]{\beta-\alpha}.$$

令 $n \to \infty$, 并借助 $\sqrt[n]{a} \to 1$, 得

$$M \geq \lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b f^n(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} \geq M - \varepsilon$$

对任何 $\varepsilon > 0$ 成立, 因此定理得证.

9. 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上非负连续函数. 若 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, 则 $f(x) \equiv 0$.

证明 （反证）若存在 $x_0 \in (a,b)$ (x_0 是端点的情况可类似讨论) 使得 $f(x_0) > 0$, 由于 $f(x)$ 连续, 所以存在 $\delta > 0$ 使得 $(x_0-\delta, x_0+\delta) \subset [a,b]$. 并且当 $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ 时, 有 $f(x) \geqslant \frac{f(x_0)}{2}$.

$$\begin{aligned}
0 = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^{x_0-\delta} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{x_0+\delta}^b f(x)\,\mathrm{d}x \\
&\geqslant \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{f(x_0)}{2}\,\mathrm{d}x \\
&= \delta f(x_0) > 0.
\end{aligned}$$

这与条件矛盾. 因此 $f(x) \equiv 0$.

10. 证明 $\dfrac{1}{2n+2} < \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\,\mathrm{d}x < \dfrac{1}{2n}$ $(n = 1, 2, \cdots)$.

证明 令 $u = \tan x$, 所以

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{u^n}{1+u^2}\,\mathrm{d}u.$$

对于 $0 < u < 1$, 有不等式:

$$\frac{u^n}{2} < \frac{u^n}{1+u^2} < \frac{u^n}{2u} = \frac{u^{n-1}}{2},$$

因此对不等式积分得

$$\frac{1}{2n+2} < \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \,\mathrm{d}x < \frac{1}{2n}.$$

由上述不等式推出:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \,\mathrm{d}x = 0,$$

如果只证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \,\mathrm{d}x = 0$, 还可以有如下方法

当 $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$ 时, $0 \le \tan x \le 1$ 单调增函数, 推出 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \,\mathrm{d}x$ 是单调减正项数列.所以收敛. 记 $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = I \ge 0$ 对任意 $\varepsilon \in (0, \frac{\pi}{4})$ 有

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}-\varepsilon} \tan^n x \,\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{4}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \,\mathrm{d}x \\
&\le \frac{\pi}{4} \tan^n \left(\frac{\pi}{4} - \varepsilon\right) + \varepsilon \to 0 + \varepsilon \ (n \to \infty)
\end{aligned}$$

所以 $I \le \varepsilon$, 即 $I = 0$.

11. 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上单调递增的连续函数. 求证

$$\int_a^b x f(x)\, dx \geqslant \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x.$$

证明 将不等式两边相减并将上限换成变量 t, 令

$$F(t) = \int_a^t x f(x) \,\mathrm{d}x - \frac{a+t}{2} \int_a^t f(x) \,\mathrm{d}x.$$

$$\begin{aligned}
F'(t) &= t f(t) - \frac{1}{2} \int_a^t f(x) \,\mathrm{d}x - \frac{a+t}{2} f(t) \\
&= \frac{t-a}{2} f(t) - \frac{1}{2} \int_a^t f(x) \,\mathrm{d}x \\
&\geqslant \frac{t-a}{2} f(t) - \frac{1}{2}(t-a) f(t) = 0.
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow F(t)$ 在 $[a,b]$ 上单调递增. 因为 $F(a) = 0$, 所以 $F(b) \geqslant 0$.

12. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续, $1 \le f(x) \le 3$, 证明

$$1 \le \int_0^1 f(x) \,\mathrm{d}x \int_0^1 \frac{1}{f(x)} \,\mathrm{d}x \le \frac{4}{3}.$$

证明 首先, 利用 Cauchy-Schwarz 不等式得

$$1=\left(\int_0^1\sqrt{f(x)}\frac{1}{\sqrt{f(x)}}\,\mathrm{d}x\right)^2\le\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x.$$

另一方面考虑函数 $g(u)=\dfrac{u}{\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{3}}{u}$ 在区间 $[1,3]$ 上的最大值, 有

$$\max_{1\le u\le 3}\left(\frac{u}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}}{u}\right)=\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{4}{\sqrt{3}}$$

得

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x&=\int_0^1\frac{f(x)}{\sqrt{3}}\,\mathrm{d}x\int_0^1\frac{\sqrt{3}}{f(x)}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{4}\left(\int_0^1\frac{f(x)}{\sqrt{3}}\,\mathrm{d}x+\int_0^1\frac{\sqrt{3}}{f(x)}\,\mathrm{d}x\right)^2\\&\le\frac{1}{4}\left(\int_0^1\frac{4}{\sqrt{3}}\,\mathrm{d}x\right)^2=\frac{4}{3}.\end{aligned}$$

13. 求下列微分方程的通解

$$y''-3y'+2y=10\sin x$$

解 齐次方程 $y''-3y'+2y=0$ 的特征方程为 $\lambda^2-3\lambda+2=0$, 所以基本解组为 $\mathrm{e}^x,\mathrm{e}^{2x}$. 对非齐次的特解可作如下考虑: 因为非齐次项是$10\sin x$, 所以设方程的特解有如下形式

$$y(x)=a\sin x+b\cos x$$

其中 a,b 待定. 代入方程并比较 $\sin x$, $\cos x$ 的系数得

$$a+3b=10,\ b-3a=0$$

解得 $a=1,b=3$. 所以特解为 $\sin x+3\cos x$, 通解为

$$y(x)=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}+\sin x+3\cos x.$$

14. 设 $\{a_n\}$ 是正的递增数列. 求证: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right)$ 收敛的充分必要条件是 $\{a_n\}$ 有界.

证明

因为 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}-1\geq 0$, 所以级数是正项级数. 一方面:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{m}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n}&=\sum_{n=1}^{m}\int_{a_n}^{a_{n+1}}\frac{1}{a_n}\,\mathrm{d}x\geqslant\sum_{n=1}^{m}\int_{a_n}^{a_{n+1}}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\\&=\int_{a_1}^{a_{m+1}}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\ln a_{m+1}-\ln a_1.\end{aligned}$$

另一方面:

$$\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right)\leq\sum_{k=1}^{m}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_1}=\frac{a_{m+1}}{a_1}-1$$

由此推出对任意的 m 有

$$\frac{a_{m+1}}{a_1}-1\geq\sum_{n=1}^{m}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n}\geq\ln a_{m+1}-\ln a_1,$$

所以 $\{a_n\}$ 有界当且仅当级数部分和有界, 当且仅当级数收敛.

15. 设 $a_n=\int\limits_0^1 x^n\sin x\,\mathrm{d}x$. 证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 条件收敛.

证明 $a_n>0$, 且单调减. 且

$$a_n=\left|\int_0^1 x^n\sin x\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n+1}x^{n+1}\Big|_0^1=\frac{1}{n+1}\to 0.$$

所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛, 但是

$$|(-1)^n a_n|=a_n\geq\sin\frac{1}{2}\int_{1/2}^1 x^n\,\mathrm{d}x=\sin\frac{1}{2}\sum\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+1}\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

其中 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n+1}$ 发散, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n+1}\dfrac{1}{2^{n+1}}$ 收敛, 所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 条件收敛.

16. 设函数列 $\{f_n(x)\}$, $n=1,2,\cdots$ 在区间 $[0,1]$ 上由等式

$$f_0(x)=1,\quad f_n(x)=\sqrt{xf_{n-1}(x)}$$

定义, 证明当 $n\to\infty$ 时, 函数列在 $[0,1]$ 上一致收敛到一个连续函数.

证明 用归纳法, 可递推出:

$$f_n(x)=x^{1-1/2^n},\ x\in[0,1]$$

因此

$$f_n(x)-x=x^{1-1/2^n}-x\geq 0,\ x\in[0,1]$$

那么 $f_n(0)-0=f_n(1)-1=0$, 求导

$$f_n'(x)-1=\left(1-\frac{1}{2^n}\right)x^{-1/2^n}-1$$

解得最大值点为

$$a_n=\left(1-\frac{1}{2^n}\right)^{2^n}\in(0,1).$$

所以

$$0\le f_n(x)-x\le f_n(a_n)-a_n\le a_n^{-1/2^n}-1=\left(1-\frac{1}{2^n}\right)^{-1}-1\le 2\frac{1}{2^n}$$

对任意 $x\in[0,1]$ 成立, 所以 $f_n(x)$ 在$[0,1]$ 上一致收敛于 x.

17. 求$S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2^{n+1}}x^{2n}$ 的和函数 $S(x)$.

解 首先判断收敛半径. 由

$$\frac{2n+3}{2^{n+2}}\Big/\frac{2n+1}{2^{n+1}}=\frac{2n+3}{2(2n+1)}\to\frac{1}{2}$$

得级数在 $x^2<2$ 收敛, 即 $|x|<\sqrt{2}$ 收敛. 在端点 $x=\pm\sqrt{2}$ 发散, 所以收敛区域是 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$

$$\int_0^x S(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2^{n+1}}\int_0^x x^{2n}\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2^{n+1}}=\frac{x}{2-x^2}$$

$$\Longrightarrow S(x)=\frac{2+x^2}{(2-x^2)^2}\quad(|x|<\sqrt{2}).$$

18. 求 $f(x)=\cos x$ 在 $x=\frac{\pi}{4}$; $f(x)=\ln(1+x-2x^2)$ 在 $x=0$ 的展开并指出收敛区域

解

$$f(x)=\cos\left(\frac{\pi}{4}+x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\ln(1+x-2x^2)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}(x-2x^2)^{n+1}$$

其中 $-1<x-2x^2\le 1$, 分别解不等式. 由

$$x-2x^2\le 1\Longrightarrow 2x^2-x+1\ge 0$$

对任意 x 成立. 由

$$-1<x-2x^2\Longrightarrow 2x^2-x-1<0$$

解得 $-\frac{1}{2}<x<1$, 所以收敛区域为 $-\frac{1}{2}<x<1$.