

目 录

第一章 矢量力学	1
§ 1. 质点运动学.....	2
(1) 质点的速度和加速度 (2) 直角坐标系 (3) 平面极坐标系	
(4) 柱坐标系 (5) 球坐标系 (6) 自然“坐标系”	
§ 2. 质点动力学基本定律.....	14
§ 3. 非惯性参考系.....	17
§ 4. 质点动力学运动定理.....	22
(1) 动量定理 (2) 角动量定理 (3) 动能定理	
§ 5. 质点组动力学.....	24
(1) 两体问题 (2) 质点组运动定理 (3) 非惯性系 质心系	
§ 6. 变质量质点动力学.....	29
§ 7. 刚体的平移、定轴转动、平面平行运动.....	35
(1) 运动学 (2) 动力学	

分 析 力 学

第二章 达朗伯原理	52
§ 8. 约束.....	52
(1) 约束及其分类 (2) 约束力 (3) 约束使问题复杂	
§ 9. 自由度与广义坐标.....	60
§ 10. 虚功原理 达朗伯原理.....	64
(1) 虚位移 (2) 虚功原理 (3) 广义坐标下的虚功原理 (4)	
主动力全是保守力的情况 (5) 约束力的求解——拉格朗日乘子	
法 (6) 达朗伯原理	
第三章 拉格朗日动力学	80
§ 11. 拉格朗日方程.....	80

(1) 广义坐标的引入 (2) 拉格朗日方程 (3) 主动力全是保守力的情况 (4) 广义动量守恒原理 (5) 哈密顿函数守恒原理	
*§ 12. 非完整系的动力学	98
*§ 13. 拉格朗日动力学的推广	105
第四章 有心力 散射问题	110
§ 14. 动力学方程及其解算	110
§ 15. 平方反比引力	115
(1) 开普勒行星运动定律 (2) 平方反比引力作用下的运动 (3) 椭圆运动的能量 (4) 圆轨道的稳定性	
§ 16. 人造地球卫星	126
(1) 环绕卫星 (2) 同步卫星 (3) 轨道卫星的自动姿态稳定	
§ 17. 散射问题	136
(1) 平方反比斥力 (2) 散射	
第五章 微振动	144
§ 18. 两个自由度的振动	144
§ 19. 分子的振动	154
§ 20. 微振动的一般理论	160
(1) 拉格朗日函数 (2) 化平方和 (3) 直接求解 (4) 证明 $\lambda^2 < 0$ (5) 矩阵表述	
*§ 21. 非线性振动	171
*§ 22. 参数共振	175
第六章 刚体力学	180
§ 23. 刚体运动学	180
(1) 自由刚体的自由度 (2) 刚体的运动 (3) 刚体里各点的运动 (4) 基点的选取 (5) 角速度矢量 (6) 转动的矩阵表述 (7) 欧拉角	
§ 24. 刚体动力学	194
(1) 刚体的角动量和动能 (2) 惯量张量 惯量椭球 (3) 欧拉方程 (4) 拉格朗日方程 (5) 动能定理	
§ 25. 无外力矩的定点运动(欧拉-班锁情况)	211

(1) 对称刚体 (2) 非对称刚体 (3) 动平衡的稳定性	
§ 26. 对称重刚体的定点运动(拉格朗日-泊松情况).....	219
(1) 欧拉方程 (2) 拉格朗日方程 (3) 解算与阐释 (4) 简明的解释	
*§ 27. 带电的旋转物体在磁场中的旋进(拉莫尔旋进).....	226
第七章 哈密顿动力学	228
§ 28. 哈密顿正则方程	228
(1) 哈密顿正则方程 (2) 勒让德变换 (3) 守恒原理 (4) 例题	
*§ 29. 刘维定理.....	247
*§ 30. 位力定理	251
§ 31. 泊松括号	256
(1) 力学量的时间变化率 (2) 泊松括号 (3) 雅可俾恒等式 (4) 量子力学中的泊松括号	
第八章 力学变分原理	266
§ 32. 变分法初步	267
(1) 泛函 (2) 变分问题 (3) 欧拉方程 (4) 附加条件下的变分问题	
§ 33. 哈密顿原理	274
§ 34. 最小作用量原理	279
(1) 可遗坐标和哈密顿原理 (2) 雅可俾最小作用量原理	
第九章 正则变换 哈密顿-雅可俾方程	284
§ 35. 正则变换	284
(1) 正则变换的条件 (2) 母函数 (3) 正则变换举例 (4) 泊松括号的不变性 (5) 无限小正则变换	
§ 36. 哈密顿-雅可俾方程	297
(1) 哈密顿主函数 (2) 哈密顿特征函数 (3) 例题	
*§ 37. 作用量变数与角变数	305
*§ 38. 浸渐不变量	312
*§ 39. 正则微扰理论	314
*§ 40. 从“几何力学”到波动力学	317

(1) 从波动光学到几何光学 (2) 从“几何力学”到波动力学

连续介质力学

第十章 弹性体	326
§ 41. 张变(或长变).....	326
(1) 胡克定律 杨氏模量 (2) 泊松比 一般情况下的胡克定律	
(3) 体积的改变 容积弹性模量 (4) 弹性限度 极限强度	
§ 42. 切变(或剪变).....	332
(1) 切变 (2) 纯切变 (3) 切变模量与杨氏模量的关系 (4)	
切变弹性势能密度	
§ 43. 圆杆的扭转.....	337
§ 44. 杆的弯曲.....	341
(1) 单纯弯曲 (2) 关于截面的形状 (3) 带有切变的弯曲	
*§ 45. 胁变的一般分析.....	349
(1) 胁变张量 (2) 胁变主轴 (3) 体胀系数 (4) 相容条件	
*§ 46. 胁强的一般分析.....	357
(1) 胁强张量 (2) 胁强主轴 (3) 胁强与胁变之间的关系 (4)	
相容条件	
*§ 47. 弹性体静力学.....	363
*§ 48. 弹性体动力学.....	370
(1) 动力学基本方程 (2) 哈密顿原理 拉格朗日方程 (3) 弹性体中的波动	
第十一章 流体运动学	375
§ 49. 流体运动学的特点.....	375
(1) 着重研究速度场 (2) 迹线与流线 (3) 当地变化率与实体变化率	
*§ 50. 速度场的分析.....	380
(1) 速度场的一般分析 (2) 有旋流动与无旋流动 (3) 连续性方程	
第十二章 流体动力学	395

§ 51. 流体动力学的特点	395
§ 52. 流体静力学	397
(1) 流体的平衡方程 (2) 静止液体的自由表面 (3) 不可压缩 流体中的静压强分布 (4) 可压缩流体中的静压强分布	
§ 53. 理想流体稳恒流动的运动定理	402
(1) 动量定理 (2) 伯努利定理	
*§ 54. 无粘滞流体动力学	412
(1) 欧拉方程 (2) 欧拉方程的第一次积分 (3) 涡旋动力学 (4) 绕流对物体的作用力 (5) 欧拉方程的线性近似	
§ 55. 粘滞流体	419
(1) 粘滞系数 (2) 直圆管的流量公式 (3) 运动定理	
*§ 56. 粘滞流体动力学方程	426
(1) 纳维尔-斯托克斯方程 (2) 雷诺数 (3) 边界层 [附]球体 所受粘滞阻力	
附录	435
习题	435
答案	461

第一章 矢量力学

研究力学，很自然从矢量力学开始。这就是说：用位移、速度、动量、加速度等矢量来描述运动，用力矢量表征物体之间的相互作用，机械运动基本规律也表述为牛顿运动定律之类的矢量定律。当然，功、动能、势能这些重要的力学量并不是矢量，但它们与力矢量、位移矢量有着密不可分的联系。

在展开具体论述之前，先要谈谈方法论方面的问题。

(a) 区分主要因素与次要因素 任一物理现象总要牵涉到众多因素。我们必须把起决定性作用、主要作用、次要作用、微不足道作用的各种因素加以区分，否则即使对最简单的物理现象也不可能进行分析研究。针对某一特定问题所涉及的实际对象，应当只保留那些起决定性作用、主要作用的性质，必要时最多再考虑某些起次要作用的性质，坚决抛弃那些只起偶然作用或微不足道作用的因素，这样就把实际对象抽象为模型。例如，“质点”和“刚体”都是力学中常用的模型。

(b) 掌握与运用变量与常量之间的辩证关系 初等物理学一般只考虑常量，例如匀速、匀加速、常力。但在客观世界中经常出现变速、变加速、变力。因此，首先需要学会在小区间上把变量作为常量处理再令小区间 $\rightarrow 0$ 。具体说，就是用微分和积分处理变量。例如，对于 x 轴上的直线运动，

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \dot{x}, \quad a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \dot{v};$$
$$x = x_0 + \lim_{\Delta \tau \rightarrow 0} \sum v(\tau) d\tau = x_0 + \int v(\tau) d\tau,$$
$$v = v_0 + \lim_{\Delta \tau \rightarrow 0} \sum a(\tau) d\tau = v_0 + \int a(\tau) d\tau.$$

(c) 建立“代数式”思考方法 初等物理所研究的问题虽然计算有繁有简，但性质上都是比较单纯的。人们往往可以从已知数直接算出某个未知数，接着又可利用已求数依次推算出第二个、第三个未知数，如此等等，即沿着一条“链”推算下去。但是，在客观世界的绝大多数现象中，各种物理量之间往往交织为错综复杂的“网”，“链”式推算法难以奏效。因此，应当通过具体分析，把已知、未知的各物理量间的错综复杂关系尽可能如实地表为“代数”方程，例如动力学中的运动方程。当然，这些方程很可能是微分方程，并不真的是代数方程。

§ 1. 质点运动学

为描述物体的机械运动，首先要选定参考系，运动就是相对于参考系来描述的。

(1) 质点的速度和加速度

在参考系上选定一点作为原点，质点的位置可用从原点到质点的径矢 \mathbf{r} 表示，质点的运动则由径矢随时间 t 的变化 $\mathbf{r}(t)$ 描述。

在一段时间 $\Delta t = t_2 - t_1$ 上，质点径矢的改变 $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ 叫做质点的位移。径矢对时间的平均变化率 $\Delta \mathbf{r} / \Delta t$ 叫做这段时间内的平均速度。令 $\Delta t \rightarrow 0$ ，平均速度 $\Delta \mathbf{r} / \Delta t$ 的极限

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} \quad (1.1)$$

叫做质点在该时刻的（即时）速度 $\mathbf{v}(t)$ 。速度是矢量，它的大小 $= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} |\Delta \mathbf{r}| / \Delta t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta s / \Delta t = ds/dt$ 即速率 v ，它的指向就是 $\Delta \mathbf{r}$ 的极限指向即轨道的切向，以 \mathbf{t} 为切向单位矢量，则 $\mathbf{v} = vt$ 。

速度 $\mathbf{v}(t)$ 的时间变化率 $d\mathbf{v}/dt$ 即 $d^2\mathbf{r}/dt^2$ 叫做质点的（即

时)加速度 $a(t)$ 。作为速度的变化率,既要考虑速度大小的变化,也要考虑速度指向的变化。即

$$a = \frac{d}{dt} \cdot v = \frac{d}{dt} (vt) = \frac{dv}{dt} t + v \frac{dt}{dt}$$

这里还需要 dt/dt 的具体表达式。参看图 1-1,设在时刻 t ,质点经过点 A; 很短时间 Δt 之后,在时刻 $t + \Delta t$,质点经过点 B。在 A 和 B 分别作轨道的切向单位矢量 t 和 $t + \Delta t$,这两个矢量大小相等而指向不同。(为清晰起见, A 与 B 的间距在图中是极为夸大的了。事实上, A 与 B 很近, t 和 $t + \Delta t$ 的指向差异极小。)为便于思考起见,从

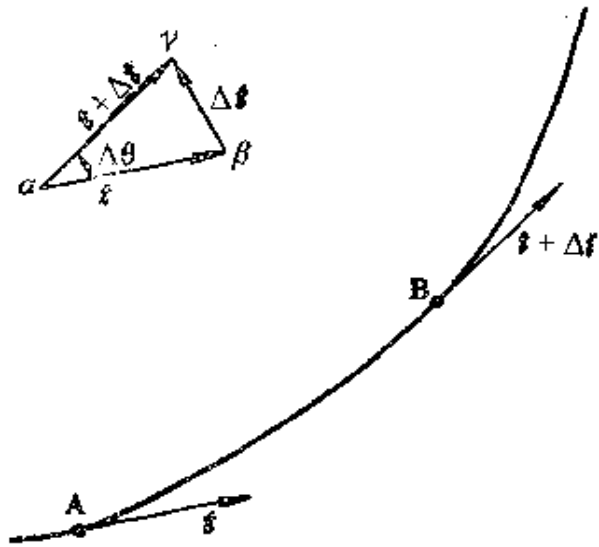


图 1-1

点 α 引矢量 $\vec{\alpha\beta}$ 与 $\vec{\alpha\gamma}$,前者等同于 t ,后者等同于 $t + \Delta t$,那么 $\vec{\beta\gamma}$ 就是 Δt 。容易看出,只要时间 Δt 很短,则 Δt 的大小几乎就等于 A 与 B 两点之间所夹的角 $\Delta\theta$,而指向则既垂直于 t 也垂直于 $t + \Delta t$,并指着轨道曲线的凹侧。把指着轨道曲线凹侧的法向单位矢量记作 n ,那么,当 $\Delta t \rightarrow 0$, $\Delta t \rightarrow \Delta\theta n$,从而 $dt/dt = \dot{\theta} n$ 。于是,质点的加速度

$$a = \frac{d}{dt} (vt) = \frac{dv}{dt} t + v \frac{dt}{dt} = \dot{v} t + v \dot{\theta} n. \quad (1.2)$$

这样,加速度的切向分量 a_t 为 \dot{v} 而法向分量 a_n 为 $v\dot{\theta}$ 。

法向加速度 $v\dot{\theta}$ 中的 $\dot{\theta}$ 计算起来不很方便,让我们把它改写成较为方便的形式,这是不难做到的:

$$a_n = v \frac{d\theta}{dt} = v \frac{d\theta}{ds} \frac{ds}{dt} = v^2 \frac{d\theta}{ds}$$

$d\theta/ds$ 是轨道曲线的一种几何性质, 即曲线上极为相近的两点的切向之间的夹角与两点之间距离的比, 亦即曲线在那里的弯曲程度, 通常称为**曲率**。曲率的倒数 $ds/d\theta$ 称为**曲率半径**, 兹记作 R 。这样

$$a_n = \frac{v^2}{R}. \quad (1.3)$$

以上矢量式适合于进行一般的理论探讨, 但在具体问题的计算中却以使用**坐标系**较为简便。

(2) 直角坐标系

古典力学认为空间是欧几里德的, 即平直而无弯曲的。在欧几里德空间中可以建立**直角坐标系**, 而任一矢量 \mathbf{A} 可用直角坐标分量表示为 $\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}$, 其中

$$\begin{cases} A_x = \mathbf{A} \cdot \mathbf{i} = A \cos \alpha, \\ A_y = \mathbf{A} \cdot \mathbf{j} = A \cos \beta, \\ A_z = \mathbf{A} \cdot \mathbf{k} = A \cos \gamma, \end{cases} \quad \begin{cases} A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}, \\ \cos \alpha = A_x/A, \\ \cos \beta = A_y/A, \\ \cos \gamma = A_z/A. \end{cases}$$

这样, 在直角坐标系中,

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad (1.4)$$

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}, \quad (1.5)$$

$$\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k}. \quad (1.6)$$

(3) 平面极坐标系

对于平面问题, 还可以建立**平面极坐标系**。任一矢量 \mathbf{A} 可用径向分量 A_ρ 与横向分量 A_ϕ 表示为 $\mathbf{A} = A_\rho \mathbf{i} + A_\phi \mathbf{j}$, 其中 \mathbf{i} 和 \mathbf{j} 分别是径向和横向单位矢量。注意 \mathbf{i} 和 \mathbf{j} 的指向随地点而异, 因而 $d\mathbf{i}/dt$ 和 $d\mathbf{j}/dt$ 一般并不等于零。

为了计算 $d\mathbf{i}/dt$, 作出对应于 t 和 $t + dt$ 两时刻的径向单

位矢量 $i, i + di$ (图 1-2), 这两个矢量的大小相同而指向不同。易见 di 的大小等于 $d\varphi$; 当 $dt \rightarrow 0$ 时, di 的指向趋于 j 的指向, 因而

$$\frac{di}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} j = \dot{\varphi} j.$$

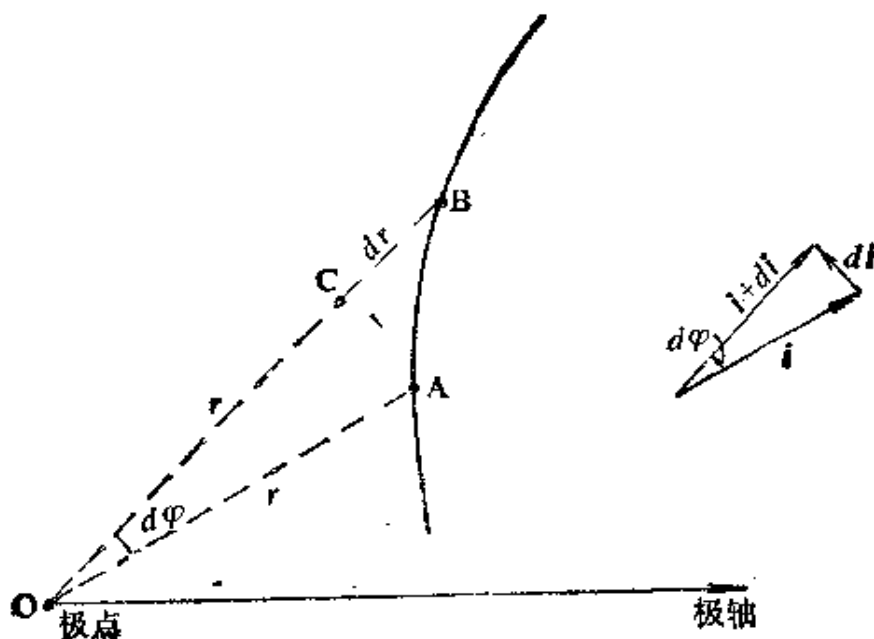


图 1-2

同理可以得出

$$\frac{dj}{dt} = -\frac{d\varphi}{dt} i = -\dot{\varphi} i.$$

这样, 在极坐标系中,

$$r = \rho i, \quad (1.7)$$

$$v = \dot{r} = \frac{d}{dt}(\rho i) = \dot{\rho} i + \rho \frac{di}{dt} = \dot{\rho} i + \rho \dot{\varphi} j, \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} a = \dot{v} &= \frac{d}{dt}(\dot{\rho} i + \rho \dot{\varphi} j) = \ddot{\rho} i + \dot{\rho} \frac{di}{dt} + \dot{\rho} \dot{\varphi} j + \rho \frac{d\dot{\varphi}}{dt} j \\ &+ \rho \dot{\varphi} \frac{dj}{dt} = \ddot{\rho} i + \dot{\rho} \dot{\varphi} j + \rho \ddot{\varphi} j + \rho \dot{\varphi} \dot{\varphi} (-i) \end{aligned}$$

$$+ v_{\varphi}(-\dot{\varphi}i) = (\dot{v}_{\rho} - v_{\varphi}\dot{\varphi})i + (\dot{v}_{\varphi} + v_{\rho}\dot{\varphi})j.$$

注意, 径向加速度 $\dot{v}_{\rho} - v_{\varphi}\dot{\varphi}$ 不仅来自径向速度的大小变化 (即 \dot{v}_{ρ}), 而且也来自横向速度的方向变化 (即 $-v_{\varphi}\dot{\varphi}$); 横向加速度不仅来自横向速度的大小变化 (即 \dot{v}_{φ}), 而且也来自径向速度的方向变化 (即 $v_{\rho}\dot{\varphi}$). 以 $v_{\rho} = \dot{\rho}$, $v_{\varphi} = \rho\dot{\varphi}$ 代入 a 的式子, 即得

$$a = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)i + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})j. \quad (1.9)$$

运用极坐标系描述质点的运动, 常常用到所谓掠面速度, 即质点的径矢所掠过的面积与所用时间之比的极限值. 参看图 1-2, 在 dt 时间里, 质点从 A 移到 B, 径矢掠过曲边三角形 OAB. 既然 dt 很小, 曲边三角形 OAB 的面积可以认为就等于直边三角形 $\triangle OAB$ 的面积

$$\Delta S = \triangle OAB = \triangle OAC + \triangle CAB$$

$$= \frac{1}{2}(\rho d\varphi)\rho + \frac{1}{2}(\rho d\varphi)d\rho.$$

第二项比起第一项为高阶微量, 不妨略去, 从而

$$\dot{S} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \frac{1}{2}(\rho d\varphi)\rho \right\} = \frac{1}{2}\rho^2\dot{\varphi}. \quad (1.10)$$

例 1 一行星绕太阳沿椭圆轨道运动, 其极坐标方程为 $\rho = p/(1 + e \cos \varphi)$, (其中 e 为离心率, p 是焦点参数), 且在运动过程中径矢 r 的掠面速度为常量. (注意: 这正符合开普勒关于行星运动的第一和第二定律, 两定律的文字表述见 § 15.) 求行星的加速度.

解 从题意知, 行星可看作质点, 它在作椭圆运动, 椭圆的焦点即在极坐标系的原点上.

质点的加速度表达式为

$$\begin{cases} a_{\rho} = \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2, & (1) \\ a_{\varphi} = \rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}, & (2) \end{cases}$$

而 a_{φ} 又可表示为 $a_{\varphi} = \frac{1}{\rho} \frac{d}{dt} (\rho^2\dot{\varphi})$.

因为径矢的掠面速度为常量 (记这常量为 $h/2$), 即

$$\dot{S} = \frac{1}{2} \rho^2 \dot{\varphi} = \frac{1}{2} h, \quad (3)$$

亦即 $\frac{d}{dt}(\rho^2 \dot{\varphi}) = \frac{d}{dt} h = 0,$

所以 $a_{\varphi} = 0$. 问题只剩下求 a_{ρ} .

由轨道方程 $\rho = p/(1 + e \cos \varphi)$ 得 $p/\rho = 1 + e \cos \varphi$. 将此式两边对时间求导, 得

$$-(p/\rho^2)\dot{\rho} = -e\dot{\varphi} \sin \varphi. \quad (4)$$

利用式(3)消去 $\dot{\varphi}$, 得

$$\dot{\rho} = (he/p) \sin \varphi, \quad (5)$$

再求导一次, 并再次利用式(3)消去 $\dot{\varphi}$, 有

$$\ddot{\rho} = \frac{he}{p} \dot{\varphi} \cos \varphi = \frac{h^2 e}{p \rho^2} \cos \varphi. \quad (6)$$

于是,
$$a_{\rho} = \ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2 = \frac{h^2 e}{p \rho^2} \cos \varphi - \frac{h^2}{\rho^3}. \quad (7)$$

以轨道方程代入式(7), 得

$$a_{\rho} = \frac{h^2}{p \rho^3} \left(\frac{p}{\rho} - 1 \right) - \frac{h^2}{\rho^3} = -\frac{h^2}{p} \frac{1}{\rho^2}. \quad (8)$$

由 $a_{\varphi} = 0$ 与式(8)可见, 质点的加速度指向椭圆焦点而大小反比于其与焦点距离的平方. 此质点所受的力, 当然也就是指向椭圆焦点而大小反比于其与焦点距离的平方.

本例从开普勒行星运动第一和第二定律出发, 证明了质点所受的力是平方反比引力. 本书中 § 15(1) 将补充指出, 考虑到开普勒行星运动第三定律 (此定律的文字表述见 § 15), 则可证明此引力又正比于行星的质量. 这就引出了万有引力定律.

(4) 柱坐标系

对于三维空间问题, 可以在平面极坐标系的基础上加一垂直于平面极坐标系所在平面的 z 轴, 构成柱坐标系 (图 1-3). 任一矢量 \mathbf{A} 可以表示为

$$\mathbf{A} = A_{\rho} \mathbf{i} + A_{\varphi} \mathbf{j} + A_z \mathbf{k},$$

其中 i 和 j 的意义跟平面极坐标中的相同, k 是 z 轴上的单位矢量, k 不同于 i 和 j , 它的指向不随地点而异。

这样, 在柱坐标系中, 质点的径矢、速度、加速度分别是:

$$\mathbf{r} = \rho \mathbf{i} + z \mathbf{k}, \quad (1.11)$$

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{\rho} \mathbf{i} + \rho \dot{\varphi} \mathbf{j} + \dot{z} \mathbf{k}, \quad (1.12)$$

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) \mathbf{i} + (\rho \ddot{\varphi} + 2\dot{\rho} \dot{\varphi}) \mathbf{j} + \ddot{z} \mathbf{k}. \quad (1.13)$$

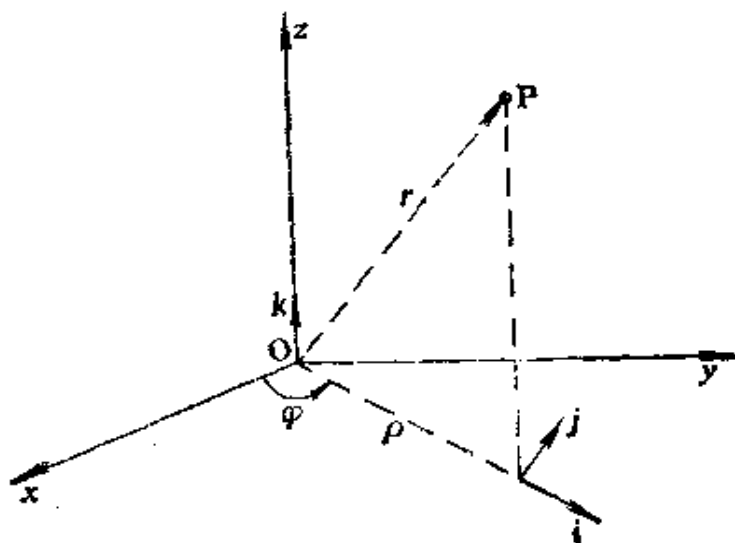


图 1-3

用分量形式, 则

$$v_{\rho} = \dot{\rho}, \quad v_{\varphi} = \rho \dot{\varphi}, \quad v_z = \dot{z}$$

$$a_{\rho} = \ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2, \quad a_{\varphi} = \rho \ddot{\varphi} + 2\dot{\rho} \dot{\varphi}, \quad a_z = \ddot{z}.$$

例 2 质点在一固定圆柱体上作螺旋运动, 已知它的直角坐标为 $x = R \sin \omega t$, $y = R \cos \omega t$, $z = ut$, 式中 R 、 ω 、 u 均为常数. 求它的轨道方程、速度和加速度(图 1-4).

解 1 应用前文所述的直角坐标系求解. 已知

$$\begin{cases} x = R \sin \omega t, & (1) \\ y = R \cos \omega t, & (2) \\ z = ut. & (3) \end{cases}$$

消去 t 得轨道方程

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2, & (4) \\ x = R \sin(\omega z/\mu). & (5) \end{cases}$$

轨道为圆柱面 ($x^2 + y^2 = R^2$) 与正弦柱面 [$x = R \sin(\omega z/\mu)$] 相交的螺旋线。

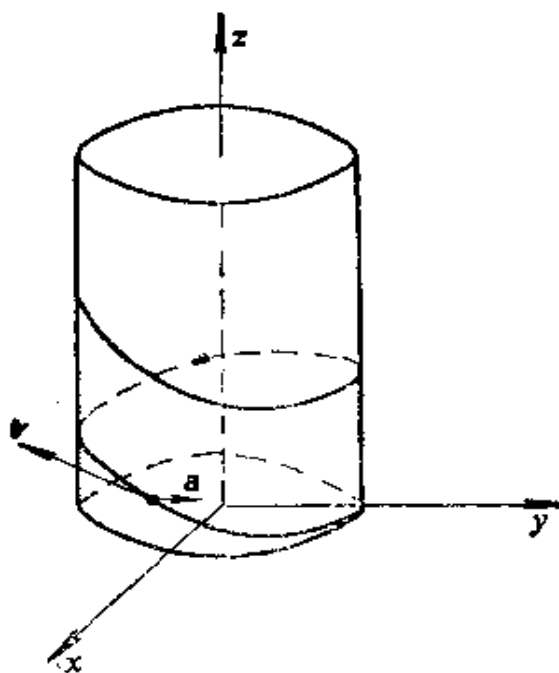


图 1-4

x 和 y 随时间变化的共同周期是 $T = 2\pi/\omega$, 这也就是质点绕圆柱一周所需时间, 而螺距为 $\mu T = 2\pi\mu/\omega$.

质点的速度

$$\boldsymbol{v} = \dot{x}\boldsymbol{i} + \dot{y}\boldsymbol{j} + \dot{z}\boldsymbol{k} = R\omega(\cos\omega t\boldsymbol{i} - \sin\omega t\boldsymbol{j}) + \mu\boldsymbol{k}, \quad (6)$$

速度的大小为常量 $v = \sqrt{R^2\omega^2 + \mu^2}$.

质点的加速度

$$\boldsymbol{a} = \ddot{x}\boldsymbol{i} + \ddot{y}\boldsymbol{j} + \ddot{z}\boldsymbol{k} = R\omega^2(-\sin\omega t\boldsymbol{i} - \cos\omega t\boldsymbol{j}), \quad (7)$$

加速度的大小 $a = R\omega^2$ 也为常量. 注意加速度矢量没有 z 分量, 它的方向平行于 xy 平面. 因 $\boldsymbol{a} = -\omega^2 x\boldsymbol{i} - \omega^2 y\boldsymbol{j} = -\omega^2(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j})$, 可见它指向 z 轴.

解 2 质点既然沿圆柱体运动, 改用柱坐标系表示. 应用直角坐标与柱坐标的变换公式

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, & (8) \\ y = \rho \sin \varphi, & (9) \\ z = z, & (10) \end{cases}$$

可以从式(1)、(2)、(3)得出

$$\begin{cases} \rho \cos \varphi = R \sin \omega t, \\ \rho \sin \varphi = R \cos \omega t, \\ z = ut, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} \rho = R, & (11) \\ \varphi = \frac{\pi}{2} - \omega t, & (12) \\ z = ut, & (13) \end{cases}$$

于是,质点的速度

$$v = \dot{\rho}i + \rho\dot{\varphi}j + \dot{z}k = -R\omega j + uk. \quad (14)$$

质点的加速度

$$a = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)i + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})j + \ddot{z}k = -R\omega^2 i. \quad (15)$$

比较两种坐标中质点速度及加速度的表达式,可以看到本题用柱坐标系表达较为简洁,物理图象也较清晰.

(5) 球 坐 标 系

在三维空间中取固定于参考系的一点O为原点,任一质点的球坐标以 $P(r, \theta, \varphi)$ 表示, r 为P点径矢的大小,它表示P和O之间的距离, θ 是OP与z轴之间的夹角, φ 是OP在Oxy平面上的投影OM与x轴的夹角(图1-5).

如把xy平面比作“赤道”平面,把z轴比作“极轴”,则 θ 的余角(即OP与OM之间的夹角)可以叫做“纬度”,而 θ 可叫做“余纬度”,至于 φ 可叫做“经度”.

在球坐标系中,规定三个单位矢量 r_0, θ_0, φ_0 , 其中 r_0 指向极径 r 增长的方向, θ_0 相切于过P点的经线而指向 θ 增长的方向, φ_0 相切于过P点的纬线而指向 φ 增长的方向(图1-6). 显然 r_0, θ_0, φ_0 的指向随地点而异,它们组成正交右旋基底矢量组.

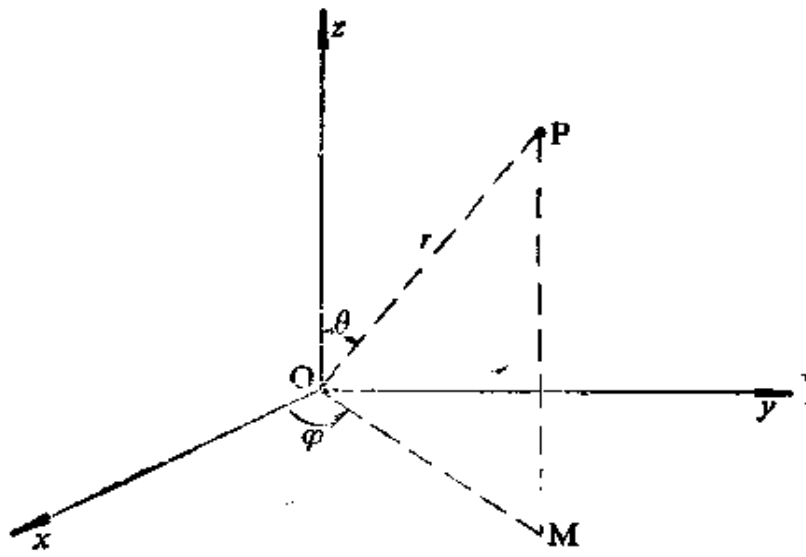


图 1-5

质点的径矢

$$\mathbf{r} = r\mathbf{r}_0, \quad (1.14)$$

速度 $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$, 加速度 $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}}$.

直接计算质点的速度和加速度在球坐标系中的分量, 这是比较麻烦的。下面变通一下, 通过球坐标系中的单位矢量与直角坐

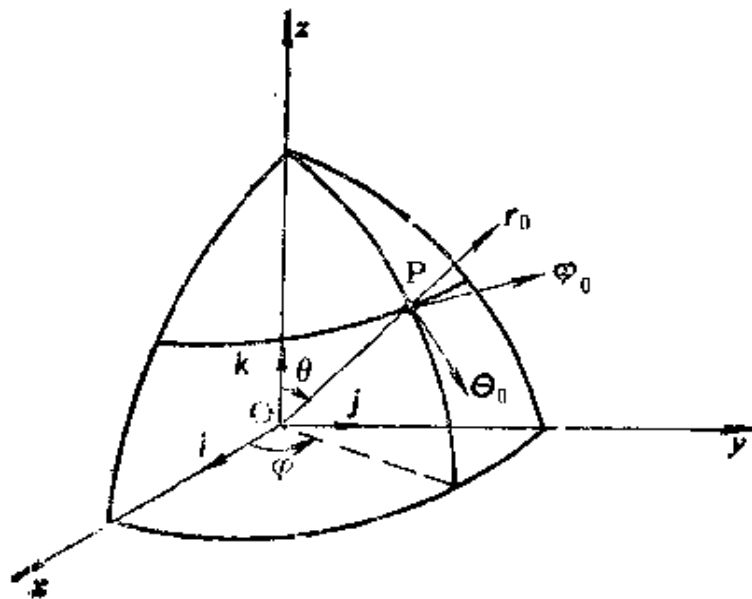


图 1-6

标系中单位矢量的变换关系先求出 r_0, θ_0 和 φ_0 的时间变化率, 然后再求速度及加速度的球坐标分量就较为方便了。

直角坐标和球坐标的变换关系为

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi, \\ y = r \sin \theta \sin \varphi, \\ z = r \cos \theta. \end{cases}$$

参看图 1-6, 可看出 r_0 在直角坐标系中的三个分量为 $\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta$; θ_0, φ_0 的分量也不难得出。因此单位矢量间的变换关系为

$$\begin{cases} r_0 = \sin \theta \cos \varphi i + \sin \theta \sin \varphi j + \cos \theta k, \\ \theta_0 = \cos \theta \cos \varphi i + \cos \theta \sin \varphi j - \sin \theta k, \\ \varphi_0 = -\sin \varphi i + \cos \varphi j. \end{cases} \quad (1.15)$$

把 r_0 的表达式对时间求导, 得

$$\begin{aligned} \frac{dr_0}{dt} &= (\dot{\theta} \cos \theta \cos \varphi - \dot{\varphi} \sin \theta \sin \varphi) i \\ &\quad + (\dot{\theta} \cos \theta \sin \varphi + \dot{\varphi} \sin \theta \cos \varphi) j - \dot{\theta} \sin \theta k \\ &= \dot{\theta} (\cos \theta \cos \varphi i + \cos \theta \sin \varphi j - \sin \theta k) \\ &\quad + \dot{\varphi} \sin \theta (-\sin \varphi i + \cos \varphi j) \\ &= \dot{\theta} \theta_0 + \dot{\varphi} \sin \theta \varphi_0. \end{aligned}$$

同理,

$$\begin{aligned} \frac{d\theta_0}{dt} &= -\dot{\theta} r_0 + \dot{\varphi} \cos \theta \varphi_0, \\ \frac{d\varphi_0}{dt} &= -\dot{\varphi} \sin \theta r_0 - \dot{\theta} \cos \theta \theta_0. \end{aligned}$$

由此可求出质点的速度

$$\begin{aligned} v = \dot{r} &= \frac{d}{dt} (r r_0) = \frac{dr}{dt} r_0 + r \frac{dr_0}{dt} \\ &= \dot{r} r_0 + r \dot{\theta} \theta_0 + r \dot{\varphi} \sin \theta \varphi_0. \end{aligned} \quad (1.16)$$

它的分量式为

$$\begin{cases} v_r = \dot{r}, \\ v_\theta = r\dot{\theta}, \\ v_\varphi = r\dot{\varphi} \sin \theta. \end{cases}$$

质点的加速度可以同样算出:

$$\begin{aligned} a = \dot{v} &= \frac{d}{dt} (\dot{r}r_0 + r\dot{\theta}\theta_0 + r\dot{\varphi} \sin \theta \varphi_0) \\ &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta)r_0 \\ &\quad + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta)\theta_0 \\ &\quad + (r\ddot{\varphi} \sin \theta + 2\dot{r}\dot{\varphi} \sin \theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi} \cos \theta)\varphi_0. \end{aligned} \quad (1.17)$$

其分量式为

$$\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta, \\ a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta, \\ a_\varphi = r\ddot{\varphi} \sin \theta + 2\dot{r}\dot{\varphi} \sin \theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi} \cos \theta. \end{cases}$$

后面 §11 例 1 按照拉格朗日动力学的方法很简便地推导出平面极坐标系中的质点速度和加速度的表达式。如果按照拉格朗日动力学方法推导球坐标系的表达式(1.16)和(1.17), 同样比这里的矢量力学方法简便得多。

例 3 设一质点的球坐标为 $r = R$, $\theta = \theta_0 \cos \omega t$, $\varphi = \omega t$, 其中 R , ω 和 θ_0 均为常量, 求质点的速度和加速度的球坐标分量。

解 由题所设

$$\begin{cases} r = R, & (1) \\ \theta = \theta_0 \cos \omega t, & (2) \\ \varphi = \omega t, & (3) \end{cases}$$

则质点在球坐标中速度分量为

$$\begin{cases} v_r = \dot{r} = 0, & (4) \\ v_\theta = r\dot{\theta} = -R\theta_0\omega \sin \omega t, & (5) \\ v_\varphi = R\omega \sin(\theta_0 \cos \omega t); & (6) \end{cases}$$

加速度分量为

$$\begin{cases} a_r = -R\dot{\theta}_0^2 \omega^2 \sin^2 \omega t - R\omega^2 \sin^2(\theta_0 \cos \omega t), & (7) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_\theta = -R\dot{\theta}_0 \omega^2 \cos \omega t - \frac{1}{2} R\omega^2 \sin(2\theta_0 \cos \omega t), & (8) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_\varphi = -2R\dot{\theta}_0 \omega^2 \sin \omega t \cos(\theta_0 \cos \omega t). & (9) \end{cases}$$

(6) 自然“坐标系”

在轨道给定的情况下,常用自然“坐标系”,就是说用切向和法向分量表示矢量,例如 $v = vt$, $a = \dot{v}t + v\dot{\theta}n = \dot{v}t + (v^2/R)n$.

§ 2. 质点动力学基本定律

质点动力学问题可用一句话来概括:通过具体分析而“代数式”地写出牛顿运动定律在具体问题中的表示式——运动方程。**中心问题**在于写出运动方程。通常运动方程是在适当的坐标系中用分量形式写出。一旦写出运动方程,问题就转化为数学问题。正确写出运动方程的**关键**在于具体分析,为具体分析创造条件还需要隔离物体。归纳为十六字诀:**隔离物体,具体分析,选定坐标,运动方程。**

具体分析包括受力情况与运动情况的分析,在运动情况中特别着重加速度。

不应只取特定时刻或将物体只取在特定位置来分析,因为物体在特定时刻或特定位置的受力情况或其加速度,并不足以确定物体的全盘运动情况。

每说到一个力,应明确指出是哪一物体对哪一物体的作用,以防止误列入一些并不存在的力,或把作用于甲物体的力误认为作用于乙物体。

考虑某一物体受哪些力作用,要注意它与哪些物体接触,以防止遗漏某些力。

力学中常遇到的力有万有引力、弹性力和摩擦力。

弹性力取决于物体的形变程度,后者又往往与物体的运动情

况有关。例如悬挂物体的绳或弹簧中的张力不一定等于所悬物体的重量,张力大小视物体运动情况而定。

弹簧中张力可表为 $F = -kx$, 原点 $x = 0$ 必须对应于弹簧既不伸长也不压缩的情况。

静摩擦力的指向与接触处的相对滑动趋势相反。例如汽车启动时,主动轮与地面接触处的滑动趋势是向后的,所以主动轮所受静摩擦力向前,这正是推动汽车加速的牵引力!

静摩擦力的大小一般应作为未知数从运动方程解出。但静摩擦力的大小不可能超过静摩擦系数与正压力的乘积。

滑动摩擦力的指向与接触处的滑动方向相反,大小则等于滑动摩擦系数与正压力的乘积。

在约束运动中还有约束力,它所体现的约束作用表现为实体的弹性力。约束力一般应作为未知数从运动方程解出。有时,约束是单侧的,它允许质点在某种情况下从另一侧自由地脱离。如果解算出来的约束力指向错误的一侧,这就意味着脱离了约束。

求解约束运动常用自然“坐标系”。对于光滑约束,通常先解切向运动方程 $m\dot{s} = F_t$, 解这方程的方法是改写 \dot{s} 为 $s ds/ds$, 这是以 s 为自变数的一阶导数,方程中出现的 $\cos\theta$ 和 $\sin\theta$ (θ 是切向与 x 轴的夹角) 也改写为 $\cos\theta = dx/ds$, $\sin\theta = dy/ds$, 统一用 s 为自变数然后积分。切向运动方程的第一次积分往往就是机械能守恒。解出切向方程后就可从法向方程解出约束力。对于粗糙约束,可从切向方程和法向方程消去约束力,再改写 $\dot{s} = s ds/ds$, 化方程为一阶微分方程,由此解出运动情况,然后即可用切向或法向方程计算约束力。

例 地面上有一半球形粗糙凹坑,质点在坑边无初速地跌入,求质点到达坑底的速度。凹坑的半径为 R , 坑与质点之间的摩擦系数为 μ 。

解 隔离物体 本题只研究单个质点,隔离如图 1-7 所示。

具体分析 质点所受的力有:重力 mg 竖直向下,凹坑对质点的支承力 N 指向凹坑的球心,摩擦力 μN 沿切线方向,指向与运动方向相反。

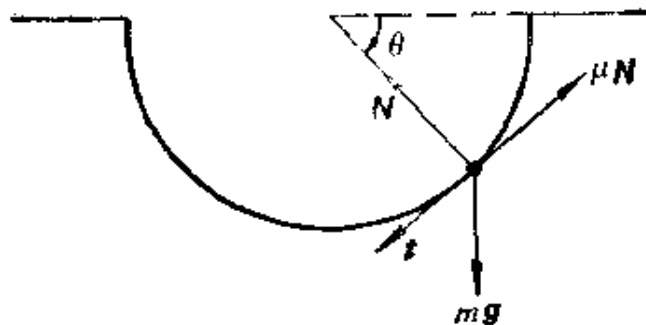


图 1-7

选定坐标 选地面为参考系，质点运动轨道为已知，选自然坐标系，取 θ 增大的方向为切向的正向。

运动方程

$$\begin{cases} mg \cos \theta - \mu N = m dv/dt, & (1) \\ N - mg \sin \theta = mv^2/R. & (2) \end{cases}$$

从两式消去 N ，得

$$\frac{dv}{dt} = g \cos \theta - \mu(g \sin \theta + v^2/R),$$

即

$$2R \frac{dv}{dt} = 2gR(\cos \theta - \mu \sin \theta) - 2\mu v^2. \quad (3)$$

微分方程(3)不显含 t ，可将左端改写为

$$2R \frac{dv}{dt} = 2R \frac{d\theta}{dt} \frac{dv}{d\theta} = 2 \frac{d(R\theta)}{dt} \frac{dv}{d\theta} = 2v \frac{dv}{d\theta} = \frac{dv^2}{d\theta}. \quad (4)$$

于是式(3)可改写成

$$\frac{dv^2}{d\theta} + 2\mu v^2 + 2gR(\mu \sin \theta - \cos \theta) = 0. \quad (5)$$

记 $v^2 = z$ ，方程(5)成为

$$\frac{dz}{d\theta} + 2\mu z + 2gR(\mu \sin \theta - \cos \theta) = 0. \quad (6)$$

这是典型的伯努利微分方程，其标准的解法如下：

以 $e^{2\mu\theta}$ 遍乘式(6)的各项，

$$e^{2\mu\theta} \frac{dz}{d\theta} + 2\mu e^{2\mu\theta} z + 2gR(\mu \sin \theta - \cos \theta)e^{2\mu\theta} = 0,$$

即

$$\frac{d}{d\theta} (e^{2\mu\theta} z) = -2gR(\mu \sin \theta - \cos \theta)e^{2\mu\theta}.$$

积分一次,

$$e^{2\mu\theta} z = - \int 2gR(\mu \sin \theta - \cos \theta)e^{2\mu\theta} d\theta.$$

具体算出积分,

$$z = e^{-2\mu\theta} \left\{ C - \frac{2gR e^{2\mu\theta}}{1 + 4\mu^2} [(2\mu^2 - 1) \sin \theta - 3\mu \cos \theta] \right\}. \quad (7)$$

初始条件是: 当 $\theta = 0^\circ$ 时, $v = 0$, 从而 $z = 0$. 代入式(7) 确定积分常数 C ,

$$C = -5gR\mu/(1 + 4\mu^2),$$

所以

$$z = \frac{2gR}{1 + 4\mu^2} e^{-2\mu\theta} \{-3\mu - e^{2\mu\theta} [(2\mu^2 - 1) \sin \theta - 3\mu \cos \theta]\}. \quad (8)$$

回到原来的变量 v ,

$$v = \sqrt{\frac{2gR}{1 + 4\mu^2} e^{-2\mu\theta} \{-3\mu - e^{2\mu\theta} [(2\mu^2 - 1) \sin \theta - 3\mu \cos \theta]\}^{1/2}}. \quad (9)$$

质点运动到坑底时, $\theta = \pi/2$. 这时, 它的速度 v 按照式(9)是

$$\begin{aligned} v &= \left\{ \frac{2gR}{1 + 4\mu^2} e^{-\mu\pi} [-3\mu - e^{\mu\pi}(2\mu^2 - 1)] \right\}^{1/2} \\ &= \left\{ \frac{2gR}{1 + 4\mu^2} (-3\mu e^{-\mu\pi} - 2\mu^2 + 1) \right\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (10)$$

进一步, 将式(9)的左边改写为 $Rd\theta/dt$, 然后将式(9)分离变数, 积分一次, 还可以求出质点的角坐标 θ 随时间 t 变化的关系式.

§ 3. 非惯性参考系

先考虑一个特殊情况. 参考系绕一轴线以角速度 ω 转动, 轴线通过原点 O , 而质点固定于参考系, 跟随参考系转动 (参看图 1-8). 通常, 在转动轴上画一箭号, 其指向与转动方向成右手螺旋关系, 其大小等于转动角速度 ω , 这个箭号也就叫作 **角速度矢**

量，记作 ω 。质点在垂直于转轴的平面上绕轴作圆周运动，其速度

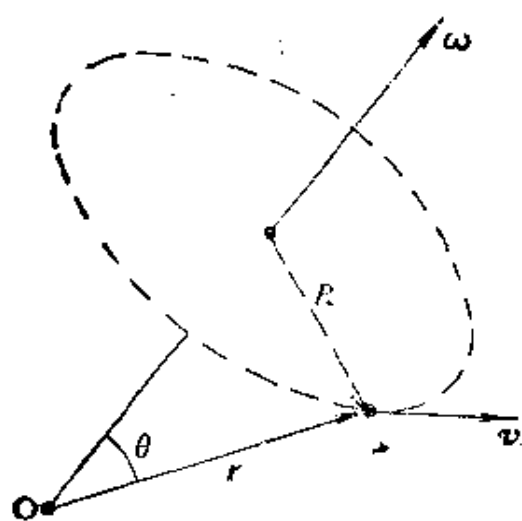


图 1-8

度沿圆周切向，大小为 $\omega R = \omega r \sin \theta$ 。事实上，这个速度正好可用矢量式表为 $\omega \times r$ 。由于这是被参考系牵着运动的速度，所以称为牵连速度，

$$v_{\text{牵}} = \omega \times r.$$

这一结果具有普遍意义。任何一个矢量 A 跟随参考系转动的牵连变化率：

$$A \text{ 的牵连变化率} = \omega \times A. \quad (3.1)$$

如果质点还有相对于转动参考系的相对速度 v' ，那么，质点对于“静止”参考系的“绝对”速度 v 显然是

$$v = v' + \omega \times r. \quad (3.2)$$

在一般的情况下，参考系随着原点以速度 v_0 平移，同时又绕通过原点的轴线以角速度 ω 转动，则式(3.2)应修改为

$$v = v' + v_0 + \omega \times r. \quad (3.3)$$

至于“绝对”加速度即 v 的“绝对”变化率

$$\begin{aligned} a &= v' \text{ “绝对”变化率} + v_0 \text{ “绝对”变化率} \\ &\quad + \omega \times r \text{ “绝对”变化率} \\ &= \{a' + \omega \times v'\} \\ &\quad + \{a_0\} + \{(\omega \times r)' + \omega \times (\omega \times r)\} \\ &= (a' + \omega \times v') + a_0 + \{\dot{\omega} \times r + \omega \\ &\quad \times (v' + \omega \times r)\} = a' + a_0 + \dot{\omega} \times r \\ &\quad + \omega \times (\omega \times r) + 2\omega \times v'. \end{aligned} \quad (3.4)$$

“绝对”加速度的表达式(3.4)的各项不难理解： a' 是质点相对于参考系的相对加速度；第二、三、四项是牵连加速度，其中 a_0 是

跟随参考系的平移的加速度， $\omega \times (\omega \times r)$ 是在垂直于转轴的平面上绕轴作圆周运动的向心加速度， $\dot{\omega} \times r$ 则是参考系角速度变化所导致的牵连速度的变化率，最后一项 $2\omega \times v'$ 叫作**科里奥利加速度**，从推导过程可以看出其一半 $\omega \times v'$ 来自相对速度 v' 的牵连变化率，另一半 $\omega \times v'$ 则来自牵连速度 $\omega \times r$ 的相对变化率。

由牛顿运动定律 $F = ma$ 得

$$F = ma' + ma_0 + m\omega \times (\omega \times r) + m\dot{\omega} \times r + 2m\omega \times v'. \quad (3.5)$$

这样， $F = ma'$ 一般并不成立。不过，我们可以把上式改写成也是牛顿运动定律的形式：

$$F + F' = ma',$$

而把 F' 称为**惯性力**，

$$F' = -ma_0 - m\omega \times (\omega \times r) - m\dot{\omega} \times r - 2m\omega \times v'. \quad (3.6)$$

其中 $-m\omega \times (\omega \times r)$ 称为**惯性离心力**，而 $-m\dot{\omega} \times r$ 称为**切向惯性力**， $-2m\omega \times v'$ 则称为**科里奥利惯性力**。

研究地球上物体运动时，常以地球为参考系。现将惯性离心力与科里奥利惯性力的大小作一比较。科里奥利惯性力正比于地球自转角速度 ω （一级小量），惯性离心力则正比于 ω^2 （二级小量）与质点离地轴的距离（很大的量）的乘积，两者基本上是同级大小。但是，在运动过程中，质点离地轴的距离的变化一般并不很大，因而惯性离心力的**变化**是二级小量。这就是说，惯性离心力可作为常力看待。作为常力，它的效应不过是使重力的指向偏离地球引力的指向，使重量小于地球引力。这样，只要总是用重力代替地球引力（其实它们的微小差别往往可忽略不计），就已包含了惯性离心力的效应在内，不必另外再提出惯性离心力了。因此，在下面的例题中，就只考虑科里奥利惯性力的影响。

例 地球表面上纬度为 φ 处，有一质点在光滑水平面上运动，质点相对

地球的初速为 v_0 , 计及地球自转, 求解该质点运动情况。

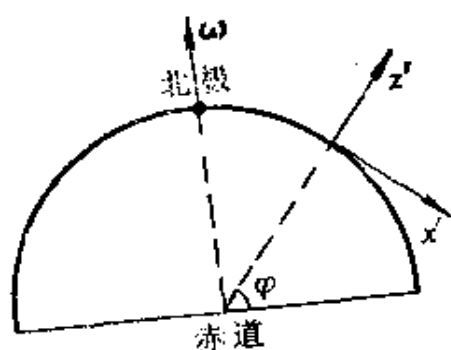


图 1-9

解 隔离物体 本题只有单个质点。

具体分析 质点受力有: 重力 mg 指向地心, 与 z' 轴指向相反; 地面支撑力 N , 背离地心与 z' 轴指向相同; 科里奥利惯性力, 为 $F_c = -2m\omega \times v'$ 。

选定坐标 选地球为参考系, 坐标固定于地球表面, 竖直指向天顶的为 z' 轴, 水平向南的为 x' 轴, 向东的为 y' 轴(图 1-9)。在这坐标系中 ω 的分量为

$$\omega_{x'} = -\omega \cos \varphi, \quad \omega_{y'} = 0, \quad \omega_{z'} = \omega \sin \varphi.$$

运动方程

$$F + F_c = m\alpha', \quad (1)$$

质点限于在水平面中运动, 所以只需 x' 方向和 y' 方向的运动方程。重力及支撑力都垂直于 $x'y'$ 平面, 可以不考虑。科里奥利力的 x' 分量为 $2m\omega y' \sin \varphi$, y' 分量为 $-2m\omega x' \sin \varphi$ 。这样, 运动方程的分量式为

$$\begin{cases} \ddot{x}' = 2\omega \sin \varphi \dot{y}', \\ \ddot{y}' = -2\omega \sin \varphi \dot{x}'. \end{cases} \quad (2)$$

$$\quad \quad \quad (3)$$

取质点开始运动时刻为 $t = 0$, 初始条件为 $t_0 = 0$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ 及 $\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 = v_0^2$ 。

积分式(2), 有

$$\begin{aligned} \dot{x}' &= \dot{x}'_0 + 2\omega \sin \varphi y' \\ &= \left(\frac{\dot{x}'_0}{2\omega \sin \varphi} + y' \right) 2\omega \sin \varphi. \end{aligned} \quad (4)$$

积分式(3), 有

$$\begin{aligned} \dot{y}' &= \dot{y}'_0 - 2\omega \sin \varphi x' \\ &= -\left(-\frac{\dot{y}'_0}{2\omega \sin \varphi} + x' \right) 2\omega \sin \varphi. \end{aligned} \quad (5)$$

作变数代换

$$\begin{cases} y_1 = y' + \frac{\dot{x}'_0}{2\omega \sin \varphi}, \\ x_1 = x' - \frac{\dot{y}'_0}{2\omega \sin \varphi}. \end{cases}$$

代入式(4)与式(5)得:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2\omega y_1 \sin \varphi, & (6) \\ \dot{y}_1 = -2\omega x_1 \sin \varphi. & (7) \end{cases}$$

由式(6)和式(7)得:

$$x_1 \dot{x}_1 + y_1 \dot{y}_1 = 0, \quad (8)$$

即

$$\frac{1}{2} \frac{dx_1^2}{dt} + \frac{1}{2} \frac{dy_1^2}{dt} = 0.$$

积分一次,

$$x_1^2 + y_1^2 = R^2. \quad (9)$$

由初始条件 $t = 0, x' = 0, y' = 0$, 得 x_1 和 y_1 的初始值

$$x_{10} = -\dot{y}'_0 / 2\omega \sin \varphi, \quad y_{10} = \dot{x}'_0 / 2\omega \sin \varphi,$$

代入式(9)以确定积分常数 R ,

$$R^2 = \frac{\dot{y}'_0{}^2 + \dot{x}'_0{}^2}{(2\omega \sin \varphi)^2} = \frac{v_0'^2}{4\omega^2 \sin^2 \varphi}.$$

由此解得

$$R = \frac{v_0'}{2\omega \sin \varphi}. \quad (10)$$

回到原来的变量 x' 与 y' , 式(9)成为

$$\left(x' - \frac{\dot{y}'_0}{2\omega \sin \varphi}\right)^2 + \left(y' + \frac{\dot{x}'_0}{2\omega \sin \varphi}\right)^2 = \frac{v_0'^2}{4\omega^2 \sin^2 \varphi}. \quad (11)$$

由此可见,质点在纬度 φ 处的光滑水平面上,若存在初速 v_0' , 则它在科里奥利惯性力作用下将作圆周运动,圆心在 $(\dot{y}'_0 / 2\omega \sin \varphi, -\dot{x}'_0 / 2\omega \sin \varphi)$, 而半径 $R = v_0' / 2\omega \sin \varphi$.

这个结果是可以理解的. 质点只受科里奥利惯性力 $F_C = -2m\omega \times v'$ 作用,此力处处与速度 v' 垂直,只改变速度 v' 的指向而不改变其大小 v' ,所以质点作匀速曲线运动. 进一步说,对于大小 v' 不变的相对速度 v' ,科里奥利惯性力

$$\begin{aligned} F_C &= -2m(-\omega \cos \varphi i' + \omega \sin \varphi k') \times (\dot{x}' i' + \dot{y}' j') \\ &= -2m(-\omega \dot{y}' \sin \varphi i' + \omega \dot{x}' \sin \varphi j' - \omega \dot{y}' \cos \varphi k') \end{aligned}$$

的水平分力 $2m\omega(\dot{y}' i' - \dot{x}' j') \times \sin \varphi$ 的大小 $2m\omega v' \sin \varphi$ 也是不变的,即 v'/R 不变,从而曲率半径 R 不变,这就只能是匀速圆周运动.

§ 4. 质点动力学运动定理

从牛顿运动定律可以作出一些带有普遍意义的推论即所谓**运动定理**。某些问题可以跳过运动定律直接从运动定理出发而简捷地得到解决。

(1) 动量定理

$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ 叫作质点的动量。微分与积分形式的**动量定理**是

$$\boldsymbol{F} = \frac{d}{dt} \boldsymbol{p}, \quad \int \boldsymbol{F} dt = \boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_1, \quad (4.1)$$

其中 $\int \boldsymbol{F} dt$ 称为力 \boldsymbol{F} 的冲量。积分形式的动量定理特别适合研究冲击作用。在冲击作用下, 质点速度改变 $\left(\int \boldsymbol{F} dt\right) / m$ 。

如 $\boldsymbol{F} = 0$, 动量定理成为**动量守恒原理** $d\boldsymbol{p}/dt = 0, \boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{p}_1$ 。
如 $\boldsymbol{F} \neq 0$, 但 $F_x = 0$, 则 \boldsymbol{p} 不守恒, 但 p_x 守恒。

(2) 角动量定理

取某一轴线, 称之为 z 轴, 定义对 z 轴的力矩 M_z 和角动量 L_z 如下:

$$M_z = xF_y - yF_x,$$

$$L_z = xp_y - yp_x = mx\dot{y} - m\dot{x}y,$$

将 L_z 的定义式对时间 t 求导并利用牛顿运动定律, 容易验证微分形式的角动量定理:

$$M_z = \frac{d}{dt} L_z. \quad (4.2)$$

积分一次, 即得积分形式角动量定理:

$$\int M_z dt = L_z|_{t_2} - L_z|_{t_1}. \quad (4.2')$$

如在 xy 平面上改用极坐标, 则 M_z 和 L_z 的定义成为

$$M_z = \rho F_\phi, \quad L_z = \rho p_\phi = m\rho^2\dot{\phi}.$$

如 $M_z = 0$, 则角动量 L_z 守恒.

通常又定义对点 O 的力矩 M 和角动量 L 为

$$M = r \times F, \quad L = r \times p.$$

读者不难验证, M 的定义式的 x 分量、 y 分量、 z 分量正好分别是对 x 轴、对 y 轴、对 z 轴的力矩; L 的情况也与此类似. 事实上, M 或 L 在任一轴线上的投影正是对该轴的力矩或角动量.

将 L 的定义式对时间 t 求导并利用牛顿运动定律, 即可得对点 O 的角动量定理:

$$M = \frac{d}{dt} L. \quad (4.3)$$

积分一次, 则

$$\int M dt = L_2 - L_1. \quad (4.3')$$

如力矩 $M = 0$, 则角动量 L 守恒.

(3) 动能定理

$T = \frac{1}{2} mv^2$ 叫作质点的动能. 质点的动能定理是

$$W = T_2 - T_1, \quad (4.4)$$

式中 W 是作用于质点的合力 F 所作的功 $\int F \cdot dr$, 其中 dr 是质点的位移.

满足条件 $\nabla \times F = 0$ (或记作 $\text{curl} F = 0$ 或 $\text{rot} F = 0$) 的力所作的功, 只取决于起点和终点而与路径无关, 这种力叫作势力. 与时间无关的势力称为保守力. 对于保守力, 可引入势能

$$V(r) = - \int_{r_0}^r F(r) \cdot dr + V_0.$$

而用势能的减少 $-(V_2 - V_1)$ 表示力所作的功 W . 势能可以加

减任意的常数。当质点高度变动不大时，重力势能为 mgh ；当质点与地心的距离 ρ 变动较大时，重力势能为 $-mgR^2/\rho$ 。弹簧系统的弹性势能为 $kx^2/2$ ，这里 $x=0$ 处必须对应于弹簧既不伸长也不压缩。

如果对质点做功的力全是保守力，动能定理成为**机械能守恒原理** $T_2 + V_2 = T_1 + V_1$ 。

一般说来，对质点作的功 W 可以表示为两部分：一部分 W_p 用势能的减少来表示，其余部分 W_r 不能用（或虽能用而未用）势能的减少来表示，这时动能定理就成为**功能原理**

$$(T_2 + V_2) - (T_1 + V_1) = W_r.$$

功完成的快慢称为**功率**。功率可表为 $F \cdot v$ 。

在转动情况下，功往往可用力矩表出为 $\int M d\varphi$ ，功率也用力矩表出为 $M\omega$ 。

§ 5. 质点组动力学

(1) 两体问题

质点组动力学有一类特殊问题——**两体问题**。所谓两体问题指的是两质点彼此相互作用，但不受其他力的作用。这类问题可以归结为质点动力学。事实上，两质点的运动方程可写成

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{F}_{12}, & (5.1) \\ m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{F}_{21}. & (5.2) \end{cases}$$

式中 \mathbf{F}_{12} 是质点 2 对质点 1 的作用力，而 \mathbf{F}_{21} 是质点 1 对质点 2 的作用力。首先，将式(5.1)与(5.2)相加，得

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = 0.$$

引入质心，其质量 $m_0 = m_1 + m_2$ ，其径矢 $\mathbf{r}_0 = (m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2)/m_0$ ，上式即可表为质心的运动方程：

$$m_0 \ddot{\mathbf{r}}_0 = 0, \quad (5.3)$$

质心保持静止或作匀速直线运动。其次,将式(5.1)和式(5.2)分别除以 m_1 和 m_2 , 然后相减,得相对运动方程:

$$m' \ddot{\mathbf{r}}' = \mathbf{F}_{12}, \quad (5.4)$$

式中 $m' = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ 称为约化质量, $\mathbf{r}' = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ 为相对径矢。这样,两体问题的运动方程式(5.1)和(5.2)归结为单质点运动方程式(5.3)和单质点运动方程式(5.4)。

除两体问题以外,质点组动力学问题的运动微分方程的解算在数学上困难很大。因此,通过运动定理了解质点组运动的总趋向及其某些特征,具有很重要的意义。

(2) 质点组运动定理

质点组的动量、角动量、动能,指的是各质点的动量、角动量、动能的总和,

$$\mathbf{p} = \sum_i \mathbf{p}_i, \quad \mathbf{L} = \sum_i \mathbf{L}_i, \quad T = \sum_i T_i. \quad (5.5)$$

在质点组动力学中,质心是很重要的概念。所谓质心,是一个设想的质点,其质量 m_0 定义为各质点的质量之和,其径矢 \mathbf{r}_0 定义为各质点的径矢之带权平均,

$$m_0 = \sum_i m_i, \quad \mathbf{r}_0 = \sum_i m_i \mathbf{r}_i / m_0. \quad (5.6)$$

质心的动量、角动量、动能分别是

$$\mathbf{p}_0 = m_0 \mathbf{v}_0, \quad \mathbf{L}_0 = m_0 \mathbf{r}_0 \times \mathbf{v}_0, \quad T_0 = \frac{1}{2} m_0 v_0^2. \quad (5.7)$$

现在寻找式(5.5)与式(5.7)之间的联系。

$$\mathbf{p} = \sum_i m_i \mathbf{v}_i = m_0 \sum_i m_i \mathbf{v}_i / m_0 = m_0 \mathbf{v}_0 = \mathbf{p}_0. \quad (5.8)$$

将 $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0$ 记作 \mathbf{r}'_i , $\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0$, 则

$$\mathbf{L} = \sum_i m_i (\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}'_i) \times \mathbf{v}_i$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{r}_0 \times \sum_i m_i \mathbf{v}_i + \sum_i m_i \mathbf{r}'_i \times (\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}'_i) \\
&= \mathbf{r}_0 \times \mathbf{p}_0 + \left(\sum_i m_i \mathbf{r}'_i \right) \times \mathbf{v}_0 + \sum_i m_i \mathbf{r}'_i \times \mathbf{v}'_i \\
&= L_0 + \left(\sum_i m_i \mathbf{r}'_i - \mathbf{r}_0 \sum_i m_i \right) \times \mathbf{v}_0 + L',
\end{aligned}$$

上式末尾的 L' 是质点组对质心的角动量, 而括号中等于 $m_0 \mathbf{r}_0 - m_0 \mathbf{r}_0$ 即零, 因此

$$\mathbf{L} = L_0 + L'. \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned}
T &= \sum_i \frac{1}{2} m_i (\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}'_i)^2 = \frac{1}{2} v_0^2 \sum_i m_i + \mathbf{v}_0 \cdot \sum_i m_i \mathbf{v}'_i \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i'^2 \\
&= \frac{1}{2} m_0 v_0^2 + \mathbf{v}_0 \cdot \left(\sum_i m_i \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_0 \times \sum_i m_i \right) + T'.
\end{aligned}$$

上式末尾的 T' 是质点组相对于质心的动能, 而括号中等于 $m_0 \mathbf{v}_0 - m_0 \mathbf{v}_0$ 即零, 因此有柯尼希定理:

$$T = T_0 + T'. \quad (5.10)$$

将各个质点的动量定理、角动量定理、动能定理累加起来即得质点组的相应定理:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{p} = \sum_i \mathbf{F}_i^{(外)}, \quad (5.11)$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{L} = \sum_i \mathbf{M}_i^{(外)}, \quad (5.12)$$

$$T_2 - T_1 = W^{(外)} + W^{(内)}. \quad (5.13)$$

动量定理式(5.11)也就是质心运动定理:

$$m_0 \ddot{\mathbf{r}}_0 = \sum_i \mathbf{F}_i^{(外)}.$$

注意式(5.11)–(5.13)的右上标. 内力是成对的作用力与反作用力, 而按照牛顿第三定律, 每对作用力与反作用力大小相等,

指向相反,沿着同一直线,这样,内力的和为零,不出现于动量定理式(5.11)中;内力的力矩的和为零,不出现于角动量定理式(5.12)中。但是,作用力与反作用力的功的和却不必为零,所以动能定理式(5.13)中仍然出现内力的功。

(3) 非惯性系 质心系

如果采用非惯性参考系,运动定理式(5.11)~(5.13)仍然成立,只是必须计及惯性力。

不过,如果所说的非惯性系是随质心平移的质心系,则惯性力的力矩

$$\sum_i \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{a}_0 = \left(\sum_i m_i \mathbf{r}'_i \right) \times \mathbf{a}_0.$$

我们在推导式(5.9)的过程中已经知道 $\sum_i m_i \mathbf{r}'_i = 0$, 因此,惯性力的力矩为零;惯性力的功

$$\sum_i m_i \mathbf{a}_0 \cdot d\mathbf{r}'_i = \mathbf{a}_0 \cdot d \sum_i m_i \mathbf{r}'_i = 0.$$

这样,对于质心系,在角动量定理式(5.12)和动能定理式(5.13)中都不必考虑惯性力。

质点组的守恒原理有

$$\text{如 } \sum_i \mathbf{F}_i^{(e)} = 0, \text{ 则 } \mathbf{p} \text{ 守恒;} \quad (5.14)$$

$$\text{如 } \sum_i \mathbf{M}_i^{(e)} = 0, \text{ 则 } \mathbf{L} \text{ 守恒;} \quad (5.15)$$

$$\text{如外力和内力都是保守力,则 } T + V \text{ 守恒.} \quad (5.16)$$

注意式(5.14)和式(5.15)是矢量形式的定理。有时,矢量 $\sum_i \mathbf{F}_i^{(e)}$ 并不为零,但它在某个方向的分量为零,则 \mathbf{p} 在该方向的分量守恒。同理,如果矢量 $\sum_i \mathbf{M}_i^{(e)}$ 并不为零,但在某个方向

的分量为零,则 L 在该方向的分量守恒。

例 一甲虫质量为 m , 在一质量也为 m 的光滑圆环上爬行, 环放在光滑水平桌面上。系统原是静止的。甲虫在环上逆时针爬行一周, 环自身转过多大角度?

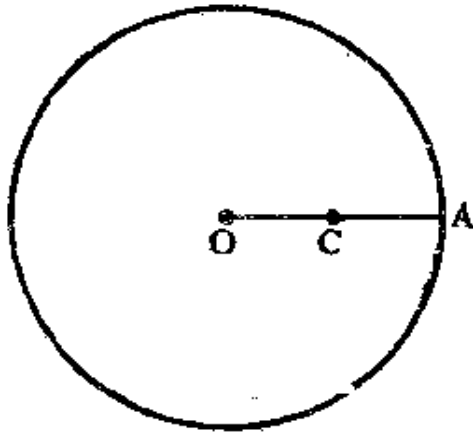


图 1-10

那么 $OC = CA = r/2$ (图 1-10)。

动量守恒 质心 C 初速度为零, 由于动量守恒, 所以

$$mv_C = 0. \quad (1)$$

质心速度永远为零, 即质心 C 位置不变。甲虫爬行时, 它和环心绕 C 运动, 但三点始终在一直线上, 如图 1-11 所示。

角动量守恒 选取质心系, 对过 C 点的竖直轴 z 角动量守恒。取逆时针方向为正。某一时刻甲虫在环上以逆时针爬过 θ 角到 A' 点, 环自身则转过负的 φ 角。质点组质心 C 点是不动的, 可见甲虫绕 C 转过 $\theta - \varphi$ 角。甲虫、 C 及环心三点应保持在一一直线上, 所以环心也绕 C 点转过 $\theta - \varphi$ 角 (图

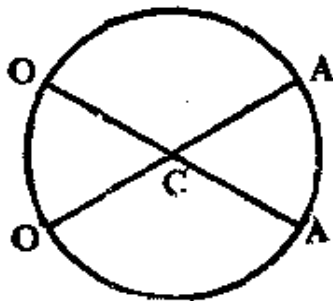


图 1-11

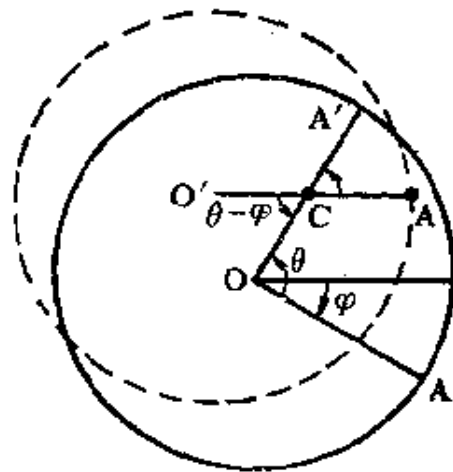


图 1-12

1-12).

甲虫对质点组质心 C 的角动量为

$$m(r/2)^2(\dot{\theta} - \dot{\varphi}). \quad (2)$$

环对质点组质心 C 的角动量按式(5.9)等于环对环心的角动量加上环的质心对 C 的角动量:

$$+ (-mr^2\dot{\varphi}) + m(r/2)^2(\dot{\theta} - \dot{\varphi}) \quad (3)$$

质点组的初始角动量为零,故由角动量守恒得

$$m(r/2)^2(\dot{\theta} - \dot{\varphi}) - mr^2\dot{\varphi} + m(r/2)^2(\dot{\theta} - \dot{\varphi}) = 0. \quad (4)$$

由此

$$\dot{\theta} = 3\dot{\varphi} \quad (5)$$

积分式(5),并计及初始条件“ $t = 0$ 时 $\theta = 0, \varphi = 0$ ”,得

$$\theta = 3\varphi. \quad (6)$$

甲虫沿环逆时针爬行一周, $\theta = 2\pi$. 由式(6)得

$$\varphi = 2\pi/3. \quad (7)$$

而

$$\theta - \varphi = 4\pi/3, \quad (8)$$

即环自身顺时针转过 $2\pi/3$, 同时环心与甲虫又共同绕质点组的质心 C 逆时针转过 $4\pi/3$.

§ 6. 变质量质点动力学

火箭在运行中,不断将燃烧的气态生成物向后喷射出去,火箭的质量也就不断减小。雨滴在含过饱和水汽的大气中降落,水汽不断凝结到雨滴上,雨滴的体积和质量也就不断增加。就总体(火箭及其所喷射的气体,或者雨滴以及凝附的水汽)而言,这是质点组动力学问题。但是在这里,不同于一般的质点组动力学问题,我们并不对质点组内所有质点的运动都感兴趣,仅仅着重研究作为喷射的“主体”的火箭或作为凝附的“主体”的雨滴,而完全不考虑许多气体质点喷射出去之后如何运动或水汽在凝附之前如何运动。因此,与其说是质点组的动力学问题,还不如说是作为“主体”

的质点的动力学问题,因为“主体”的质量随着时间而变,这就提出了所谓**变质量质点动力学**问题。

既然这是质点组动力学问题而又只对“主体”的运动感兴趣,研究这一类问题就应当从质点组动力学的运动定理出发,最后应当归结到主体的运动方程式。变质量质点的运动方程式称为密舍尔斯基方程式。

以火箭为例,这是质量连续减小即 $dM/dt < 0$ 的情况。试取从 t 到 $t + dt$ 这一小段时间,根据质点组的动量定理来考察火箭速度的变化。在时刻 t ,火箭具有质量 M 和速度 v ,因而其动量为 Mv 。到了时刻 $t + dt$,由于喷出了气体 $|dM|$ (注意 dM 是负的),火箭的质量减为 $M - |dM|$,速度也有所改变,兹记作 $v + dv$,因而火箭的动量为 $(M - |dM|)(v + dv)$ 。但是还应当考虑到已被喷射出去的气体的动量。在 dt 这个很短的时间段内,火箭所喷出的气体的“绝对”速度几乎是一样的,今记作 u 。因而所喷出的气体的动量为 $|dM|u$ 。根据质点组动量定理式(5.11)的积分形式, $dp = F dt$,有

$$[(M - |dM|)(v + dv) + |dM|u] - Mv = F dt, \quad (6.1)$$

这里 F 是火箭所受外力,而 $F dt$ 就是外力在这段时间内的冲量。上式亦即

$$Mdv - v|dM| - |dM|dv + u|dM| = F dt, \quad (6.2)$$

$|dM|dv$ 项是 $|dM|$ 与 dv 两个微量的乘积,比起其他各项更为微小,可以略去。于是

$$Mdv = -(u - v)|dM| + F dt,$$

即

$$M \frac{dv}{dt} = (u - v) \frac{dM}{dt} + F. \quad (6.3)$$

这就是减质量情况下的**密舍尔斯基方程式**。

密舍尔斯基方程式(6.3)比牛顿运动方程式 $Mdv/dt = F$ 多出一项 $(u - v)dM/dt$ 。现在来讨论一下这一项的物理意义。质

量为 $|dM|$ 的气体在时刻 t 尚未喷出, 跟随火箭一同前进, 这一部分气体的动量为 $|dM|v$. 到时刻 $t + dt$, 这一部分气体已被喷出而以速度 u 运动, 其动量为 $|dM|u$. 从 t 到 $t + dt$, 这部分气体的动量的改变为 $(u - v)|dM|$. 既然这部分气体并没有受到火箭以外的作用力, 那么此动量改变应该就等于火箭给予这部分气体的冲量. 除以 dt , 就得出火箭将这部分气体喷射出去的力 $(u - v)|dM|/dt$, 即为 $-(u - v)dM/dt$. 反作用力, 即气体给予火箭的反冲力, 因而等于 $(u - v)dM/dt$. 这正是密舍尔斯基方程比牛顿运动方程式多出的一项. 不妨认为, **密舍尔斯基方程式就是计及反冲力 $(u - v)dM/dt$ 的牛顿运动方程式.**

我们还应当研究质量连续增长即 $dM/dt > 0$ 的情况. 还是取从 t 到 $t + dt$ 的一小段时间来考察主体的速度变化. 在时刻 t , 主体具有质量 M 与速度 v . 到了时刻 $t + dt$, 由于附加了质量为 dM 的物质, 主体的质量增为 $M + dM$, 速度也有所改变, 兹记作 $v + dv$. 在时刻 $t + dt$, 主体的动量为 $(M + dM)(v + dv)$. 至于说到在时刻 t , 除了主体的动量 Mv 之外, 还应当考虑到即将附加于主体的那部分物质的动量. 在时刻 t , 这部分物质尚未附加于主体, 今将其“绝对”速度记作 u , 则其动量为 udM . 根据质点组动量定理式(5.11)的积分形式,

$$(M + dM)(v + dv) - [Mv + udM] = Fdt,$$

这里 F 是主体所受外力, 而 Fdt 就是外力在这段时间的冲量. 上式亦即

$$Mdv + v dM + dM dv - udM = Fdt.$$

$dMdv$ 项是 dM 与 dv 两个微量的乘积, 比起其他各项更为微小, 可以略去. 于是

$$Mdv = (u - v)dM + Fdt,$$

即

$$M \frac{dv}{dt} = (u - v) \frac{dM}{dt} + F. \quad (6.4)$$

这就是增质量情况下的密舍尔斯基方程式。(6.4) 右方第一项 $(\mathbf{u} - \mathbf{v})dM/dt$ 也可理解为附加的物质给予主体的撞击力。密舍尔斯基方程式就是计及撞击力 $(\mathbf{u} - \mathbf{v})dM/dt$ 的牛顿运动方程式。

试比较 (6.3) 与 (6.4)，两者形式上完全一样，但应注意：(6.3) 的 \mathbf{u} 是物质被喷射脱离主体之后的“绝对”速度，(6.4) 的 \mathbf{u} 则是物质尚未附加于主体前单独运动的“绝对”速度。又，(6.3) 的 $dM/dt < 0$ ，(6.4) 的 $dM/dt > 0$ ，这是无须多说的。

将 (6.3) 或 (6.4) 右方的 $-\mathbf{v}dM/dt$ 一项移到左方成为 $+\mathbf{v}dM/dt$ ，并与 $Md\mathbf{v}/dt$ 项合并为 $d(M\mathbf{v})/dt$ 。密舍尔斯基方程式又可表为

$$\frac{d}{dt}(M\mathbf{v}) = \mathbf{u} \frac{dM}{dt} + \mathbf{F}. \quad (6.5)$$

(6.5) 是很容易理解的。对于减质量情况，主体的动量的时间变化率等于外力 \mathbf{F} 与动量被喷射物质带走的速率 $-\mathbf{u}|dM/dt|$ 之和。对于增质量情况，主体的动量的时间变化率等于外力 \mathbf{F} 与动量被附加物质带来的速率 $\mathbf{u}dM/dt$ 之和。由此看来，密舍尔斯基方程式就是主体的动量定理。

作为变质量质点动力学问题的例子，现在来研究齐奥科夫斯基问题。



图 1-13

齐奥科夫斯基第一问题：火箭不受外力作用，它以一定的相对速率 v_r 将气体向后喷射出去而作加速直线运动。火箭初始速度为零，初始质量为 M_0 ，所有燃料用完之时质量为 M_1 ，试求其时的速率 v_1 。

取 x 轴平行于火箭轨道并指向运动的前方 (图 1-13)。密舍尔斯基方程式 (6.3) 中的 $(\mathbf{u} - \mathbf{v})$ 正是气体被喷射的相对速度，它在规定的坐标轴上的投影为 $-v_r$ 。于是本例的火箭运动方程

式为

$$M \frac{dv}{dt} = -v_r \frac{dM}{dt} \quad (6.6)$$

各项遍乘 dt ,

$$M dv = -v_r dM.$$

这式还不能积分,需要先分离变量,

$$dv = -v_r \frac{dM}{M}.$$

两方分别积分,

$$v_r - v_0 = (-v_r \ln M_r) - (-v_r \ln M_0),$$

即

$$v_r = v_r \ln(M_0/M_r). \quad (6.7)$$

由此可见,火箭所达到的速率 v_r 与燃料的燃烧时间无关,也与气体喷射时间无关。由(6.7)可见,要提高火箭的速率 v_r , 应提高喷射速率 v_r 或提高质量比 M_0/M_r 。因为 v_r 与气体喷射的相对速率 v_r 成正比,而与质量比 M_0/M_r 的对数 $\ln(M_0/M_r)$ 成正比,所以提高 v_r 比提高 M_0/M_r 更为有效。

事实上,火箭在运行中受到地球的引力。现在来研究**齐奥科夫斯基第二问题**: 火箭在重力作用下的竖直上升运动。

本例的火箭运动方程式显然为

$$M \frac{dv}{dt} = -v_r \frac{dM}{dt} - Mg, \quad (6.8)$$

它比(6.6)多出 $-Mg$ 这一项重力。各项遍乘 dt ,

$$M dv = -v_r dM - Mg dt.$$

这式还不能积分,需要先分离变量,

$$dv = -v_r \frac{dM}{M} - g dt.$$

各项分别积分,

$$v_r - v_0 = (-v_r \ln M_r) - (v_r \ln M_0) - gt_r,$$

即

$$v_s = v_r \ln(M_0/M_s) - gt_s. \quad (6.9)$$

与(6.7)比较,火箭所能达到的速率 v_s 由于重力作用而降低 gt_s ,这称为速度损失. 速度损失与喷射时间 t_s 成正比. 喷射时间越短,速度损失也越小.

上面已经指出,为提高火箭速率,应提高喷射速率或提高质量比. 提高喷射速率需要提高燃烧温度,这又要求耐高温的合金材料. 提高质量比需要浓缩燃料与轻金属或轻合金制的燃料容器. 由于技术上的原因,不论提高喷射速度或提高质量比都有一定的限度. 这样,火箭所能达到的速率还不足以帮助人们实现宇宙航行的愿望. 对此,齐奥科夫斯基也指出了解决途径,即所谓“火箭列车”,亦即“多级火箭”. 当某一级火箭里的燃料用完后,就将这一级“空”火箭丢掉.“空”了的部分如不丢掉,徒然保持火箭比较大的总质量,即保持火箭有较大的惯性,因此“空”了的部分是个累赘. 丢掉“空”的部分就能进一步提高火箭的速率.

例 一球形雨滴自高空下落,下落时周围的水蒸气不断凝结在其上. 若其质量的增加率与雨滴的表面积成正比,求解雨滴的运动情况.

解 这是一个增质量的变质量问题,以雨滴作为主体. 雨滴质量 $m = 4\pi r^2 \rho / 3$ (ρ 为密度, r 为半径).

先研究质量 m 如何随时间而变化. 由题设,

$$\frac{dm}{dt} = k4\pi r^2. \quad (1)$$

以 $m = 4\pi r^2 \rho / 3$ 代入上式,

$$4\pi r^2 \rho \frac{dr}{dt} = k4\pi r^2,$$

即

$$\frac{dr}{dt} = \frac{k}{\rho}. \quad (2)$$

积分式(2),并把 r 的初始值记作 r_0 , 则

$$r = r_0 + (k/\rho)t. \quad (3)$$

从而

$$m = (4/3)\pi(r_0 + kt/\rho)^3\rho \quad (4)$$

现在用密舍尔斯基方程研究雨滴的运动。

$$m \frac{dv}{dt} = (u - v) \frac{dm}{dt} + F \quad (5)$$

其中 u 是蒸气尚未凝结而附加于主体之前的绝对速度,在本题中应为零。

取雨滴运动方向为 x 正方向(图 1-14), 则 $v = \dot{x}$, 式(5)即为

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = F. \quad (6)$$

式(6)中 F 为主体所受重力 $F = 4\pi r^3\rho g/3$. 将 m 代入式(6)得:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\rho\dot{x}\right) = \frac{4}{3}\pi r^3\rho g. \quad (7)$$

为了便于积分将式(7)右边的 r 以 $r_0 + (k/\rho)t$ 代入,

$$d\left(\frac{4}{3}\pi r^3\rho\dot{x}\right) = \frac{4}{3}\pi\left(r_0 + \frac{k}{\rho}t\right)^3\rho g dt. \quad (8)$$

积分式(8), 计及初始条件 “ $t = 0, r = r_0, v = 0$ ”, 并记 k/ρ 为 λ , 且将积分以后式中的 r 全都以 $(r_0 + \lambda t)^3$ 代入, 即得:

$$\dot{x} = \frac{g}{4\lambda}\left[(r_0 + \lambda t) - \frac{r_0^4}{(r_0 + \lambda t)^3}\right] \quad (9)$$

以上的计算未计及空气阻力, 故当 $t \rightarrow \infty$, 速度将无限增大. 而实际上, 由于空气阻力随速度增大, 雨滴下落的速度将不会无限增加.

再将式(9)积分一次, 得 x 与 t 的关系. 记 x 初始值为 x_0 , 则

$$x = x_0 + \frac{gt^2}{8}\left(\frac{2r_0 + \lambda t}{r_0 + \lambda t}\right)^2 \quad (10)$$

如果 $t = 0$ 时雨滴的半径为零且坐标 x_0 亦为零, 则式(10)给出

$$x = \frac{1}{8}gt^2 \quad (11)$$



图 1-14

§ 7. 刚体的平移、定轴转动、平面平行运动

本书第六章将系统地论述刚体力学, 特别是刚体的定点运动。

因此,本节主要讨论刚体运动的几种特殊形式: 平移、定轴转动、平面平行运动。

(1) 运 动 学

刚体运动学包括两个方面: 刚体运动的整体描述, 以及刚体里各质点运动的描述。

在刚体运动过程中, 如果刚体里的任何一根直线保持其取向不变, 这种运动称为**平移**。刚体作平移, 则刚体里所有各质点具有共同的位移、速度、加速度。这些也就是刚体的整体的位移、速度、加速度。刚体的整体位置可用其中任意一点(例如质心)的三个坐标 (x, y, z) 来确定, 所以说, 平移刚体有**三个自由度**。

如果刚体里有一根直线保持不动, 整个刚体围绕着这根不动的直线运动, 这种运动称为**定轴转动**。刚体作定轴转动, 则整体的位置可用其相对于转动轴的取向即**角坐标** θ 表示, 所以说, 定轴转动刚体只有**一个自由度**。关于其运动则用角坐标作为时间的函数 $\theta(t)$ 描述。 $\omega = d\theta/dt$ 称为角速度, $\alpha = d\omega/dt = d^2\theta/dt^2$ 称为角加速度。刚体里所有质点各自绕着转轴作圆周运动, 其速度 $v_i = \omega R_i$, 下标 i 是该质点的编号, R_i 是该质点与转轴的距离。或者, 比照图 1-8, 有

$$v_i = \omega \times r_i. \quad (7.1)$$

比照式(3.4)又有

$$a_i = \dot{\omega} \times r_i + \omega \times (\omega \times r), \quad (7.2)$$

右边两项分别是切向加速度与向心加速度。

如果刚体里所有各质点都平行于某一平面而运动, 这种运动称为**平面平行运动**。这种情况下, 凡垂直于该平面的任一直线始终保持其取向不变, 而且此直线上各点运动情况完全相同。因此, 我们可以取平行于该平面的任一剖面代表整个刚体。为方便起见, 最好取通过质心的那个剖面。剖面的整体的位置可以这样确定: 取剖面上任意一点(例如刚体的质心), 称之为**基点**; 给出基点的两

个坐标 (x, y) 以及剖面相对于基点的角坐标 θ , 剖面的位置就确定了。所以说, 平面平行运动刚体有三个自由度。关于其运动则用 x, y, θ 作为时间的函数 $x(t), y(t), \theta(t)$ 描述。刚体里所有质点随着基点移动, 同时又绕着基点转动。比照图 1-8 和式(3.3)以及式(3.4)有

$$v_i = v_0 + \omega \times r_i, \quad (7.3)$$

$$a_i = a_0 + \dot{\omega} \times r_i + \omega \times (\omega \times r_i), \quad (7.4)$$

其中 v_0 和 a_0 分别是基点的速度和加速度。注意, r_i 在剖面上, 而 ω 垂直于剖面。所以, 如果仿照图 1-8 作出图来, r_i 应与 ω 垂直。

刚体运动过程中, 如果刚体里有一点保持不动, 这种运动称为**定点运动**。为确定这种刚体的位置, 只要再给出另外两点(这两点与该定点必须是不共线的)的坐标(共计六个)就可以了; 但是, 这三个质点两两之间的距离是给定不变的, 这样共有三个条件。六个坐标受到三个条件限制, 实际上只有三个坐标可以独立地给出。所以说, 定点运动刚体有三个自由度。定点运动的详细讨论留待第六章。第六章的 § 23(2) 将指出, 定点运动是一种转轴方向不固定的转动, 定点运动的三个自由度也可以说是三个转动自由度。

自由刚体既有三个平移自由度, 又有三个转动自由度, 所以共具有六个自由度。

(2) 动力学

刚体是一种特殊的质点组。质点组动力学有三条定理: 动量定理(5.11)、角动量定理(5.12)、动能定理(5.13)。其中(5.11)和(5.12)是矢量方程, 各有三个分量方程。这样, 共有七个动力学方程可供选用。自由的刚体也只有六个自由度, 可见这七个方程只有六个是独立的。

通常选用动量定理亦即质心运动定理

$$m_0 \ddot{r}_0 = F \quad (7.5)$$

与角动量定理

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{M} \quad (7.6)$$

作为刚体的运动方程。式中 $\mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F}_i^{(e)}$ 而 $\mathbf{M} = \sum_i \mathbf{M}_i^{(e)}$ 。

注意：i) 作用于刚体的诸外力未必作用于同一质点，即连各外力的作用线也未必汇交于同一点，所以 \mathbf{F} 不能称为外力的合力，而应称为作用于刚体的外力系的主矢，而 \mathbf{M} 相应地称为该力系的主矩。ii) 角动量定理(7.6)适用于惯性系。如果用了非惯性系，还应计及惯性力系的力矩。不过，质心系尽管可能是非惯性系，也不必计入惯性力系的力矩，因为这种情况下的惯性力系的力矩为零。

用动能定理

$$T_2 - T_1 = W^{(e)} \quad (7.7)$$

取代(7.5)或(7.6)中的某一个方程常有助于简捷地解决问题。注意，不同于(5.13)，这里不考虑内力的功，这是因为刚体的内力所作功之和为零。证明如下：将刚体的质点 i 相对于质点 j 的矢径记作 $\mathbf{r}' = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ ，则 \mathbf{r}' 的大小 r' 不变。两质点相互作用力沿着 \mathbf{r}' 方向，若将质点 j 对质点 i 的作用力记作 $F\mathbf{r}'/r'$ ，则质点 i 对质点 j 的作用力必是 $-F\mathbf{r}'/r'$ 。于是，这一对内力的功

$$\begin{aligned} (F\mathbf{r}'/r') \cdot d\mathbf{r}_i + (-F\mathbf{r}'/r') \cdot d\mathbf{r}_j &= (F\mathbf{r}'/r') \cdot d(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \\ &= (F/r')\mathbf{r}' \cdot d\mathbf{r}' = (F/r')d(r'^2) = 0. \end{aligned}$$

因此，刚体内力所作功之和必为零。

在很多情况下，刚体并不是自由的，自由度小于6，那就可以选用较少的方程解决问题。

例如，刚体的平移可用质心运动定理(7.5)解决。这实际上归结为质点动力学问题。

例如，刚体的定轴转动可用角动量定理在转轴方向的分量式

$$M = \frac{d}{dt}(I\omega) = I\alpha \quad (7.8)$$

解决。式中 M 是对转轴的力矩， I 是刚体对转轴的转动惯量。

例如，刚体平行于 xy 平面的平行运动可用质心运动定理的 x 分量式和 y 分量式：

$$m_0 \ddot{x}_0 = F_x, \quad m_0 \ddot{y}_0 = F_y$$

以及对于通过质心的 z 轴的角动量定理

$$M = I\alpha$$

解决。

例如，刚体绕某个定点的转动可用角动量定理 $M = dL/dt$ 解决。

然而，如果追问刚体的自由度何以小于 6，有怎样的力约束着刚体，那就仍然需要全套的运动方程。例 1 初步接触到这个问题。

例 1 一刚体由两个质量各为 m 的质点固结于长 $2l$ 的轻杆而组成，杆的中点固定在轻的竖直轴上，杆与竖直轴夹角为 α ，并以匀角速 ω 绕该轴旋转。求：(1) 刚体的角动量；(2) 刚体所受的力矩。

解 选刚性斜杆与轴交点为坐标系的原点 O ，旋转轴为 z 轴， z 轴的指向与 ω 相同。 x 轴和 y 轴垂直于转轴且指向固定(图 1-15)。

(1) 刚体是由两个质点和质量可略去的杆与轴组成，它对 O 点的角动量

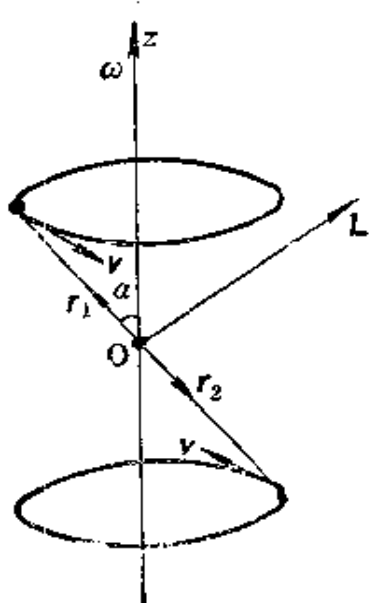


图 1-15

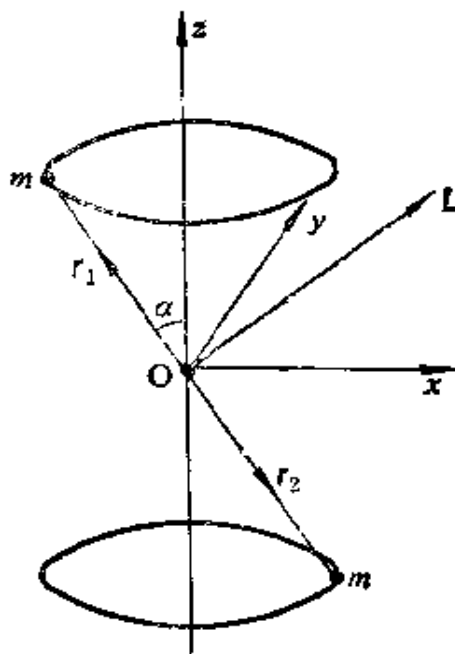


图 1-16

按定义为

$$L = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{p}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{p}_2.$$

现在, 每个质点的 $|\mathbf{r}| = l$, $|\mathbf{p}| = |m\mathbf{v}| = m\omega l \sin \alpha$; 由图可见 \mathbf{r} 与 \mathbf{p} 垂直, 而且 $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{p}_1$ 与 $\mathbf{r}_2 \times \mathbf{p}_2$ 互相平行且指向相同, 所以

$$L = 2m\omega l^2 \sin \alpha.$$

至于 L 的方向则是垂直于斜杆, 位于杆和竖直轴所在平面内.

注意, 角动量 L 并不沿 z 轴, 亦即 L 的指向与角速度 ω 的指向并不相同.

现在具体计算 L . 如图 1-16 所示,

$$\mathbf{r}_1 = l \sin \alpha \cos \omega t \mathbf{i} + l \sin \alpha \sin \omega t \mathbf{j} + l \cos \alpha \mathbf{k},$$

而
所以

$$\mathbf{p}_1 = m\mathbf{r}_1 \times \omega \mathbf{k},$$

$$\mathbf{r}_1 \times \mathbf{p}_1 = m\mathbf{r}_1 \times (\mathbf{r}_1 \times \omega \mathbf{k}).$$

同理可求得

$$\mathbf{r}_2 \times \mathbf{p}_2 = m\mathbf{r}_2 \times (\mathbf{r}_2 \times \omega \mathbf{k}),$$

而

$$\begin{aligned} L = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{p}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{p}_2 &= L \cos \alpha \cos \omega t \mathbf{i} \\ &+ L \cos \alpha \sin \omega t \mathbf{j} + L \sin \alpha \mathbf{k}. \end{aligned}$$

其指向果然不同! $\omega = \omega \mathbf{k}$ 的指向.

刚体绕 z 轴的转动惯量 $I_z = 2m(l \sin \alpha)^2$. 虽然 $L \neq I\omega$, 但在 ω 的方向 (z 方向) 确有

$$L_z = I_z \omega.$$

当斜杆以角速度 ω 绕竖直轴旋转时, 角动量 L 也同杆一起旋转, 其端点绕竖直轴画出一圆.

(2) 定轴转动只有一个自由度, 对这个自由度应用角动量定理(7.8),

$$M_z = \frac{d}{dt} L_z = \frac{d}{dt} (L \sin \alpha) = \frac{d}{dt} (\omega 2m l^2 \sin^2 \alpha) = 0.$$

但这只是说对转轴的外力矩为零.

杆究竟是否受外力矩作用呢? 应用角动量定理(7.6),

$$\mathbf{M} = d\mathbf{L}/dt = -L\omega \cos \alpha \sin \omega t \mathbf{i} + L\omega \cos \alpha \cos \omega t \mathbf{j},$$

而力矩 M 的大小为

$$M = (M_x^2 + M_y^2)^{1/2} = L\omega \cos\epsilon,$$

本例的刚体虽然绕其不对称轴作匀速定轴转动，却并非不受外力矩的作用，通常把这情况说成刚体定轴转动没有达到动平衡。至于这力矩 M 当然只可能是轴承给予轴的约束力对 x 轴和 y 轴的力矩。如想进一步求出约束力，则除了上面的 $M = dL/dt$ 以外，还要结合考虑(7.5)。

但是，刚体绕某些特殊轴转动时 L 确实平行于 ω ；刚体绕这种轴作匀速转动时，也就没有受到外力矩的作用，轴上的相应约束力也就不存在，这就是通常所说转动已达到动平衡。

作为动平衡的例子，设刚体具有对称轴并绕对称轴转动，如图 1-17。对应于刚体上的点 A 处的质元 Δm ，必可在对称点 B 处相应地找到质元 Δm 。点 A 处的质元的角动量 L_A 垂直于 v_A 与 r_A ，它的指向如图 1-18 (a) 所示；对称点 B 处的质元 Δm 的角动量 L_B 垂直于 v_B 与 r_B ，它的指向如图 1-18(b) 所示，这两个对称点处的质元的角动量的矢量和是平行于转轴的。就一对对彼此对称的质元求和，求得刚体总的角动量 L 当然也就平行于 ω 。在这特殊情况下， $L = I\omega$ 。如果刚体绕这轴的转动是匀速的，则

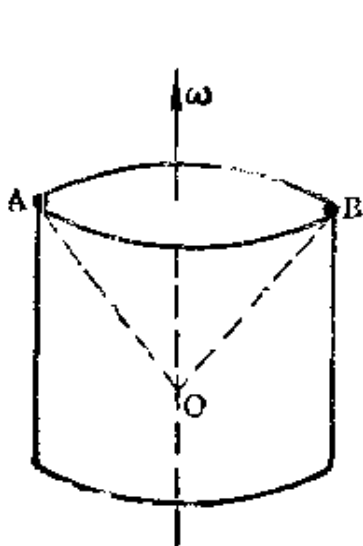


图 1-17

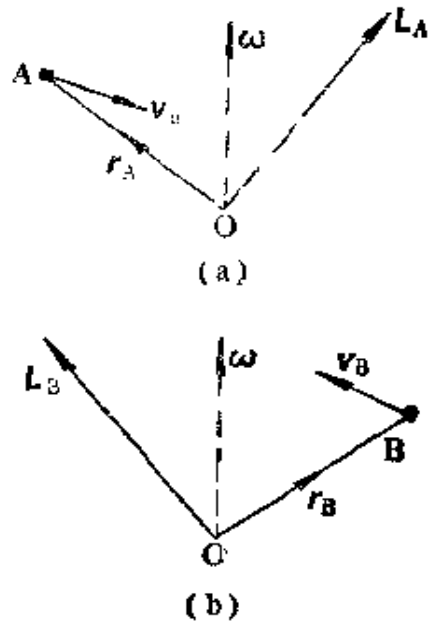


图 1-18

$$\dot{\mathbf{M}} = d\mathbf{L}/dt = d(I\boldsymbol{\omega})/dt = I d\boldsymbol{\omega}/dt = 0,$$

可见刚体不受外力矩作用, 轴承并不对刚体施加力矩。

下面再给出三个例题。

例 2 半径为 r 的薄圆盘在平面上无滑动地沿着半径为 R 的圆周滚动 (图 1-19), 盘面始终保持竖直。求盘边缘上的 M 点的加速度, 其时 M 恰在盘的最高点。

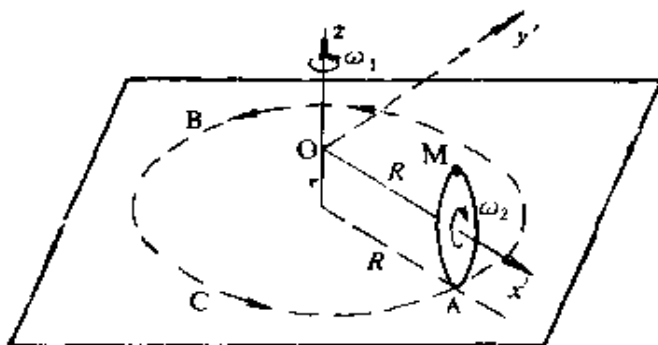


图 1-19

解法 1 取平面 ABC 为参考系统, 它是“静止的”。与此相应, 取通过 O 点而垂直于平面 ABC 的轴线作为 z 轴, xy 平面则通过 O 点而平行于平面 ABC 。

首先求圆盘绕其对称轴转动的角速度 ω_2 。由于没有滑动, A 点的速度应为零, 即 $\omega_1 R - \omega_2 r = 0$, 因而

$$\omega_2 = \frac{R}{r} \omega_1.$$

(此式的另一推导: 因为点 O 与 A 的速度都是零, 其连线 AO 必是圆盘的瞬时转动轴线。换句话说, 圆盘绕 z 轴的角速度矢量与绕对称轴的角速度矢量之和必沿 AO 线, 由此可求得 $\omega_2 = \omega_1 R/r$ 。)

把圆盘的对称轴与 x 轴的夹角记作 $\varphi(t)$, 注意 ω_2 的方向, 则圆盘的角速度为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} &= -\omega_2 \cos \varphi \mathbf{i} - \omega_2 \sin \varphi \mathbf{j} + \omega_1 \mathbf{k} \\ &= -\frac{R}{r} \omega_1 \cos \varphi \mathbf{i} - \frac{R}{r} \omega_1 \sin \varphi \mathbf{j} + \omega_1 \mathbf{k}. \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}\dot{\omega} &= -\frac{R}{r}\omega_1(-\dot{\varphi}\sin\varphi)\mathbf{i} - \frac{R}{r}\omega_1(\dot{\varphi}\cos\varphi)\mathbf{j} \\ &= \frac{R}{r}\omega_1^2\sin\varphi\mathbf{i} - \frac{R}{r}\omega_1^2\cos\varphi\mathbf{j}.\end{aligned}$$

为简单起见,不妨认为在我们所研究的时刻, $\varphi(t) = 0$. 这样一来,

$$\omega = -\frac{R}{r}\omega_1\mathbf{i} + \omega_1\mathbf{k}, \quad \dot{\omega} = -\frac{R}{r}\omega_1^2\mathbf{j}.$$

圆盘是以角速 ω 转动着的刚体. 作为这刚体中的一点, M 的加速度

$$\mathbf{a} = \dot{\omega} \times \mathbf{r} + \omega \times (\omega \times \mathbf{r}).$$

以 M 点的矢径 $\mathbf{r} = R\mathbf{i} + r\mathbf{k}$ 代入上式即得

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= \left(-\frac{R}{r}\omega_1^2\mathbf{j}\right) \times (R\mathbf{i} + r\mathbf{k}) + \left(-\frac{R}{r}\omega_1\mathbf{i} + \omega_1\mathbf{k}\right) \\ &\quad \times \left[\left(-\frac{R}{r}\omega_1\mathbf{i} + \omega_1\mathbf{k}\right) \times (R\mathbf{i} + r\mathbf{k})\right] \\ &= \left(\omega_1^2\frac{R^2}{r}\mathbf{k} - \omega_1^2R\mathbf{i}\right) + \left(-\frac{R}{r}\omega_1\mathbf{i} + \omega_1\mathbf{k}\right) \times [2\omega_1R\mathbf{j}] \\ &= \left(\omega_1^2\frac{R^2}{r}\mathbf{k} - \omega_1^2R\mathbf{i}\right) + \left(-2\omega_1^2\frac{R^2}{r}\mathbf{k} - 2\omega_1^2R\mathbf{i}\right) \\ &= -3\omega_1^2R\mathbf{i} - \omega_1^2\frac{R^2}{r}\mathbf{k}.\end{aligned}$$

解法 2 取圆盘的对称轴与 z 轴所构成的框架为参考系统, 它是角速度为 $\omega_1\mathbf{k}$ 的转动参考系统. 与此相应, 以圆盘的对称轴为 x' 轴, x' 轴则重合于 z 轴.

相对于这个转动坐标系, 圆盘以不变的角速度 $\omega_1\mathbf{i}$ 转动. 作为这刚体中的一点, M 的相对加速度

$$\begin{aligned}\mathbf{a}' &= \dot{\omega} \times \mathbf{r} + \omega \times (\omega \times \mathbf{r}) = 0 + (-\omega_1\mathbf{i}) \times [(-\omega_1\mathbf{i}) \times (R\mathbf{i} + r\mathbf{k})] \\ &= -\omega_1\mathbf{i} \times (\omega_1r\mathbf{j}) = -\omega_1^2r\mathbf{k} = -\omega_1^2\frac{R^2}{r}\mathbf{k}.\end{aligned}$$

至于绝对加速度 \mathbf{a} , 它是相对加速度 \mathbf{a}' 与牵连加速度以及科里奥利加速度的和.

$$\begin{aligned}\text{牵连加速度} &= \left[\frac{d}{dt}(\omega_1\mathbf{k})\right] \times \mathbf{r} + (\omega_1\mathbf{k}) \times [(\omega_1\mathbf{k}) \times (R\mathbf{i} + r\mathbf{k})] \\ &= 0 + \omega_1\mathbf{k} \times \omega_1R\mathbf{j} = -\omega_1^2R\mathbf{i}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{点M的相对速度 } \mathbf{v}' &= (-\omega_1 \mathbf{i}) \times (R\mathbf{i} + r\mathbf{k}) = \omega_1 r \mathbf{j}, \\ \text{科里奥利加速度} &= 2(\omega_1 \mathbf{k}) \times \mathbf{v}' = 2(\omega_1 \mathbf{k}) \times (\omega_1 r \mathbf{j}) \\ &= -2\omega_1 \omega_1 r \mathbf{i} = -2\omega_1^2 R \mathbf{i}, \end{aligned}$$

结果

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \left(-\omega_1^2 \frac{R^2}{r} \mathbf{k} \right) + (-\omega_1^2 R \mathbf{i}) + (-2\omega_1^2 R \mathbf{i}) \\ &= -3\omega_1^2 R \mathbf{i} - \omega_1^2 \frac{R^2}{r} \mathbf{k}. \end{aligned}$$

例3 把小圆柱体放在大圆柱体正上方并使两柱的轴相互平行。取大圆柱的轴在此时的位置作为 x 轴，通过大圆柱质心此时的位置而竖直向上的直线作为 y 轴。两柱开始时都是静止的。放手后，小圆柱沿着大圆柱无滑动地滚下，大圆柱也在水平面上无滑动地滚动（图 1-20）。设大圆柱的质量和半径为 m_1 和 R_1 ，小圆柱的质量和半径为 m_2 和 R_2 ，试证小圆柱的质心的坐标

$$x_1 = (R_1 + R_2) \frac{m_2 \theta + (3m_1 + m_2) \sin \theta}{3(m_1 + m_2)}, \quad y_1 = (R_1 + R_2) \cos \theta,$$

式中 θ 是两柱质心联线与 y 轴的夹角。

解 隔离物体 见图 1-20(b)。

具体分析 大圆柱所受的力计有：重力 $m_1 g$ 作用于质心，竖直向下；

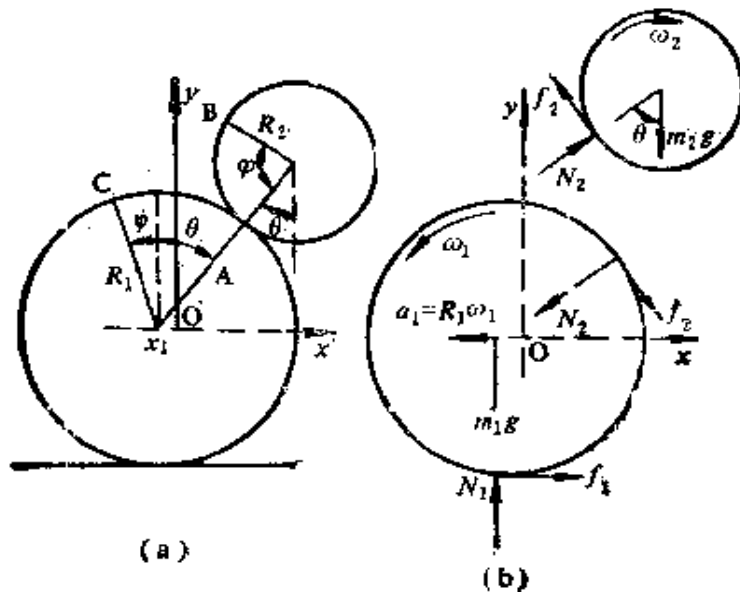


图 1-20

地面的支承力 N_1 ，作用于柱与地面接触处，竖直向上；在同一处，还有摩擦力 f_1 ，水平向右。小圆柱施加的压力 N_2 ，作用于两柱接触处，指向大柱的中轴；在同一处，还有摩擦力 f_2 ，沿切向朝下。

小圆柱所受的力计有：重力 m_2g 作用于质心，竖直向下。大圆柱的支承力 N_2 作用于两柱接触处，指向小柱的中轴；在同一处，还有摩擦力 f_2 ，沿切向朝上。

取静止的水平面为参考系统。大柱向后滚动，即质心以速度 $|\dot{x}_1|$ 向后运动，同时柱又以角速度 ω_1 绕轴转动，而 $|\dot{x}_1| = R_1\omega_1$ ，即 $\dot{x}_1 = -R_1\omega_1$ 。从而加速度是

$$\ddot{x}_1 = -R_1\dot{\omega}_1 \quad (1)$$

小圆柱的质心坐标

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + (R_1 + R_2) \sin \theta, \\ y_2 = (R_1 + R_2) \cos \theta. \end{cases} \quad (2)$$

$$(3)$$

小柱同时又以角速度 ω_2 绕轴转动。参看图 1-20(a)。小圆柱从大圆柱正上方滚下来的过程中，依次相接触的部分在图中构成圆弧 \widehat{AC} 与 \widehat{AB} ，两段圆弧长度应相等，即

$$R_2\varphi = R_1(\theta + \phi).$$

上式两边对时间微分，

$$R_2(\omega_2 - \dot{\theta}) = R_1(\dot{\theta} + \dot{\phi}) = R_1\dot{\theta} + R_1\omega_1,$$

即

$$R_2\omega_2 = R_1\omega_1 + (R_1 + R_2)\dot{\theta}. \quad (4)$$

约束方程(1)–(4)指出 $x_1, x_2, y_2, \theta, \omega_1, \omega_2$ 之中只有两个变数是独立的。

不妨取 x_2, θ 为独立变数。从(1)–(4)解出：

$$x_1 = x_2 - (R_1 + R_2) \sin \theta, \quad (5)$$

$$y_2 = (R_1 + R_2) \cos \theta, \quad (6)$$

$$R_1\omega_1 = -\dot{x}_2 + (R_1 + R_2) \frac{d}{dt} \sin \theta, \quad (7)$$

$$R_2\omega_2 = -\dot{x}_2 + (R_1 + R_2) \left[\frac{d}{dt} \sin \theta + \frac{d}{dt} \theta \right]. \quad (8)$$

其中(6)即为所求证的关系式之一。还剩下 x_1 与 θ 的关系尚待求证。

选定坐标 题已指定了坐标系。

运动方程 写出大、小圆柱的 x 方向和 y 方向运动方程, 以及各自绕对称轴转动的角动量定理:

$$\begin{cases} f_1 + f_2 \cos \theta - N_2 \sin \theta = m_1 \ddot{x}_1, & (9) \\ N_1 - m_1 g - N_2 \cos \theta - f_2 \sin \theta = 0, & (10) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_1 R_1 - f_2 R_1 = \frac{1}{2} m_1 R_1^2 \dot{\omega}_1; & (11) \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_2 \sin \theta - f_2 \cos \theta = m_2 \ddot{x}_2, & (12) \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_2 \cos \theta - m_2 g = m_2 \ddot{y}_2, & (13) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_2 R_2 = \frac{1}{2} m_2 R_2^2 \dot{\omega}_2, & (14) \end{cases}$$

从(5)到(14)一共有十个方程, 可供求解十个未知数: $x_1, \omega_1, x_2, y_2, \omega_2, \theta, N_1, N_2, f_1, f_2$. 不过, 本例并不要求解出这十个未知数, 只是求证两个关系式. 这两个关系式之一已给出, 另一个有待求证的是 x_2 与 θ 的关系.

利用(5)–(8)可将(9)–(14)式改写为

$$\begin{cases} f_1 + f_2 \cos \theta - N_2 \sin \theta = m_1 \ddot{x}_2 - (R_1 + R_2) \frac{d^2}{dt^2} \sin \theta, & (15) \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_1 - m_1 g - N_2 \cos \theta - f_2 \sin \theta = 0, & (16) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_1 - f_2 = \frac{1}{2} m_1 \left[-\ddot{x}_1 + (R_1 + R_2) \frac{d^2}{dt^2} \sin \theta \right], & (17) \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_2 \sin \theta - f_2 \cos \theta = m_2 \ddot{x}_2, & (18) \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_2 \cos \theta - m_2 g = m_2 (R_1 + R_2) \frac{d^2}{dt^2} \cos \theta, & (19) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_1 = \frac{1}{2} m_2 \left[-\ddot{x}_2 + (R_1 + R_2) \frac{d^2}{dt^2} \sin \theta + (R_1 + R_2) \ddot{\theta} \right]. & (20) \end{cases}$$

题所要求的是 x_2 与 θ 的关系, 所以应消去 f_1, f_2, N_1, N_2 . N_1 只出现在方程(16)中, 故弃去此式也就是消去了 N_1 .

将(15)与(18)相加, 消去 N_2 得

$$f_1 = (m_1 + m_2) \ddot{x}_2 - m_1 (R_1 + R_2) \frac{d^2}{dt^2} \sin \theta. \quad (21)$$

此式实际上即是

$$f_1 = m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2$$

这正是 x 方向的动量定理.

又将(17)与(20)相加,消去 f_1 得

$$f_1 = -\frac{1}{2}(m_1 + m_2)\ddot{x}_2 + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)(R_1 + R_2) \times \left[\frac{d^2}{dt^2} \sin \theta + \ddot{\theta} \right] \quad (21)$$

从(21)与(22)消去 f_1 即得

$$3(m_1 + m_2)\ddot{x}_2 = (R_1 + R_2) \left[m_2 \ddot{\theta} + (3m_1 + m_2) \frac{d^2}{dt^2} \sin \theta \right]. \quad (23)$$

将上式积分两次,计及初始条件:在 $t = 0$ 时, $x_2 = 0$, $\dot{x}_2 = 0$, $\theta = 0$, $\dot{\theta} = 0$, 即得所求得的

$$x_2 = (R_1 + R_2) \frac{m_2 \theta + (3m_1 + m_2) \sin \theta}{3(m_1 + m_2)}$$

回顾证明过程,并未用到全部的运动方程.从动力学方程来说,只用到(21)、(17)和(20),它们就是质心运动定理、两柱各自绕其对称轴的角动量定理.这是说,本例可以较简便地解出,即运用质心运动定理和动量矩定理,当然还需要运动学关系式(1)、(2)和(4)的配合.

例 4 匀质球壳质量为 M , 半径为 R , 放置在粗糙水平面上.球壳内壁是光滑的,有匀质棒在壳内滑动(图 1-21(a)),其初始状态是:棒在通过球心的竖直面内,与水平面作 θ_0 角而静止.棒的质量为 m , 长为 $2R \sin \alpha$.试证在运动过程中,棒与水平面所夹角 θ 满足方程

$$6g(5M + 3m)(\cos \theta - \cos \theta_0) \cos \alpha = [(5M + 3m)(3 \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) - 9m \cos^2 \alpha \cos^2 \theta] R \dot{\theta}^2.$$

设球壳与粗糙水平面之间始终没有滑动,滚动摩擦可以忽略.

解 参照上一例题的经验,本例拟运用运动定理.

隔离物体 见图 1-21(b).

具体分析 球壳所受的力计有:重力 Mg 作用于球心,竖直向下.棒两端的压力 N_1 和 N_2 分别作用于棒的两端与球壳的接触点,沿半径向外.粗糙水平面的静摩擦力 f ,它是水平的.粗糙水平面垂直向上的支承力 N .

棒所受的力计有:重力 Mg 作用于棒的中点,竖直向下.两端受到球壳支承力 N_1 和 N_2 ,沿球的半径向内.

取静止的粗糙水平面为参考系统.棒向下滑动,使得球壳向前滚动.

选定坐标 取球心的初始位置为原点, y 轴竖直向上, x 轴水平向右.

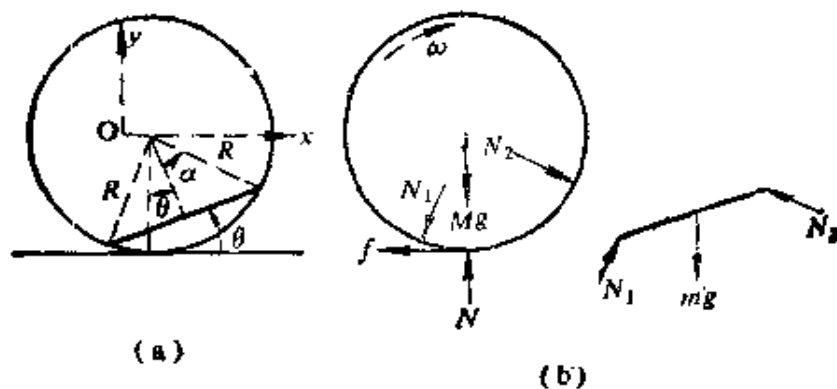


图 1-21

球心的坐标记作 $(X, 0)$, 球壳绕球心转动的角速度记作 ω . 因为滚动是无滑动的, 所以

$$\dot{X} = R\omega \quad (1)$$

棒的中点的坐标记作 (x, y) , 则

$$\begin{cases} x = X + R \cos \alpha \sin \theta, \\ y = -R \cos \alpha \cos \theta. \end{cases} \quad (2)$$

$$\quad \quad \quad (3)$$

棒绕其中点转动的角速度是 $\dot{\theta}$.

约束方程(1)–(3)指出在 X, x, y, ω, θ 之中只有两个独立变数. 事实上, (1)–(3)正是把 x, y, ω 用 X 与 θ 两个变数表示出来.

运动定理 棒的一端与光滑球壳的相互作用力 N_1 垂直于球壳, 而棒端的滑动是沿着球壳进行的, 所以 N_1 这一对相互作用力对棒所作的功与对球壳所作的功之和为零. 同理, 棒的另一端与球壳的相互作用力 N_2 所作功之和也为零. 地面支承力 N 和静摩擦力 f 都不做功. 重力 Mg 与 mg 是势力. 因此, 球壳与棒这系统的机械能守恒,

$$\begin{aligned} mgy_0 = mgy + \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} m\dot{y}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} m(R \sin \alpha)^2 \dot{\theta}^2 \\ + \frac{1}{2} M\dot{X}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} MR^2 \omega^2. \end{aligned}$$

用(1)–(3)消去上式中的 x, y 和 ω ,

$$mgR \cos \alpha (\cos \theta - \cos \theta_0) = \frac{1}{6} (5M + 3m) \dot{X}^2$$

$$+ \frac{1}{6} mR^2(3 \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) \dot{\theta}^2 + mR \dot{X} \dot{\theta} \cos \alpha \cos \theta. \quad (4)$$

这式中除 θ 以外还有 X ，我们要设法消去 X 。

为消去 X ，利用质心运动定理

$$-f = M\ddot{X} + m\ddot{x} = (M + m)\ddot{X} + mR \cos \alpha \frac{d^2}{dt^2}(\sin \theta). \quad (5)$$

可是(5)中又出现了 f ，这是需要消去的。可再运用球壳绕其质心转动的角动量定理

$$fR = \frac{2}{3}MR^2\dot{\omega} = \frac{2}{3}MR\dot{X}. \quad (6)$$

从(5)和(6)消去 f ，得

$$\frac{1}{3}(5M + 3m)\ddot{X} + mR \cos \alpha \frac{d^2}{dt^2}(\sin \theta) = 0.$$

积分一次。计及初始条件“于 $t = 0$ ， $\dot{X} = 0$ ， $\dot{\theta} = 0$ ”即得

$$\frac{1}{3}(5M + 3m)\dot{X} + mR \cos \alpha \frac{d}{dt}(\sin \theta) = 0.$$

由此，

$$\dot{X} = -\frac{3mR \cos \alpha}{5M + 3m} \frac{d}{dt}(\sin \theta) = -\frac{3mR \cos \alpha}{5M + 3m} \dot{\theta} \cos \theta, \quad (7)$$

以此式代入(4)就消去了 X 而得出

$$\begin{aligned} & 6g(5M + 3m)(\cos \theta - \cos \theta_0) \cos \alpha \\ & = R[(5M + 3m)(3 \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) - 9m \cos^2 \alpha \cos^2 \theta] \dot{\theta}^2. \end{aligned}$$

分析力学

上一章的论述是按“牛顿方式”进行的,即借助图形,运用形象化的思维,分析物体受力情况和运动情况,然后通过运动学方程把物体的受力情况和运动情况联系起来。它着重分析力、动量、速度、加速度、角动量、力矩等矢量,所以被称作“矢量力学”。由于它运用牛顿运动定律处理力学问题,又称作“牛顿力学”^①。

作为力学科学的创始人,牛顿的贡献是伟大的,他发现了制约机械运动的普遍规律(牛顿运动定律),发明了运用这种规律的数学方法(微积分)。牛顿力学的巨大成就使当时科学界甚至以为一切物理问题都可归结为力学问题并从而按“牛顿方式”解决。今天,我们知道,各种物理现象各有其特殊性,不能都归结为力学问题。

即使仅就力学问题而论,“牛顿方式”也未必是最合适的。实际的力学系统往往存在种种限制或称约束,约束对运动限制体现为“力”即所谓约束力,而这些约束力又取决于运动情况,一般说来将作为未知数出现于运动方程中,这不免给解算增添很多麻烦。这样,牛顿方式对于受约束的力学系统并不方便。

再则,建立了系统的运动方程,并不意味大功就已告成,因为还没有一个一般的方法求得运动微分方程的解,即找到方程的积分。如著名的重刚体定点转动问题和三体问题,在一般情况下找不到足够的第一积分。如何寻找方程的积分以及最有效的利用这些积分,如何定性地研究解的结构和定量地进行计算,这些都是力学中极为重要的课题。牛顿方式在这些问题上会遇到困难。

^① 有时也把非相对论非量子理论的力学,包括下面论述的分析力学,泛称为牛顿力学。

此外,研究光、电磁场、微观粒子等的物理现象时,整个牛顿力学的基本观念如时间的绝对性与时空分离的观念,质能分离的观念,运动确定性描述的观念等都受到了挑战。在人们不得不承认新的物理事实——相对论效应,波粒二象性等——之后,就极需要在已成熟的古典力学理论中寻找这样一种理论的形式和方法,它能较顺利地超越古典概念的束缚,自然地跳向非古典力学——相对论力学、量子力学等。

分析力学是数学、力学研究者在牛顿以后为克服上述困难所取得的成果的一部分,在一定程度上解决了上述问题(并未全部解决,有关的研究现在还在继续)。分析力学给出了力学系统在完全一般性的广义坐标下具有不变形式的动力学方程组,并突出了能量函数的意义,分析力学甚至概括了比牛顿力学广泛得多的系统,例如在电气系统、控制系统中的应用就是一个明显的例子。分析力学的数学形式有着极好的性质,它不仅提供了解决天体力学及一系列动力学问题的较佳途径,同时给量子力学的发展提供了启示,最适宜于成为引向现代物理的跳板。其最小作用量原理提供了建立相对论力学和量子力学最简练而富有概括性的出发点。直到最近,分析力学在非线性非完整系统中的研究,非保守系统中奇异吸引子的发现以及有关“浑沌”现象的研究等等,正在丰富分析力学的内容,且大大开阔它的应用范围。

第二章 达朗伯原理

§ 8. 约 束

物体的机械运动就是物体在空间的位置随着时间的推移而变动。几乎所有力学系统的机械运动都受到这样那样的限制。对机械运动所加的强制性的限制条件叫作**约束**。约束条件对运动的限制必定由一些力来体现。不过,这些力一般不是给定的,而是与运动状况有关的未知力。因此,对于动力学问题,约束也应作为一个基本因素加以考虑。为此,我们先对约束的种类和性质作一分析。

(1) 约束及其分类

为描述一个质点的位置,可用质点的径矢 \mathbf{r} 或三个坐标(例如直角坐标 x, y, z) 表示,质点的运动则由径矢随时间 t 的变化 $\mathbf{r}(t)$ 或三个坐标随时间的变化[例如 $x(t), y(t), z(t)$] 描述。 n 个质点组成的系统的位置,则应由 n 个径矢或 $3n$ 个坐标描述,它们确定每一时刻各质点的位置以及质点组的形状,即确定系统的**位形**。这 $3n$ 个坐标不必一定取直角坐标,根据问题的具体情况,有时选取某种其它的坐标可能会更方便一些。

但是,在某种意义上说,给定系统的位形还没有决定系统在该时刻的“力学状态”,因为仅由某时刻的位形并不能根据运动定律预言系统在下一个时刻的位形。在给定了某时刻全部坐标的数值的情况下,系统在该时刻的速度如未确定,则下一个时刻(也就是说,经过无穷小的时间间隔 dt 后)系统的位形就无从判定。对于 n 个质点的系统,除了 n 个径矢 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n$ 或 $3n$ 个坐标 u_1, u_2, \dots, u_{3n} 外,还需知道 n 个速度矢量 $\dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_2, \dots, \dot{\mathbf{r}}_n$ 或 $3n$ 个速

度 $\dot{u}_1, \dot{u}_2, \dots, \dot{u}_n$ 才能确定系统的**状态**。为什么系统的坐标和速度合在一起构成状态呢？这是因为一旦给定了某一时刻的坐标和速度，由动力学方程原则上单值地确定了该时刻的加速度，因而能够唯一地确定下一个时刻（或前一个时刻）的坐标和速度，由此又能确定（由动力学方程）再下一个时刻（或再前一个时刻）的加速度，以此类推，能够唯一地确定系统的过去和未来。也就是说，当知道某一时刻的状态，原则上就知道了系统在任一时刻的状态。

约束是对系统的状态的强制性限制。几乎所有的力学系统都存在着约束，例如，刚体内任意两质点间的距离保持不变，两个刚体用铰链连接，轮子在地面上无滑动地滚动，两个质点用不可伸长的绳连接等等。对状态的限制也就是对力学系统内各质点的位置和速度加以限制，其一般的数学表示式是

$$f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n; \dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_2, \dots, \dot{\mathbf{r}}_n; t) = 0, \quad (8.1)$$

或
$$f(u_1, u_2, \dots, u_n; \dot{u}_1, \dot{u}_2, \dots, \dot{u}_n; t) = 0. \quad (8.2)$$

这种方程称为**约束方程**，坐标和速度必需满足的条件称为**约束条件**。为简明起见， u_1, u_2, \dots, u_n 可认为是 n 个质点的直角坐标 $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n$ 。

某些约束仅对力学系统的几何形象加以限制，即仅对系统的位形加以限制，而对各质点的速度没有限制，这种约束称为**几何约束**，其数学表示式是(8.1)或(8.2)不含速度 \dot{r} 或 \dot{u} 的特殊情况，即

$$f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n; t) = 0, \quad (8.3)$$

或
$$f(u_1, u_2, \dots, u_n; t) = 0, \quad (8.4)$$

例如，刚体内任意两点间的距离保持不变就是一种几何约束，

$$(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^2 - r_{ij}^2 = 0, \quad (8.5)$$

或
$$(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2 - r_{ij}^2 = 0, \quad (8.6)$$

其中 $\mathbf{r}_i(x_i, y_i, z_i)$ 和 $\mathbf{r}_j(x_j, y_j, z_j)$ 分别是第 i 个和第 j 个质点的径矢(坐标)， r_{ij} 是两质点间的距离(常量)。

对于涉及力学系统运动情况的约束，即对速度也有限制的，则称为**运动约束**，其数学表示式就是一般的(8.1)或(8.2)，其中显含

速度。例如半径为 R 的圆柱在地面上沿着直线作无滑动地滚动(图 2-1), 这意味着着地点的速度为零。这着地点一方面随着圆柱轴运动, 其速度为向前的 \dot{x}_0 ; 另一方面, 它又参与围绕圆柱轴的转动, 其速度为向后的 $R\dot{\theta}$ (θ 是圆柱横截面上某一特定半径与向下竖直线之间的夹角)。因此, 着地点速度为零就是说

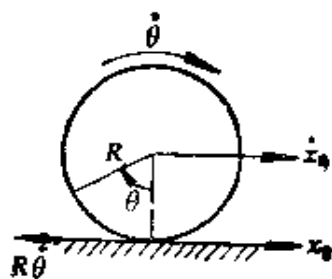


图 2-1

$$\dot{x}_0 - R\dot{\theta} = 0.$$

这就是一种运动约束。运动约束亦称为**微分约束**或**速度约束**。

几何约束的约束方程虽然不显含速度项, 但实际上它在对位置限制的同时也对系统的速度给予了限制。事实上, 由式(8.4)对时间求全导数, 得

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial u_i} \dot{u}_i + \frac{\partial f}{\partial t} = 0,$$

其中 $\frac{\partial f}{\partial u_i}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial t}$ 是 u (指 u_1, u_2, \dots, u_n) 和 t 的函数。这正是运动约束的表示式。反之, 有些运动约束又可以通过积分成为几何约束, 例如圆柱无滑动地滚动的约束方程很容易积分为

$$x_0 - R\theta + \text{常量} = 0,$$

这就化成几何约束的约束方程。这样, 可积分的运动约束与几何约束在物理实质上没有区别, 合称为**完整约束**。

但并不是所有的运动约束的约束方程都可积。不可积的运动约束, 也就是说, 不能化为几何约束的运动约束, 它们在物理实质上不同于几何约束, 称为**非完整约束**。几何约束和运动约束的分类是按数学表达形式来分类, 完整约束和非完整约束的分类是按物理实质来分类。为了对非完整约束有一个具体的了解, 举例如下。

具有尖锐边缘的薄圆盘在粗糙面上无滑动地滚动(图2-2),则

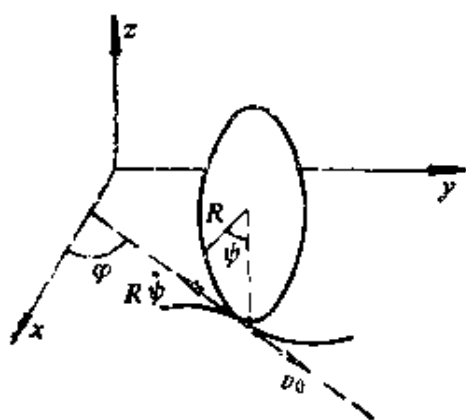


图 2-2

圆盘着的地点的速度为零。薄圆盘的盘面是可以转动的,但如盘面始终保持竖直,着地点的速度为零,可表为

$$v_0 - R\dot{\phi} = 0.$$

把上式投影于 x 轴和 y 轴即得

$$\begin{cases} \dot{x}_0 - R\dot{\phi} \cos \varphi = 0, \\ \dot{y}_0 - R\dot{\phi} \sin \varphi = 0, \end{cases}$$

式中 x_0 和 y_0 是盘心的坐标,这两个微分关系是不能积分的。

事实上,当薄圆盘沿着长度各不相同的不同闭合曲线循行一周回到原处时,盘心坐标 (x_0, y_0) 和角 φ 都可以回复到原来的值,但 ϕ 却未必也恰好回复原值。这就是说,在 x_0, y_0, φ 和 ϕ 之间并不存在一种确定不移的关系,换句话说,这种运动约束是不可能积分的。我们也可以把这种运动约束表为

$$\begin{cases} dx_0 - R \cos \varphi d\phi = 0, \\ dy_0 - R \sin \varphi d\phi = 0. \end{cases}$$

再考虑一个冰面上滑行的冰刀的简化模型。假定将冰刀抽象为以刚性轻杆相连的两个质点,并设两质点质量相等,杆长为 l ,当冰刀在冰面上运动时,质心(杆的中点)的速度只能沿杆的方向。选两质点在冰面上的坐标为 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) , 则约束条件为

$$\begin{cases} (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = l^2, \\ \begin{cases} \dot{x}_1 + \dot{x}_2 = \frac{x_2 - x_1}{l} \dot{l} \\ \dot{y}_1 + \dot{y}_2 = \frac{y_2 - y_1}{l} \dot{l} \end{cases} \end{cases}$$

前一个约束条件反映杆长不变,是几何约束,即完整约束。后一个约束条件反映质心速度沿杆的方向,是运动约束;由于它是不可积的,即不能化为几何约束,因而是非完整约束。后一个约束也可表为

$$\frac{dx_1 + dx_2}{dy_1 + dy_2} = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$$

这意味着它是对无限小变化的限制。

约束还分为**定常约束**和**非定常约束**。定常约束不直接依赖于时间，其数学表达式不显含时间 t ；非定常约束则直接依赖于时间，其数学表达式显含时间 t 。

此外，约束还分为单侧约束与双侧约束。单侧约束只在某一侧限制系统的运动，至于向另一侧的运动则是完全自由的。例如单摆的不可伸长的悬绳限制摆球不得向绳伸长的方向运动，但向绳缩短的方向运动却是自由的，因此将摆球限制在以悬挂点为中心，绳长为半径的圆内，而不是圆周上。单侧约束的数学表示式是不等式，一般可写为

$$f(r_1, r_2, \dots, r_n; \dot{r}_1, \dot{r}_2, \dots, \dot{r}_n, t) \leq 0.$$

称为**约束不等式**。单侧约束是有可能解除的。约束是否解除或者何时解除，需要从运动方程解出约束力，再从约束力的指向是否正确来判断。双侧约束限制着不论哪一侧的运动，其数学表示式是(8.1)或(8.2)所示的约束方程。

(2) 约 束 力

根据牛顿定律，一切影响质点机械运动的因素都归结为力。因此约束作用也可以归结为力。事实上，当力学系统的运动有违背约束条件的趋势时，这种趋势迫使体现约束的实体发生形变（虽然这种形变可能极其细微）。略为变形的实体则力图恢复而对力学系统施加弹性力，迫使力学系统**遵守约束条件**。这种迫使力学系统遵守约束条件的力叫作**约束力**。

约束力的大小随着力学系统违背约束的趋势的不同而自动调节，使约束条件总是得以满足。因此出现在运动方程中的约束力不可能预先给定，它只能从运动方程并结合约束方程解出来。

一般，将作用于第 i 个质点的约束力记作 N_i ，而把作用于同

一质点的其余的力称为**主动力**，记作 F_i 。力有种种不同的分类法，不同性质的分类有不同的用处。例如，将力分为内力和外力，内力在系统里是成对的，大小相等，沿同一直线而指向相反，从而不显现于动量定理(5.11)和角动量定理(5.12)。又如，力分为保守力和非保守力，保守力所作的功可用势能的减少来表达。我们即将看到，把力分为主动力和约束力，这种分类法对于研究约束系统是十分有益的。

有的书把约束力称为**约束反力**，因为这种力是体现约束条件的实体跟违背约束趋势对抗的反作用力。

(3) 约束使问题复杂

这里研究一个带有较多约束条件的例题。

例 图 2-3(a) 是离心调速器的简图。AB 边长 $2a$ ，固定于转轴。其余各斜臂的长度都是 l ，质量甚轻。两个小球的质量各为 m 。套管 CD 重 P ，套在转轴上，可以上下滑动。劲度系数为 k 的弹簧两端分别系于两个上臂的中点。在不转动时，弹簧恰好既不伸长也不缩短。各铰链都是光滑的。试求匀速转动的角速 ω 与张角 φ 的关系。

解 以转轴为参考系统，这是一个静力学问题。

由于各部分相互牵制，应当隔离物体，见图 2-3(b)~(e)。

选定 x, y 轴如图 2-3(a)。先研究套管 CD 的平衡问题(图 2-3(b))。它受到竖直向下的重力 P ，又受到两个下臂对它的作用力 R_1 。由于下臂只在两端受力，所以 R_1 必沿臂身，它的竖直分力则是 $R_1\left(\frac{y_1}{2l}\right)$ 即 $R_1 y_1/2l$ 。于是得平衡方程式

$$P - 2 \frac{R_1 y_1}{2l} = 0. \quad (1)$$

其次研究下臂的平衡问题(图 2-3(c))。它只在两端受力 R_1 与 R_2 ，所以两者都沿臂身。平衡方程式显然是

$$R_2 - R_1 = 0. \quad (2)$$

接着研究小球的平衡问题(图 2-3(d))。它受到竖直向下的重力 mg ，下臂对它的作用力 R_2 ，水平向外的惯性离心力 $m\omega^2 x_2$ ，以及上臂对它的作

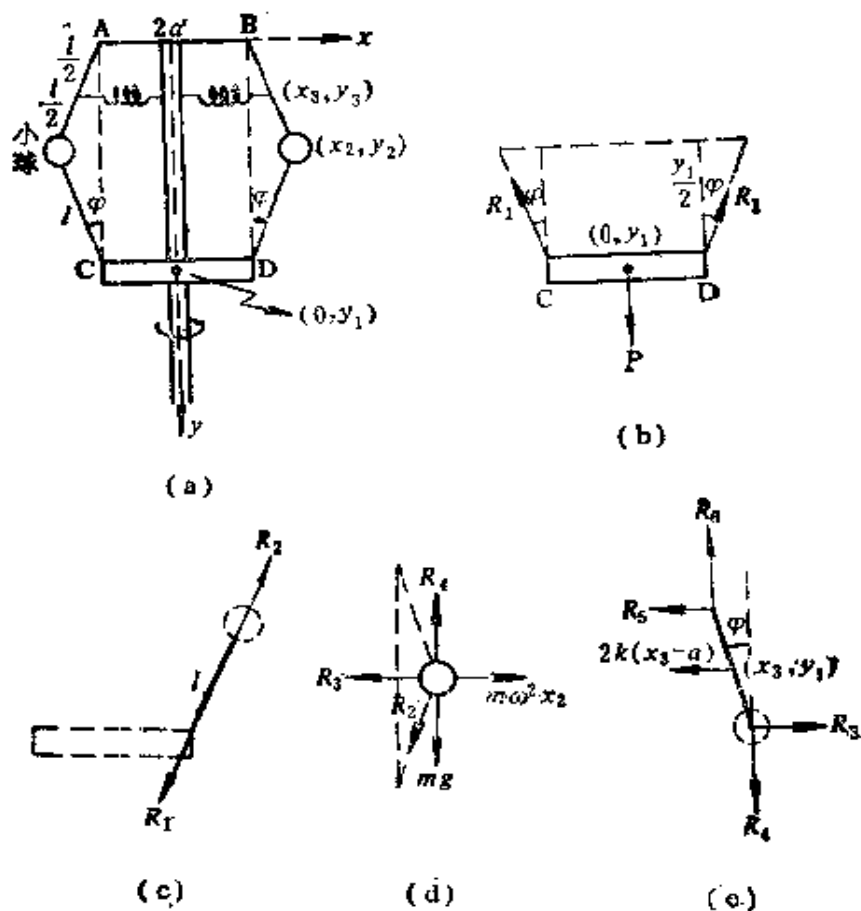


图 2-3

用力。上臂并非只在两端受力，所以上臂与小球的相互作用力不一定沿着臂身，今将其水平与竖直分力分别记作 R_3 与 R_4 。于是，水平与竖直方向的平衡方程分别为

$$\begin{cases} m\omega^2 x_2 - R_3 - R_2 \frac{x_2 - a}{l} = 0, & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} mg + R_2 \frac{y_2}{l} - R_4 = 0. & (4) \end{cases}$$

最后研究上臂的平衡问题(图 2-3(e))。它受到小球对它的水平作用力 R_3 与竖直作用力 R_4 ，弹簧的水平作用力 $2k(x_3 - a)$ ，以及 AB 杆对它的作用力。今将 AB 杆作用力的水平与竖直分力分别记作 R_5 与 R_6 。于是，水平与竖直方向的平衡方程分别为

$$\begin{cases} R_3 - 2k(x_3 - a) - R_5 = 0, & (5) \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_4 - R_6 = 0, & (6) \end{cases}$$

还有力矩的平衡方程(例如对于通过 B 点且垂直于纸面的轴)

$$R_4 l \cos \varphi - 2k(x_1 - a) \left(\frac{l}{2} \cos \varphi \right) - R_4 l \sin \varphi = 0, \quad (7)$$

在平衡方程组(1)–(7)之中, 除了 $y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, \varphi$ 六个坐标与角速 ω 以外, 还有未知的约束力 R_1, R_2, \dots, R_6 . 未知数个数超过了方程数.

其实, 各部分既然互相牵制, 上面列举的六个坐标并不独立. 容易看出, 它们之间存在着下列约束方程

$$y_1 = 2y_2, \quad (8)$$

$$\begin{cases} x_2 - a = 2(x_3 - a), & (9) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_2 = 2y_3, & (10) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x_1 - a)^2 + y_1^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2, & (11) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x_1 - a)/y_1 = \operatorname{tg} \varphi, & (12) \end{cases}$$

从方程(1)–(12)消去 y_1, x_2, y_2, x_3, y_3 五个坐标以及 R_1, R_2, \dots, R_6 六个约束力, 就可求得 ω 与 φ 的关系.

首先, 用 φ 表出所有其余的坐标. 由(11)和(12),

$$\begin{cases} x_1 = a + \frac{l}{2} \sin \varphi, \\ y_1 = \frac{l}{2} \cos \varphi. \end{cases}$$

由(9)和(10),

$$\begin{cases} x_2 = a + l \sin \varphi, \\ y_2 = l \cos \varphi. \end{cases}$$

由(8),

$$y_1 = 2l \cos \varphi.$$

于是, 平衡方程(1)–(7)改写成

$$\begin{cases} P - 2R_1 \cos \varphi = 0, \\ R_2 - R_1 = 0, \\ m\omega^2(a + l \sin \varphi) - R_1 - R_2 \sin \varphi = 0, \\ mg + R_2 \cos \varphi - R_1 = 0, \\ R_3 - kl \cos \varphi - R_2 = 0, \\ R_4 - R_3 = 0, \\ R_4 l \cos \varphi - \frac{k}{2} l^2 \sin \varphi \cos \varphi - R_4 l \sin \varphi = 0. \end{cases}$$

我们应从这方程组消去 R_1, R_2, \dots, R_6 .

R_5 只出现于第五个方程, R_6 只出现于第六个方程, 舍弃这两个方程, 可说已消去 R_5 和 R_6 . 从第一个方程解出 R_1 , 代入第二个方程就消去了 R_1 , 从第二个方程解出 R_2 , 代入第三个和第四个方程, 分别解出 R_3 和 R_4 , 再以 R_3 和 R_4 代入第七个方程, 即得

$$m\omega^2(a + l \sin \varphi)l \cos \varphi - \frac{1}{2} Pl \sin \varphi - \frac{k}{2} l^2 \sin \varphi \cos \varphi - mgl \sin \varphi - \frac{1}{2} Pl \sin \varphi = 0,$$

从而

$$\omega^2 = \frac{(2P + 2mg + kl \cos \varphi) \sin \varphi}{2m(a + l \sin \varphi) \cos \varphi}. \quad (13)$$

通过这个例题可以看到, 带有约束的力学问题, 按“牛顿方式”来求解时, (1) 未知数增多: 作为 N 个坐标的力学问题, 本应有 N 个未知数, 可是由于约束条件, 在运动方程中还出现一些未知的约束力. (2) 方程个数相应地增多: N 个坐标由约束方程相互联系, 从而不完全独立, 运动方程必须与约束方程联立起来解算. 增多后的未知数个数与方程个数仍然相等, 这在原则上是可以解算的. 但既然方程和未知数的个数增多了, 解算工作不免增添复杂性. 那么, 怎样才有可能避免这种复杂性呢?

§ 9. 自由度与广义坐标

n 个质点组成的力学系统的位形可由 n 个位矢 r_1, r_2, \dots, r_n 确定, 亦可由 $N = 3n$ 个直角坐标 u_1, u_2, \dots, u_N 即 $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \dots, (x_n, y_n, z_n)$ 表示. 如果该系统存在 m 个完整约束

$$f_i(u_1, u_2, \dots, u_N; t) = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (9.1)$$

那么, 在 N 个坐标之中, 有 m 个坐标可以从方程组(9.1)“解出”, 即有 m 个坐标可用其余 $N - m$ 个坐标表出, 因此只剩下 $s = N - m$ 个独立坐标. 力学系统的独立坐标的个数 s 叫作力学系统在有限

运动中的自由度，即单值地确定一个系统的位形所必需给出的独立量的数目。每一个完整约束方程使力学系统减少一个独立坐标，也就是说，使有限运动的自由度降低一。

其实，这 $s = N - m$ 个独立坐标并不一定在原来的 N 个坐标中挑选，完全可以自由地选定。选取 $s = N - m$ 个独立参数 q_1, q_2, \dots, q_s ，用以完全确定 N 个坐标的力学系统在 m 个完整约束下的几何形象(位形)。这就是说， q_1, q_2, \dots, q_s 完全确定了 $N = 3n$ 个坐标：

$$u_i = u_i(q_1, q_2, \dots, q_s, t) \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (9.2)$$

而且这 N 个坐标满足系统的完整约束条件。换句话说，以(9.2)代人各个完整约束方程得到的全是恒等式。这一组独立参数 q 叫作力学系统的**广义坐标**。既然广义坐标描写的力学系统的几何形象一定满足系统的完整约束条件，在引用广义坐标之后，就不必再把完整约束方程另外提出来。

广义坐标的选定可以是各种各样的。但是，选得恰当可能解算较简便，选得不当或许就很繁。比如上节例题，六个坐标遵从五个完整约束条件，从而只需一个广义坐标。该例选的是 φ 。也完全可以选取另一个坐标例如 y_1 作为广义坐标，不过这会导致 $x_2 = a + l \sin [\cos^{-1}(y_1/2l)]$ 之类复杂表达式。

一般情况下，总是尽可能选取使变换式(9.2)不显含时间的广义坐标。这在定常约束的条件下，总是可以做到的。

一般来说，广义坐标不再三个一组地组成矢量，其量纲也不一定是长度量纲。例如被约束在球面上的质点可用经度和纬度这两个角度作为广义坐标。总之，凡可以确定力学系统几何形象的任何物理量，都可选作广义坐标。

广义坐标表征系统的位形，系统的运动可表达为广义坐标 q_1, q_2, \dots, q_s 随时间的变化，即有

$$q_i = q_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, s \quad (9.3)$$

其随时间的变化率 $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s$ 称为**广义速度**。显然，广义速度

的蟹纲也不一定是速度量纲. 对于只有完整约束的力学系统来说, 不仅 s 个广义坐标全是独立的, 而且 s 个广义速度也全是独立的.

如果力学系统除了 m 个完整约束外, 还存在 k 个非完整约束 $f_j(u_1, u_2, \dots, u_N; \dot{u}_1, \dot{u}_2, \dots, \dot{u}_N; t) = 0$ ($j = 1, 2, \dots, k$), (9.4) 则这时并不能“解出” k 个坐标. 可见非完整约束并不能减少独立坐标的个数, 即并不降低有限运动的自由度. 完整约束使独立坐标的个数减少, 当然也使独立速度分量的个数随之减少. 非完整约束虽然并不减少独立坐标的个数即广义坐标的个数, 却会减少独立速度分量的个数. 这意味着减少独立的坐标无限小变化的个数. 我们称独立速度分量的个数为力学系统在**无限小运动中的自由度**. 因而每个约束方程, 不论是完整约束还是非完整约束, 都能使力学系统的无限小运动中的自由度降低一.

牛顿运动定律是微分定律, 着重的是速度变化率 dv/dt , 或者说, 着重的是无限小的时间 dt 里的速度改变量 dv . 分析力学研究问题的思路尽管跟矢量力学很不相同, 但读者将会看到它毕竟还是从无限小的变化中寻求动力学方程. 因此, 如果只用**自由度**三字, 那就总是指无限小运动中的自由度.

总之, n 个质点的力学系统, 若存在着 m 个完整约束和 k 个非完整约束, 那么, 质点的直角坐标数 $N = 3n$, 广义坐标个数等于 $N - m$, 自由度等于 $N - m - k$. 对于只存在完整约束的系统 ($k = 0$), 广义坐标的个数就是自由度. 如果存在非完整约束 ($k > 0$), 广义坐标的个数大于自由度. 运用广义坐标后, 不再需要考虑完整约束, 但非完整约束仍需考虑, 并应将它用相应的广义速度表示.

对于线性的速度约束, 其约束方程可表为

$$\sum_{i=1}^N A_{ji}(u_1, u_2, \dots, u_N; t) \dot{u}_i + A_j(u_1, u_2, \dots, u_N; t) = 0. \quad (9.5)$$

由于

$$u_i = u_i(q_1, q_2, \dots, q_s; t),$$

因而

$$\dot{u}_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^l \frac{\partial u_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha$$

(9.5)式可化为

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N A_{ji} \dot{u}_i + A_j &= \sum_{i=1}^N A_{ji} \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^l \frac{\partial u_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha \right) + A_j \\ &= \sum_{\alpha=1}^l B_{j\alpha} \dot{q}_\alpha + B_j = 0, \end{aligned}$$

其中

$$B_j = \left(\sum_{i=1}^N A_{ji} \frac{\partial u_i}{\partial t} + A_j \right) \Big|_{u \rightarrow q} = B_j(q_1, q_2, \dots, q_s; t),$$

$$B_{j\alpha} = \left(\sum_{i=1}^N A_{ji} \frac{\partial u_i}{\partial q_\alpha} \right) \Big|_{u \rightarrow q} = B_{j\alpha}(q_1, q_2, \dots, q_s; t).$$

这样,直角坐标系中,对速度是线性的约束方程,改用广义坐标和广义速度表示出来:

$$\sum_{\alpha=1}^l B_{j\alpha} \dot{q}_\alpha + B_j = 0 \quad (9.6)$$

仍然是广义速度的线性约束方程。

对于一般的非完整约束,利用

$$u_i = u_i(q_1, q_2, \dots, q_s; t),$$

以及

$$\dot{u}_i = \sum_{\alpha=1}^l \frac{\partial u_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial u_i}{\partial t},$$

立即可得

$$\begin{aligned} f(u_1, u_2, \dots, u_N; \dot{u}_1, \dot{u}_2, \dots, \dot{u}_N; t) \Big|_{u \rightarrow q} \\ = f(q_1, q_2, \dots, q_s; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s; t) = 0, \end{aligned}$$

仍然是广义坐标和广义速度的一般非完整约束,即对广义坐标和广义速度之间的制约方程,而不会涉及广义加速度等。

§ 10. 虚功原理 达朗伯原理

用 s 个独立的广义坐标取代那 N 个不完全独立的坐标，这固然使问题前进了一步。但是，如果仍然按“牛顿方式”研究力学问题，即把着眼点停留在力与加速度一类矢量的关系式上，那么这些矢量关系式仍然只能参照 N 个坐标分解为 N 个分量的关系式。这就不但不可能充分发挥广义坐标的优越性，而且未知的约束力仍出现在运动方程中，即使我们并不想求解约束力，也不得不把运动方程和约束方程联立求解，增添了问题的复杂性。

那么，怎样才能改变“牛顿方式”，把机械运动的规律表为一种新的形式，而在这种形式中不出现约束反力？这一可能性显然是很值得探讨的。

车轮在粗糙地面上无滑动地滚动，地面对车轮的静摩擦力就是使车轮不滑动的约束力，而静摩擦力并不做功。刚体的内力保证刚体具有不变的形状，这也是一种约束力，而刚体内力所作的功的和为零。还有，当两刚体用光滑铰链连接起来时，铰链上的约束力所作功的总和也为零。这些例子启示我们，可以尝试从功着手研究问题，以使约束力在运动方程中不出现。

(1) 虚位移

参看 § 8(3) 关于离心调速器 (图 2-3(a)) 的例题。如果我们只局限于实际上所能实现的那一种情况，具体地说，对于给定的角速 ω ，局限于讨论满足该例题 (13) 式的张角 φ ，即只考虑这个 φ 值而不研究其变化，我们就不能直截了当地鲜明地揭示调速器各个关节都起着甚么作用。比方说，在同一张角 φ 情况下，各关节可以被固定而不能活动，这种情况跟我们所研究的情况就有可能混同起来。

因此，为了充分显示力学系统各部分的关联、力学系统与外界

的联系以及施加于力学系统各力所起的不同作用，我们的研究不应局限于实际上实现的那一运动情况，而应考虑约束条件所允许的一切可能的运动情况。这里“可能的”一词完全是指约束而言的，不涉及运动定律。因为按运动定律的要求，只有实际实现的那种运动情况才是可能的，其他情况都不符合运动定律。

为此，我们引入**虚位移**的概念。对于定常约束，一切想象的符合约束条件的无限小的可能位移定义为**虚位移**。通常把第 i 个质点的虚位移记作 δr_i ，以示不同于真实位移 dr_i 。在非定常约束的情况，假定约束被瞬时“冻结”起来，符合该瞬时的约束条件的无限小可能位移就是相应于该瞬时的**虚位移**。对前一情况，真实位移是虚位移中的一个；后一情况，真实位移并非虚位移中的一个，它应满足时间并不“冻结”的约束条件。

设有 n 个质点的系统，存在 m 个完整约束，其约束方程为

$$f_j(r_1, r_2, \dots, r_n; t) = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, m). \quad (10.1)$$

设 $\delta r_1, \delta r_2, \dots, \delta r_n$ 是满足约束条件的虚位移，则

$$f_j(r_1 + \delta r_1, r_2 + \delta r_2, \dots, r_n + \delta r_n; t) = 0 \quad (10.2)$$

对 δr_i 作多元函数的泰勒展开 (t 被“冻结”)，略去二次以上的项，得

$$\sum_{i=1}^n \nabla_i f_j \cdot \delta r_i = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (10.3)$$

满足(10.3)的一组 δr_i 就是虚位移。

而真实位移 dr_i 是一个在时间 dt 间隔中完成的位移，为使其满足约束条件，必须将(10.2)式改写为

$$f_j(r_1 + dr_1, r_2 + dr_2, \dots, r_n + dr_n; t + dt) = 0,$$

于是得

$$\sum_{i=1}^n \nabla_i f_j \cdot dr_i + \frac{\partial f_j}{\partial t} dt = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, m). \quad (10.4)$$

(10.4) 式是约束对真实位移的限制条件，即时间不被“冻结”的可能位移应满足的条件。如约束是定常的，(10.3) 等同于(10.4)。

(2) 虚功原理

力和位移的标积称为力所作的功，力与虚位移的标积自然就称为**虚功**。

把系统第 i 个质点所受的约束力记为 \mathbf{N}_i ，其虚位移记作 $\delta\mathbf{r}_i$ 。则系统约束力的虚功即约束力系在虚位移下所作功的总和为

$$\delta W = \sum_{i=1}^n \mathbf{N}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i.$$

值得指出的是存在着相当种类的约束，其约束力的虚功为零。例如：

1. 质点沿固定的光滑曲面运动，约束方程为

$$f(x, y, z) = 0.$$

质点的虚位移 $\delta\mathbf{r} = (\delta x, \delta y, \delta z)$ 应满足

$$\frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z = 0,$$

即虚位移垂直于曲面的法向 $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$ 。由于约束面是光滑的，约束力沿曲面的法向，即

$$\mathbf{N} = \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right).$$

因此虚功为

$$\delta W = \mathbf{N} \cdot \delta\mathbf{r} = \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z\right) = 0.$$

2. 质点沿运动的光滑曲面运动，约束方程为

$$f(x, y, z, t) = 0.$$

质点的虚位移应满足

$$\frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z = 0,$$

跟上例相同，虚位移 $\delta\mathbf{r}$ 垂直于曲面的法向，而约束力 \mathbf{N} 沿着曲面

的法向,因此虚功为零。即

$$\delta W = \mathbf{N} \cdot \delta \mathbf{r} = 0.$$

注意,这里约束力所作的真实的功并不为零,因为真实位移 $d\mathbf{r}$ 满足

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial t} dt = 0,$$

它并不垂直于曲面的法向。约束力的虚功为零,这完全是因为虚位移在“冻结”了的 ($\delta t = 0$) 曲面的切平面上。

3. 质点约束在光滑曲线(变动或不变动)上运动。这种情形可以看成质点约束在两个光滑曲面上的运动,其约束方程为

$$\begin{cases} f_1(x, y, z, t) = 0, \\ f_2(x, y, z, t) = 0. \end{cases}$$

虚位移 $\delta \mathbf{r} = (\delta x, \delta y, \delta z)$ 应满足下列方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f_1}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f_1}{\partial z} \delta z = 0, \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f_2}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f_2}{\partial z} \delta z = 0. \end{cases}$$

这也是约束力和虚位移垂直的情况,故 $\delta W = 0$ 。

4. 刚性约束。设刚体中两质点的径矢分别为 \mathbf{r}_i 和 \mathbf{r}_j , 则约束方程为

$$(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^2 - l_{ij}^2 = 0.$$

这两质点彼此作用的约束力 \mathbf{N}_i 和 \mathbf{N}_j 是一对内力,它们大小相等方向相反,并且沿着两点联线的方向,即 $\mathbf{N}_i = -\mathbf{N}_j = \lambda(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$ 。由约束方程可知虚位移应满足

$$2(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \cdot (\delta \mathbf{r}_i - \delta \mathbf{r}_j) = 0.$$

因此约束力的虚功

$$\delta W = \mathbf{N}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i + \mathbf{N}_j \cdot \delta \mathbf{r}_j = \lambda(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \cdot (\delta \mathbf{r}_i - \delta \mathbf{r}_j) = 0.$$

所以,尽管刚体中每个质点所受的约束力 \mathbf{N} 和自身的虚位移 $\delta \mathbf{r}$ 的方向并不一定垂直,每个质点的约束力的虚功 $\mathbf{N} \cdot \delta \mathbf{r}$ 并不等

于零,但整个约束力系的虚功之和则恒为零。

此外,如光滑铰链,两刚体以光滑表面接触而运动,两刚体以完全粗糙的表面接触运动,张紧且不可伸长的柔绳形成的约束等等,约束力的总虚功都为零。

我们称上述各种约束为**理想约束**。显然,理想约束是一种理想化模型,犹如光滑性、刚性、不可伸长性等理想化的性质,虽不能完全达到,但毕竟是一种科学的抽象。理想约束的条件是

$$\delta W = \sum_{i=1}^n \mathbf{N}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0. \quad (10.5)$$

现在考虑静力学问题,即力学系统处于平衡的问题。这说的是系统的每一部分都处于平衡,即每一质点都是处于平衡。这样,作用于第 i 个质点的主动力 \mathbf{F}_i 和约束力 \mathbf{N}_i 的合力应为零,即

$$\mathbf{F}_i + \mathbf{N}_i = 0. \quad (10.6)$$

于是,作用于第 i 质点所有各力的虚功之和 δW_i 为零,

$$\delta W_i = \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i + \mathbf{N}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0.$$

就所有质点进行累加,即

$$\delta W = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i + \sum_{i=1}^n \mathbf{N}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0. \quad (10.7)$$

在理想约束条件下 $\sum \mathbf{N}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$, (10.7) 归结为

$$\delta W = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0. \quad (10.8)$$

这称为**虚功原理**。虚功原理指出,当一个只有理想约束的力学系统处于平衡状态时,作用于该力学系统的所有主动力的虚功之总和为零。

其实,即使有非理想的约束,仍然可以应用虚功原理(10.8),只要把 \mathbf{F}_i 理解为既包括主动力又包括非理想约束反力即可。

(3) 广义坐标下的虚功原理

运用虚功原理研究平衡问题,诚然不再需要考虑约束力(确切地说,理想约束的约束力),可是,虚功原理牵涉到虚位移,而虚位

移带有很大任意性。因此,还需要设法甩掉或舍去虚位移,才可以得到具体而明确的平衡条件。

这里的问题在于虚位移并不独立。假如各个 $\delta \mathbf{r}_i$ 是独立的,我们就可令 $\delta \mathbf{r}_1 \neq 0$, 其他各 $\delta \mathbf{r}_i$ 全为零,从(10.8),得到 $\mathbf{F}_1 = 0$; 同理可得所有 $\mathbf{F}_i = 0$, 这就甩掉了虚位移。可是,由于约束条件的限制,各个虚位移 $\delta \mathbf{r}_i$ 并不独立,因而不能得出 $\mathbf{F}_i = 0$ 。事实上, $\mathbf{F}_i = 0$ 也是与(10.6)互相矛盾的。

为解决这个困难,引用广义坐标。任何一个质点的径矢 \mathbf{r}_i 都可用 s 个广义坐标表示,

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_s; t). \quad (10.9)$$

因而质点的虚位移也可用广义坐标的虚位移(称为**广义虚位移**)表示,

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha. \quad (10.10)$$

将上式代入虚功原理,于是得到广义坐标下的虚功原理

$$\begin{aligned} \delta W &= \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \left(\sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha \right) \\ &= \sum_{\alpha=1}^s \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \right) \delta q_\alpha = 0 \end{aligned} \quad (10.11)$$

把各个广义虚位移 δq_α 的系数记作 Q_α ,

$$Q_\alpha = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha}. \quad (10.12)$$

由于 Q_α 与广义坐标的乘积的量纲为功的量纲,所以通常把 Q_α 称为**广义力**。既然广义坐标的量纲未必是长度的量纲,所以广义力的量纲也未必是力的量纲。例如某个广义坐标 q_α 是角度,则相应的广义力 Q_α 必具有力矩的量纲。利用广义力的定义(10.12),就可把虚功原理用广义力与广义虚位移表出,

$$\delta W = \sum_{\alpha=1}^s Q_{\alpha} \delta q_{\alpha} = 0. \quad (10.13)$$

对于完整约束, 这 s 个广义虚位移 δq_{α} 都是独立的, 于是, (10.13) 的各系数 Q_{α} 应分别为零,

$$Q_{\alpha} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_{\alpha}} = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s). \quad (10.14)$$

这就是终于舍去了虚位移之后所得的平衡方程组。

在具体问题中, 不必照搬(10.14), 照搬(10.14)往往并不简便, 反而不如引用广义坐标而直接计算虚功。因此, 重要的是掌握从(10.8)到(10.14)的推理过程, 领会了这一思路就能顺利地找出各个具体问题中的平衡方程。

例 1 利用起重滑车(神仙葫芦)吊起重物(图 2-4), 为维持平衡, 人手所施的力 F 应为多大? 设滑轮的转动是无摩擦的, 链是不可伸长的, 滑车的轮与轴的半径分别为 R 与 r 。

解 本题的约束是理想约束, 所需考虑的主动动力为手所施的力 F 与重物的重量 P 。

系统只有一个自由度, 设想滑车具有逆时针方向的虚角位移 $\delta\varphi$, 于是, 手所施力 F 的作用点的虚位移为竖直向下的 $R\delta\varphi$, 而力 F 的虚功为 $FR\delta\varphi$, 再看重物的虚位移, 动滑轮左边的链向下虚位移 $r\delta\varphi$, 右边的链向上虚位移 $R\delta\varphi$, 所以重物的虚位移是向下 $(r-R)\delta\varphi/2$, 即 $-(R-r)\delta\varphi/2$, 而重力 P 的虚功为 $-P(R-r)\delta\varphi/2$, 运用虚功原理,

$$\left\{ FR - \frac{1}{2} P(R-r) \right\} \delta\varphi = 0.$$

因为 $\delta\varphi$ 是任意的, 所以上式的大括号必须为零, 由此解得

$$F = \frac{R-r}{2R} P.$$

可见, 滑车的轮半径 R 与轴半径 r 之差越小则越省力。

例 2 两根刚杆用光滑铰链连结如图 2-5。上杆长 l_1 , 质量为 m_1 , 下杆长 l_2 , 质量为 m_2 , 在下杆的下端施加不变的水平力 F , 试求平衡时两杆各自同竖直线的夹角 θ_1 和 θ_2 。

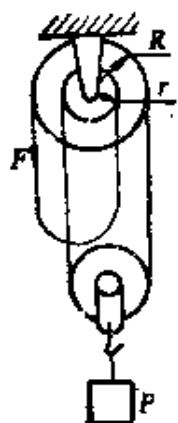


图 2-4

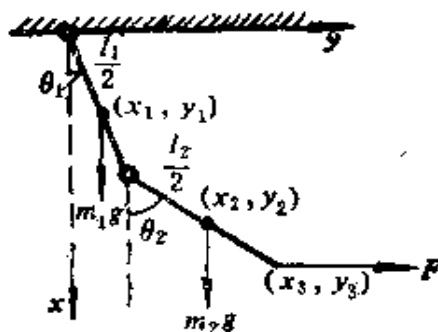


图 2-5

解 光滑铰链是理想约束。所需考虑的主动动力有：水平力 F ，重力 m_1g 和重力 m_2g 。

系统有两个自由度， θ_1 和 θ_2 就是系统的广义坐标。

按照虚功原理，

$$m_1g\delta x_1 + m_2g\delta x_2 + F\delta y_3 = 0. \quad (1)$$

从图2-5容易看出： x_1, x_2 和 y_3 可用广义坐标 θ_1 和 θ_2 表为

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2} l_1 \cos \theta_1, & x_2 &= l_1 \cos \theta_1 + \frac{1}{2} l_2 \cos \theta_2, \\ y_3 &= l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2. \end{aligned} \quad (2)$$

把(2)代入(1)，

$$\begin{aligned} &\left(F \cos \theta_1 - m_1g \frac{1}{2} \sin \theta_1 - m_2g \sin \theta_1 \right) l_1 \delta \theta_1 \\ &+ \left(F \cos \theta_2 - m_2g \frac{1}{2} \sin \theta_2 \right) l_2 \delta \theta_2 = 0. \end{aligned}$$

既然 $\delta \theta_1$ 与 $\delta \theta_2$ 是任意的并且互相独立，上式两个括号之值分别等于零，即

$$\begin{cases} F \cos \theta_1 - \left(m_2 + \frac{1}{2} m_1 \right) g \sin \theta_1 = 0, \\ F \cos \theta_2 - \frac{1}{2} m_2 g \sin \theta_2 = 0. \end{cases}$$

由此解得

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{2F}{(2m_2 + m_1)g}, \quad \operatorname{tg} \theta_2 = \frac{2F}{m_2g} \quad (3)$$

(4) 主动力全是保守力的情况

在主动力全是保守力的情况下, 广义力 Q_α 的表达式很容易求得。事实上, 根据势能 V 的定义, $\delta W = -\delta V$, 即

$$\delta V = - \sum_{\alpha=1}^s Q_\alpha \delta q_\alpha.$$

这就是说

$$Q_\alpha = - \frac{\partial V}{\partial q_\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s). \quad (10.15)$$

上式也可直接从 Q_α 的定义 (10.12) 推出^①。于是, 平衡方程 (10.14) 成为

$$\frac{\partial V}{\partial q_\alpha} = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s). \quad (10.16)$$

(9.11) 具有鲜明的物理意义: 势力作用下的力学系统, 如处于平衡, 则势能取极值 (如进一步加以区分, 可以说, 极小值对应于稳定平衡, 极大值对应于不稳定平衡)。

例 3 试判断平衡方程 (10.16) 是否适用于例 2。如果适用, 就用 (10.16) 重新求解例 2。

解 两杆的重力都是保守力, 相应的势能为 $-m_1 g x_1$ 和 $-m_2 g x_2$ 。不变的水平力 F 也可说是保守力, 相应的势能为 $-F y_1$ 。既然所有主动力都是保守力, (10.16) 是适用的。

这里,

^① 把主动力 F_i 用势能 V 表示: $F_i = -\nabla_i V$ (记号 ∇_i 代表矢量标符 $i \frac{\partial}{\partial x_i} + j \frac{\partial}{\partial y_i} + k \frac{\partial}{\partial z_i}$), 以此代入 (9.7),

$$\begin{aligned} Q_\alpha &= \sum_{i=1}^n F_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} = - \sum_{i=1}^n \nabla_i V \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \\ &= - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial V}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial V}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial q_\alpha} \right) = - \frac{\partial V}{\partial q_\alpha} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V &= -m_1 g x_1 - m_2 g x_2 - F \gamma_1 \\
 &= -l_1 \left[\left(m_1 + \frac{1}{2} m_2 \right) g \cos \theta_1 + F \sin \theta_1 \right] \\
 &\quad - l_2 \left[\frac{1}{2} m_2 g \cos \theta_2 + F \sin \theta_2 \right].
 \end{aligned}$$

应用(9.11),得平衡方程组

$$\begin{cases} \left(m_1 + \frac{1}{2} m_2 \right) g \sin \theta_1 - F \cos \theta_1 = 0, \\ \frac{1}{2} m_2 g \sin \theta_2 - F \cos \theta_2 = 0. \end{cases}$$

由此解得 $\operatorname{tg} \theta_1 = 2F / (2m_1 + m_2)g$, $\operatorname{tg} \theta_2 = 2F / m_2 g$.

(5) 约束力的求解——拉格朗日乘子法

引用广义坐标并应用虚功原理研究静力学问题的好处是不必考虑约束力,而且平衡方程的个数也少。但是,有些时候却要求计算某些约束力。这样的问题怎样解决呢?

如果我们一开始就把所有约束作为事实接受下来,如上所述,按照约束条件选取广义坐标,就不可能求解约束力。为了计算某些约束力,显然一开始可以不承认相应的约束条件。换句话说,在选取广义坐标时,可以暂不考虑相应的约束条件。这样选取的广义坐标实际上并不独立,它们之间有相应的约束条件相联系。这种情况下,广义坐标的个数将超过系统的自由度。尽管在理想约束条件下,也可得到用广义坐标表出的虚功原理

$$\delta W = \sum_{\alpha=1}^s Q_{\alpha} \delta q_{\alpha} = 0, \quad (10.17)$$

但由于 q_{α} 并不独立,从而 δq_{α} 不独立,因此平衡方程不再是 $Q_{\alpha} = 0$ ($\alpha = 1, 2, \dots, s$)。这 s 个 q 之间存在着选取广义坐标时没有考虑的约束条件(设为 l 个)

$$f_j(q_1, q_2, \dots, q_s, t) = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, l), \quad (10.18)$$

它们的微分形式是

$$\sum_{\alpha=1}^i \frac{\partial f_i}{\partial q_\alpha} dq_\alpha + \frac{\partial f_i}{\partial t} dt = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, l). \quad (10.19)$$

因为虚位移不是时间中的过程, 所以 $\delta t = 0$, 广义虚位移之间的联系是

$$\sum_{\alpha=1}^i \frac{\partial f_i}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, l). \quad (10.20)$$

把方程组(10.20)中各个方程分别乘以待定常数 λ_j , 并与虚功原理(10.17)相加, 可得

$$\sum_{\alpha=1}^i \left(Q_\alpha + \sum_{j=1}^l \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial q_\alpha} \right) \delta q_\alpha = 0 \quad (10.21)$$

这 s 个 δq_α 并不独立, 只有 $s - l$ 个 δq 是独立的。因此, 我们不能立即断定各个 $\left(Q_\alpha + \sum_{j=1}^l \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial q_\alpha} \right)$ 分别为零。不过, 我们总可以选取这 l 个乘子 λ_i , 使其中 l 个括号中的值等于零, 例如使前 l 个括号的值为零, 即

$$\begin{cases} Q_1 + \frac{\partial f_1}{\partial q_1} \lambda_1 + \frac{\partial f_2}{\partial q_1} \lambda_2 + \dots + \frac{\partial f_l}{\partial q_1} \lambda_l = 0, \\ Q_2 + \frac{\partial f_1}{\partial q_2} \lambda_1 + \frac{\partial f_2}{\partial q_2} \lambda_2 + \dots + \frac{\partial f_l}{\partial q_2} \lambda_l = 0, \\ \vdots \\ Q_l + \frac{\partial f_1}{\partial q_l} \lambda_1 + \frac{\partial f_2}{\partial q_l} \lambda_2 + \dots + \frac{\partial f_l}{\partial q_l} \lambda_l = 0. \end{cases} \quad (10.22)$$

若已知 q 的值, 由上面的方程组可解得 l 个 λ_j 。这样一来, 虚功原理的表达式(10.21)中已不出现前 l 个 δq_α , 只剩下后 $s - l$ 个 δq_α 的项。可认为这 $s - l$ 个 δq_α 是独立的, 作为它们的系数, 后 $s - l$ 个括号应分别为零。这样, 各个括号的值都为零, 即

$$Q_\alpha + \sum_{j=1}^l \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial q_\alpha} = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s). \quad (10.23)$$

平衡方程组(10.23)中含有 l 个待定的拉格朗日乘子 λ_j , 将平衡方

程组(10.23)和约束方程组(10.18)联立起来(共 $s + l$ 个方程),就可以解出 s 个 q_α 和 l 个待定乘子 λ_j .

现在,平衡条件不再是广义主动力 $Q_\alpha = 0$, 因为选取广义坐标时未计及的约束条件引起的约束力也在起作用. 拿(10.23)和(10.14)比较,可以看出, $\lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial q_\alpha}$ ($\alpha = 1, 2, \dots, s$) 是以广义力形式表示的约束力的各个“分力”, 这约束力正好保证第 j 个约束条件; 而 Q_α 则是以广义力形式表示的主动力的“分力”. 平衡条件现在可陈述为: 广义主动力和选取广义坐标时未计及的约束条件的广义约束力之和为零.

广义力属于整个系统, 其“分量”是按广义坐标分解的, 而不是按各质点的坐标分解的. 如果要求知道第 j 个约束条件给予第 i 个质点的约束力, 则选取广义坐标时, 应将此质点单独考虑: 取此质点的三个坐标(例如直角坐标 x_i, y_i, z_i) 作为三个特定的广义坐标, 而其余部分的广义坐标仍任意选取. 此时, 第 j 个约束条件(几何约束)对第 i 个质点的约束力的三个分量分别为 $\lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$,

$\lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial y_i}$, $\lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial z_i}$, 或写成矢量形式:

$$\mathbf{N}_i = \lambda_j \nabla_i f_j, \text{ 其中 } \nabla_i = i \frac{\partial}{\partial x_i} + j \frac{\partial}{\partial y_i} + k \frac{\partial}{\partial z_i}. \quad (10.24)$$

以一个质点为例, 如被约束在光滑曲面 $f(x, y, z, t) = 0$ 上, 其约束力的三个直角分量分别为 $\lambda \frac{\partial f}{\partial x}$, $\lambda \frac{\partial f}{\partial y}$, $\lambda \frac{\partial f}{\partial z}$, 或者用矢量记号: 约束力 $\mathbf{N} = \lambda \nabla f$. 这就是说, 约束力沿着标量函数 f 的梯度方向, 亦即沿着曲面 $f = 0$ 的法线方向.

例 4 试求例 2 两杆铰接处的相互作用力.

解 本题所求为两杆铰接处的约束力, 所以选取广义坐标时不考虑铰接的约束条件. 按照质心运动定理, 下杆所受的各个力, 包括铰接处的约束力可以看作集中作用于杆的质心, 因此我们选下杆质心的坐标 x_1, y_1 作为特

定的广义坐标。另选确定上杆位置的 θ_1 和确定下杆位置的 θ_2 作广义坐标。总共有四个广义坐标, 即 $\theta_1, \theta_2, x_2, y_2$ 。

按照虚功原理, $m_1 g \delta x_1 + m_2 g \delta x_2 + F \delta y_2 = 0$ 。用广义坐标 $\theta_1, \theta_2, x_2, y_2$ 表出, 即

$$m_1 g \delta \left(\frac{1}{2} l_1 \cos \theta_1 \right) + m_2 g \delta x_2 + F \delta \left(y_2 + \frac{1}{2} l_2 \sin \theta_2 \right) = 0,$$

即

$$-\frac{1}{2} m_1 g l_1 \sin \theta_1 \delta \theta_1 + m_2 g \delta x_2 + F \delta y_2 + \frac{1}{2} F l_2 \cos \theta_2 \delta \theta_2 = 0, \quad (1)$$

由此看出, 对应于 δx_2 和 δy_2 的主动力分别是 $m_2 g$ 和 F 。这是说, 下杆所受主动力的 x 分量是 $m_2 g$ 而 y 分量是 F 。

(1) 的 $\delta \theta_1, \delta \theta_2, \delta x_2, \delta y_2$ 并不独立, 它们受到铰接条件的约束,

$$\begin{cases} f_1(x_2, y_2, \theta_1, \theta_2) \equiv l_1 \cos \theta_1 + \frac{1}{2} l_2 \cos \theta_2 - x_2 = 0, \\ f_2(x_2, y_2, \theta_1, \theta_2) \equiv l_1 \sin \theta_1 + \frac{1}{2} l_2 \sin \theta_2 - y_2 = 0. \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} -l_1 \sin \theta_1 \delta \theta_1 - \frac{1}{2} l_2 \sin \theta_2 \delta \theta_2 - \delta x_2 = 0, & (2) \\ l_1 \cos \theta_1 \delta \theta_1 + \frac{1}{2} l_2 \cos \theta_2 \delta \theta_2 - \delta y_2 = 0. & (3) \end{cases}$$

用 λ_1 遍乘(2)的各项, λ_2 遍乘(3)的各项, 并与(1)相加,

$$\begin{aligned} & l_1 \left(-\frac{1}{2} m_1 g \sin \theta_1 - \lambda_1 \sin \theta_1 + \lambda_2 \cos \theta_1 \right) \delta \theta_1 + (m_2 g - \lambda_1) \delta x_2 \\ & + (F - \lambda_2) \delta y_2 + l_1 \left(\frac{1}{2} F \cos \theta_2 - \frac{1}{2} \lambda_1 \sin \theta_1 \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \lambda_2 \cos \theta_2 \right) \delta \theta_2 = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

令各个系数分别为零, 即得(10.23)形式的平衡方程, 其中对应于 δx_2 和 δy_2 的两个平衡方程是

$$m_2 g - \lambda_1 = 0, \quad F - \lambda_2 = 0.$$

两式左边第一项各是主动力, 第二项显然各是约束力, 它们正如(10.24)所指出, 分别是 $\lambda_1 \partial f_1 / \partial x_2 + \lambda_2 \partial f_2 / \partial x_2$ 和 $\lambda_1 \partial f_1 / \partial y_2 + \lambda_2 \partial f_2 / \partial y_2$ 。这样, 下杆所

受 x 方向约束力为 $-\lambda_1 = -m_1g$, y 方向约束力为 $-\lambda_2 = -F$.

(6) 达朗伯原理

以上研究的是静力学问题,现在转到动力学问题的研究。
按照牛顿运动定律,力学系统的第 i 质点的运动方程是

$$F_i + N_i = m_i \ddot{r}_i.$$

把上式右边的 $m_i \ddot{r}_i$ 移到左边,

$$F_i + N_i - m_i \ddot{r}_i = 0. \quad (10.25)$$

只要把 $-m_i \ddot{r}_i$ 理解为一种力,上式就变为平衡方程(10.6)的类型。事实上,研究第 i 质点的运动时,若选用跟随这质点一同平动的参考系统,这质点显然是(相对)静止的,它应当遵守平衡方程(10.25),其中 $-m_i \ddot{r}_i$ 是读者已熟悉的惯性力^①。这就叫作**达朗伯原理**。

既然(10.25)是一种平衡方程,当然也可以用虚功原理的形式表出:在理想约束作用下,主动力和惯性力的虚功之总和为零,

$$\sum_{i=1}^n (F_i - m_i \ddot{r}_i) \cdot \delta r_i = 0. \quad (10.26)$$

这就是达朗伯原理的常用形式。

这里,作为力学系统的运动规律,同样需要设法舍去或甩掉带有很大任意性的虚位移。

对于完整约束,在(10.26)中引用独立的广义坐标就可以甩掉虚位移。对于非完整约束,即使采用独立的广义坐标,广义虚位移还是不独立的,不可简单地甩掉,这时需要运用拉格朗日乘子方法。

例 5 试用达朗伯原理重新求解 § 7 的例题(图 2-3(a))。

解 不可伸缩的臂和光滑铰链都是理想约束。所需考虑的主动力有:套管的重量 P , 小球的重量 mg , 弹簧中的张力 $T = kl \sin \varphi$ 。所需考虑的惯性力是小球的惯性离心力 $m\omega^2(a + l \sin \varphi)$ 。

^① 这里没有拘泥于达朗伯原来的说法,而采用简单易懂的说法。

这个力学系统只有一个自由度。取张角 φ 作为广义坐标。设想系统的虚角位移为 $\delta\varphi$ ，于是，套管的竖直虚位移为 $\delta(2l \cos\varphi)$ ，小球的竖直虚位移为 $\delta(l \cos\varphi)$ ，水平虚位移为 $\delta(l \sin\varphi)$ ，弹簧系着点的水平虚位移为 $\delta\left(\frac{1}{2}l \sin\varphi\right)$ 。按照达朗伯原理(10.26)，

$$P\delta(2l \cos\varphi) + 2mg\delta(l \cos\varphi) + 2m\omega^2(a + l \sin\varphi)\delta(l \sin\varphi) - 2kl \sin\varphi \delta\left(\frac{1}{2}l \sin\varphi\right) = 0,$$

即
$$\{-2Pl \sin\varphi - 2mgl \sin\varphi + 2m\omega^2(a + l \sin\varphi)l \cos\varphi - kl^2 \sin\varphi \cos\varphi\} \delta\varphi = 0.$$

虚位移 $\delta\varphi$ 是任意的，所以上式中 $\delta\varphi$ 的系数为零，由此解得

$$\omega^2 = \frac{(2P + 2mg + kl \cos\varphi) \sin\varphi}{2m(a + l \sin\varphi) \cos\varphi}.$$

另解 本例的主动力和惯性离心力都是保守力，所以本例也可以用势能取极值作为平衡条件，见(10.16)式。

套管的势能为 $-Py_1$ ，每个小球的势能为 $-mgy_2$ ，弹簧中的弹性势能为 $\frac{1}{2}k(2x_3 - 2a)^2$ ，每个小球的惯性离心力的势能为 $-\frac{1}{2}m\omega^2 x_2^2$ 。这样，

$$V = -2Pl \cos\varphi - 2mgl \cos\varphi + \frac{1}{2}kl^2 \sin^2\varphi - 2 \cdot \frac{1}{2}m\omega^2(a + l \sin\varphi)^2.$$

令 $dV/d\varphi = 0$ ，即得

$$2Pl \sin\varphi + 2mgl \sin\varphi + kl^2 \sin\varphi \cos\varphi - 2m\omega^2(a + l \sin\varphi)l \cos\varphi = 0.$$

由此解得

$$\omega^2 = \frac{(2P + 2mg + kl \cos\varphi) \sin\varphi}{2m(a + l \sin\varphi) \cos\varphi}.$$

读者可把这里的解法跟 § 8 例题的解法对比一下。§ 8 例题按“牛顿方式”来解，隔离物体并分析物体的受力情况(由于约束力也是未知数，未知数竟达 12 个之多)，列出运动方程，把运动方程和约束方程联立起来(方程个数也多达 12)，演算很繁。其实，正由于约束条件多，力学系统的自由度少。上面这个例题引用了广义坐标和虚功概念(因而不考虑约束力)，未知数减少到只有一个，方程也只有一个，比“牛顿方式”简便得多。

达朗伯原理是以牛顿定律加上理想约束假定作为逻辑推理的出发点导出的。从这个基本方程出发再利用约束对虚位移的限制关系式,可以导出力学系统的动力学方程,从而概括了力学系统的运动规律。由于约束的性质是纯几何的或运动学的,因此可认为真正作为动力学理论的逻辑出发点就是这个基本方程,故称之为“原理”。这比承认牛顿定律再加上理想约束假定作为出发点更为简洁和富有概括性。当存在非理想约束时,达朗伯原理也适用,它可叙述为:主动力和非理想约束力及惯性力的虚功之和为零。对于完整约束或非完整约束,这个原理都适用,因此它可以称为分析动力学的普遍原理。

第三章 拉格朗日动力学

作为力学系统的运动规律，达朗伯原理涉及带有很大任意性的虚位移，这有待甩开。当然，我们可以在各个实际问题中具体进行这项工作，得到不涉及虚位移的动力学方程。但是，有没有可能一劳永逸地把虚位移甩掉，从而得出力学系统在广义坐标描述下所具有的最一般形式的动力学方程？这种可能性确实存在，在完整约束的情况下，这样得出的动力学方程叫作拉格朗日方程。当存在非完整约束时，利用拉格朗日乘子法也能得出相应的动力学方程。运用这类动力学方程研究问题，统称为**拉格朗日动力学**。

在拉格朗日动力学中，一个力学系统的性质可用单个函数——拉格朗日函数——来概括。

§ 11. 拉格朗日方程

(1) 广义坐标的引入

§ 10 已把力学系统的运动规律表为达朗伯原理

$$\sum_{i=1}^n (\mathbf{F}_i - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0.$$

由于约束条件， n 个径矢 $\mathbf{r}_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 并不独立。现在引入独立的广义坐标 $q_\alpha (\alpha = 1, 2, \dots, s)$ ，把径矢 \mathbf{r}_i 用广义坐标表出，

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_s, t) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (11.1)$$

为把(11.1)代入达朗伯原理，本来需要拿(11.1)对时间 t 求导两次以求得 $\ddot{\mathbf{r}}$ 的表示式。不过，下面将采用一种类似于分部积分的运算，因而只需要 $\dot{\mathbf{r}}_i$ 的表示式：

$$\dot{r}_i = \frac{\partial r_i(q, t)}{\partial t} + \sum_{a=1}^i \frac{\partial r_i(q, t)}{\partial q_a} \dot{q}_a. \quad (11.2)$$

为了书写简便,上式中 $r_i(q_1, q_2, \dots, q_i, t)$ 已缩写为 $r_i(q, t)$, 下面计算它的偏导数.

拿(11.2)对 \dot{q}_β 求偏导数,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial \dot{q}_\beta} &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\beta} \left(\frac{\partial r_i}{\partial t} + \sum_{a=1}^i \frac{\partial r_i}{\partial q_a} \dot{q}_a \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\beta} \left(\frac{\partial r_i}{\partial q_\beta} \dot{q}_\beta \right) = \frac{\partial r_i}{\partial q_\beta}. \end{aligned}$$

即

$$\frac{\partial \dot{r}_i}{\partial \dot{q}_\beta} = \frac{\partial r_i}{\partial q_\beta}. \quad (11.3)$$

推导中利用了 $\frac{\partial r_i}{\partial t}$ 及 $\frac{\partial r_i}{\partial q_a}$ 只是 q, t 的函数, 而和 \dot{q} 无关的性质.

又拿(11.2)对 q_β 求偏导数,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial q_\beta} &= \frac{\partial}{\partial q_\beta} \left(\frac{\partial r_i}{\partial t} + \sum_{a=1}^i \frac{\partial r_i}{\partial q_a} \dot{q}_a \right) = \frac{\partial^2 r_i}{\partial q_\beta \partial t} \\ &\quad + \sum_{a=1}^i \frac{\partial^2 r_i}{\partial q_\beta \partial q_a} \dot{q}_a = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial r_i}{\partial q_\beta} \right) \\ &\quad + \sum_{a=1}^i \frac{\partial}{\partial q_a} \left(\frac{\partial r_i}{\partial q_\beta} \right) \dot{q}_a = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial r_i}{\partial q_\beta} \right), \end{aligned}$$

即

$$\frac{\partial}{\partial q_\beta} \left(\frac{d}{dt} r_i \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial q_\beta} r_i \right). \quad (11.4)$$

请读者记住(11.3)和(11.4).

(2) 拉格朗日方程

把变换式(11.1)代入达朗伯原理. 其一部分是

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i &= \sum_{i=1}^n \left(\mathbf{F}_i \cdot \sum_{\alpha=1}^i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha \right) \\ &= \sum_{\alpha=1}^i \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \right) \delta q_\alpha = \sum_{\alpha=1}^i Q_\alpha \delta q_\alpha, \end{aligned} \quad (11.5)$$

其中 Q_α 是广义力:

$$Q_\alpha \equiv \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \quad (11.6)$$

另一部分则是

$$\begin{aligned} - \sum_{i=1}^n m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i &= - \sum_{i=1}^n \left(m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \sum_{\alpha=1}^i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha \right) \\ &= - \sum_{\alpha=1}^i \left(\sum_{i=1}^n m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \right) \delta q_\alpha. \end{aligned} \quad (11.7)$$

上式的 $\ddot{\mathbf{r}}$ 尚待用广义坐标 q_α 及其时间变化率 \dot{q}_α 和 \ddot{q}_α 表出。为了简便,先施行一种类似于分部积分的运算,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} &= \sum_{i=1}^n m_i \frac{d\dot{\mathbf{r}}_i}{dt} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \\ &= \sum_{i=1}^n m_i \frac{d}{dt} \left(\dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \right). \end{aligned}$$

以(11.3)和(11.4)代入上式,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} &= \sum_{i=1}^n m_i \frac{d}{dt} \left(\dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i |\dot{\mathbf{r}}_i|^2 \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i |\dot{\mathbf{r}}_i|^2 \right). \end{aligned}$$

上式中的两个括号正是力学系统的动能 T , 所以

$$\sum_{i=1}^n m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha}. \quad (11.8)$$

把(11.8)代入(11.7), 并与(11.5)合在一起, 就把达朗伯原理表为

$$\sum_{\alpha=1}^s \left(Q_\alpha - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} + \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} \right) \delta q_\alpha = 0. \quad (11.9)$$

对于只有完整约束的力学系统即所谓**完整系**, 广义虚位移 $\delta q_\alpha (\alpha = 1, 2, \dots, s)$ 是独立的, (11.9)的各个括号应分别为零, 即

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s). \quad (11.10)$$

这一组方程叫作**拉格朗日方程**. 这里已经一劳永逸地甩掉了虚位移. 因为 T 和 Q_α 都是 q, \dot{q} 和 t 的已知函数, 所以这是关于 s 个未知函数 $q_\alpha(t)$ 的常微分方程组, 其中每个方程一般含有这 s 个未知函数的二阶导数.

如果把 $\partial T / \partial \dot{q}_\alpha (\alpha = 1, 2, \dots, s)$ 叫作广义动量 (确切的定义是 $\partial L / \partial \dot{q}_\alpha$, 见后面的式(11.15)), $\partial T / \partial q_\alpha$ 可以叫作拉格朗日力, 于是拉格朗日方程(11.10)可读作: 广义动量的时间变化率等于广义主动力与拉格朗日力之和.

注意: 拉格朗日方程在数学上是 $q_\alpha (\alpha = 1, 2, \dots, s)$ 的常微分方程, 在物理上是实际运动所遵从的运动定律. 方程中的 d/dt 运算当然是把描写实际运动的 $q_\alpha (\alpha = 1, 2, \dots, s)$ 当作时间 t 的函数 $q_\alpha(t)$, 而 \dot{q}_α 则是 $q_\alpha(t)$ 的时间变化率. 可是, 为了具体写出(11.10), 必须先计算 $T(q, \dot{q}, t)$ 的偏导数 $\partial T / \partial \dot{q}_\alpha$ 和 $\partial T / \partial q_\alpha$. 在作这种运算时, 是把广义坐标 q_α 、广义速度 \dot{q}_α 和时间 t 当作独立变数看待的, 也就是说, 不把 q_α 作为时间 t 的函数, 也不把 \dot{q}_α 作为 q_α 的时间变化率. 这又是怎么回事呢? 原来, 作为研究问题的出发点, 我们并不局限于实际实现的运动情况, 而是考虑瞬时“冻结”了的约束条件所允许的一切可能的运动情况(虚位移概念就是

这样引入的)。 q_a 并不是指某个时刻的实际的广义坐标, 而是约束条件所允许的任意的广义坐标, 所以它不是时间 t 的函数; \dot{q}_a 也并不是实际的广义速度, 而是约束条件所允许的任意的广义速度, 所以它也不是 q_a 的时间变化率, 而是独立于 q_a 的。但是, 从一切可能的运动出发, 最终还是为了归结到研究实际的运动情况, 得出实际运动所遵从的运动定律——拉格朗日方程。而对于实际运动而言, q_a 是 t 的函数 $q_a(t)$, \dot{q}_a 是 q_a 的时间变化率,

例 1 试推导平面极坐标中的质点运动方程。

解 这里有两个自由度, 广义坐标即极径 ρ 和极角 φ , 令 $q_1 = \rho$, $q_2 = \varphi$ 。径向速度 v_ρ 和横向速度 v_φ 分别是 $v_\rho = \dot{\rho}$ 和 $v_\varphi = \rho\dot{\varphi}$, 而

$$T = \frac{1}{2} m(v_\rho^2 + v_\varphi^2) = \frac{1}{2} m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2).$$

由此, 广义动量为

$$p_\rho = \frac{\partial T}{\partial \dot{\rho}} = m\dot{\rho}, \quad p_\varphi = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = m\rho^2\dot{\varphi}.$$

它们分别是质点的径向动量以及质点相对于极点的动量矩。至于拉格朗日力为

$$\frac{\partial T}{\partial \rho} = m\rho\dot{\varphi}^2, \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0,$$

前一个是质点绕极点运动的惯性离心力。

广义力 Q_ρ 和 Q_φ 的表示式可利用虚功 δW 来求。先取 $\delta\varphi = 0$, 虚功显然为 $\delta W = \mathbf{F} \cdot \delta\mathbf{r} = F_\rho\delta\rho$, 所以

$$Q_\rho = F_\rho,$$

这是力 \mathbf{F} 的径向分量。再取 $\delta\rho = 0$, 虚功显然为 $\delta W = \mathbf{F} \cdot \delta\mathbf{r} = F_\varphi\rho\delta\varphi$ 所以

$$Q_\varphi = \rho F_\varphi,$$

这是力 \mathbf{F} 相对于极点的力矩。如果按照定义(10.6)计算, 也可得到同样结果:

$$\begin{cases} Q_\rho = \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} = \mathbf{F} \cdot \frac{\partial(\rho\mathbf{i})}{\partial \rho} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{i} = F_\rho, \\ Q_\varphi = \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = \mathbf{F} \cdot \frac{\partial(\rho\mathbf{i})}{\partial \varphi} = \rho\mathbf{F} \cdot \frac{\partial\mathbf{i}}{\partial \varphi} = \rho\mathbf{F} \cdot \mathbf{j} = \rho F_\varphi, \end{cases}$$

其中 i 和 j 分别是径向和横向单位矢量.

于是,拉格朗日方程(11.10)给出

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(m\dot{\rho}) - m\rho\dot{\varphi}^2 = F_{\rho}, \\ \frac{d}{dt}(m\rho^2\dot{\varphi}) = \rho F_{\varphi}, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2) = F_{\rho}, \\ m(\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}) = F_{\varphi}. \end{cases}$$

读者可拿上例与 § 1(3) 关于极坐标系中质点加速度表示式的推导对比一下。“牛顿方式”着眼于力与加速度这些矢量,推导加速度矢量在极坐标中的分量表示式颇费周折;“拉格朗日方式”着眼于能量这一标量,而标量在极坐标中的表示式是容易写出的,根据这一表示式推导运动方程也是顺利的.读者不妨试试球坐标系,就更能体会“拉格朗日方式”的简便.

(3) 主动力全是保守力的情况

当主动力 F_i 全是保守力时,存在一个势能函数 $V(r_1, r_2, \dots, r_s; t)$ 使

$$F_i = -\nabla_i V$$

则广义力 Q_α 可表示为

$$\begin{aligned} Q_\alpha &= \sum_{i=1}^s F_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} = - \sum_{i=1}^s \nabla_i V \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \\ &= - \frac{\partial V}{\partial q_\alpha}, \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s). \end{aligned} \quad (11.11)$$

这正是 § 10 从另一角度导出的(10.15).

于是,完整系的拉格朗日方程(11.10)可以改写成

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_\alpha} = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s),$$

势能 V 只是广义坐标的函数而与广义速度无关,所以上式又可改写为

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial(T-V)}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial(T-V)}{\partial q_\alpha} = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, r). \quad (11.12)$$

定义拉格朗日函数

$$L = T - V, \quad (11.13)$$

就得到主动力全是保守力情况下的完整系的拉格朗日方程:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s). \quad (11.14)$$

通常定义广义动量

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s). \quad (11.15)$$

(在 V 与 q_α 无关的条件下, 这个定义也可说成 $p_\alpha = \partial T / \partial \dot{q}_\alpha$)。拉格朗日方程(11.14)可读作: 广义动量的时间变化率等于广义力(包括主动力和拉格朗日力)。

如果某一广义坐标 q_β 反映力学系统的整体平移, 其平移方向沿着单位矢量 \mathbf{n} (参看图 3-1), 即

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_i(q, q_\beta + dq_\beta; t) &= \mathbf{r}_i(q, q_\beta; t) \\ &+ dq_\beta \mathbf{n}, \end{aligned}$$

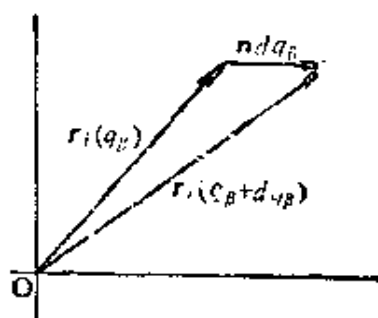


图 3-1

其中 q 代表 q_β 以外的所有各广义坐标, $dq_\beta \mathbf{n}$ 则是所有质点的共同平移。在这情况下,

$$\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\beta} = \mathbf{n}.$$

相应的广义动量

$$\begin{aligned} p_\beta &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\beta} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\beta} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\beta} \left(\sum_{i=1}^s \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^s m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_\beta}, \end{aligned}$$

以(11.3)代入得

$$p_{\beta} = \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \dot{q}_{\beta}} = \mathbf{n} \cdot \left(\sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{r}}_i \right),$$

这正是力学系统的动量在 \mathbf{n} 方向的分量。同理可以证明相应的广义力 Q_{β} 是主动力之和在 \mathbf{n} 方向的分量。

如果某一广义坐标 q_{β} 反映力学系统的整体转动，其转动轴沿着单位矢量 \mathbf{n} ，即

$$\mathbf{r}_i(q, q_{\beta} + dq_{\beta}; t) = \mathbf{r}_i(q, q_{\beta}; t) + dq_{\beta} \mathbf{n} \times \mathbf{r}_i(q, q_{\beta}; t).$$

dq_{β} 是系统绕转动轴转过的角度。此时，

$$\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_{\beta}} = \mathbf{n} \times \mathbf{r}_i.$$

相应的广义动量

$$\begin{aligned} p_{\beta} &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_{\beta}} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i \right) = \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_{\beta}} \\ &= \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_{\beta}} = \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{n} \times \mathbf{r}_i \\ &= \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i \\ &= \mathbf{n} \cdot \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{n} \cdot \mathbf{L}, \end{aligned}$$

这正是力学系统的角动量 \mathbf{L} 在 \mathbf{n} 方向的分量，即力学系统对 \mathbf{n} 轴的角动量。相应广义力 Q_{β} 为

$$\begin{aligned} Q_{\beta} &= \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_{\beta}} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{r}_i) \\ &= \mathbf{n} \cdot \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \mathbf{n} \cdot \mathbf{M} \end{aligned}$$

是主动力对于 \mathbf{n} 轴的力矩。

例 2 不可伸缩的柔软轻绳绕过两个定滑轮和一个动滑轮(图 3-2)，滑轮的重量很轻，质量为 m_1 、 m_2 和 m ，的物体分别悬挂于绳的两端和动滑轮

下. 求各物体的加速度.

解 三个物体各作上下方向的一维运动, 它们的运动又受到一根不可伸长的绳的限制, 因此只有 $3-1=2$ 个自由度.

取左右两边的绳长 l_1 和 l_2 作为力学系统的广义坐标. 因为 $l_1 + 2l_3 + l_2 = \text{常数}$, 所以 $l_3 = \frac{1}{2}l - \frac{1}{2}(l_1 + l_2)$.

主动力是三个物体所受的重力, 它们都是势力. 系统的拉格朗日函数很容易求出:

$$\begin{aligned} V &= -m_1gl_1 - m_2gl_2 \\ &\quad - m_3g\left[\frac{1}{2}l - \frac{1}{2}(l_1 + l_2)\right], \\ T &= \frac{1}{2}m_1\dot{l}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{l}_2^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}m_3\left[-\frac{1}{2}(\dot{l}_1 + \dot{l}_2)\right]^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L = T - V &= \frac{1}{2}\left(m_1 + \frac{1}{4}m_3\right)\dot{l}_1^2 + \frac{1}{2}\left(m_2 + \frac{1}{4}m_3\right)\dot{l}_2^2 \\ &\quad + \frac{1}{4}m_3\dot{l}_1\dot{l}_2 + \left(m_1 - \frac{1}{2}m_3\right)gl_1 + \left(m_2 - \frac{1}{2}m_3\right)gl_2 \\ &\quad - \frac{1}{2}m_3gl. \end{aligned}$$

拉格朗日方程(10.14)给出

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left[\left(m_1 + \frac{1}{4}m_3\right)\dot{l}_1 + \frac{1}{4}m_3\dot{l}_2\right] - \left(m_1 - \frac{1}{2}m_3\right)g = 0, \\ \frac{d}{dt}\left[\left(m_2 + \frac{1}{4}m_3\right)\dot{l}_2 + \frac{1}{4}m_3\dot{l}_1\right] - \left(m_2 - \frac{1}{2}m_3\right)g = 0. \end{cases}$$

由此解得

$$\begin{aligned} \dot{l}_1 &= \frac{4m_1m_2 - 3m_1m_3 + m_2m_3}{4m_1m_2 + m_2m_3 + m_1m_3}g, \\ \dot{l}_2 &= \frac{4m_2m_1 - 3m_1m_3 + m_2m_3}{4m_1m_2 + m_1m_3 + m_2m_3}g, \\ \dot{l}_3 &= -\frac{1}{2}(\dot{l}_1 + \dot{l}_2) = \frac{-4m_1m_2 + m_1m_3 + m_2m_3}{4m_1m_2 + m_1m_3 + m_2m_3}g. \end{aligned}$$

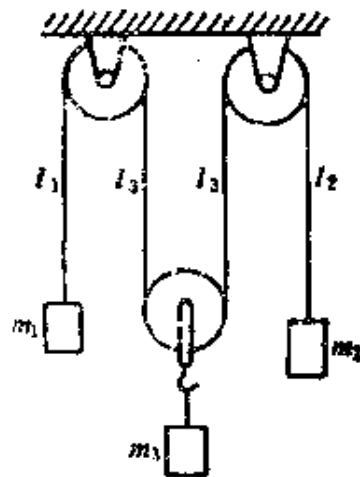


图 3-2

(4) 广义动量守恒原理

如拉格朗日函数 L 不包含某个广义坐标 q_β , 即 $\partial L / \partial q_\beta = 0$, 这种广义坐标叫作可遗坐标, 于是, 拉格朗日方程(11.14)给出

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\beta} \right) = 0,$$

这就是说, 广义动量 $p_\beta = \partial L / \partial \dot{q}_\beta$ 是守恒的,

$$p_\beta = \text{常数 (如 } L \text{ 不含有 } q_\beta), \quad (11.16)$$

这叫作广义动量守恒原理。

如果可遗坐标 q_β 是力学系统的整体平移坐标, 也就是说, 拉格朗日函数不包含整体平移坐标, 即拉格朗日函数 L 对于整体平移是不变的, 广义动量守恒原理就归结为动量守恒原理。若拉格朗日函数不包含整体转动坐标, 即拉格朗日函数 L 对于整体转动是不变的, 也就是拉格朗日函数是各向同性的, 则广义动量守恒原理归结为角动量守恒原理。在矢量力学中, 动量守恒原理和角动量守恒原理是以牛顿第三定律为先决条件(内力的矢量和为零, 内力的力矩和为零), 而广义动量守恒原理则并不以牛顿第三定律为先决条件(参看后面 § 13)。

例 3 质量为 M 的光滑大楔子置于光滑的水平桌面上, 质量为 m 的光滑小楔子沿着大楔子的光滑斜边滑下 (图 3-3)。求这两个楔子的加速度。

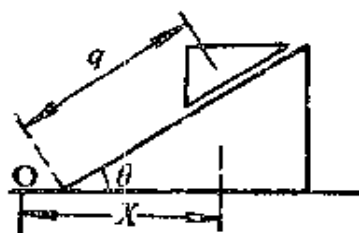


图 3-3

解 大楔子可在水平方向运动, 小楔子可在大楔子斜边上运动, 系统有两个自由度。

取桌面上的固定点 O , 把大楔子的质心(其实不一定要质心, 改为大楔子的任一点都行)相对于 O 点的水平坐标记作 X 。把小楔子的质心(其实不一定要质心)相对于大楔子斜边底端而沿着斜边计算的坐标记作 q 。 X 和 q 可作为系统的广义坐标。

主动力是两个楔子所受的重力, 它们都是势力。大楔子的势能在运动过

程中不起变化,可以不考虑. 只要讨论小楔子的势能就够了. 计算动能的时候要注意,小楔子的速度不仅仅是沿斜边的 \dot{q} ,而且还有随着大楔子在水平方向运动的速度 \dot{X} .

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} M \dot{X}^2 + \frac{1}{2} m [v_{\text{水平}}^2 + v_{\text{垂直}}^2] \\ &= \frac{1}{2} M \dot{X}^2 + \frac{1}{2} m [(\dot{X} + \dot{q} \cos \theta)^2 + \dot{q}^2 \sin^2 \theta], \\ V &= mgq \sin \theta, \\ L = T - V &= \frac{1}{2} (M + m) \dot{X}^2 + \frac{1}{2} m \dot{q}^2 + m \dot{X} \dot{q} \cos \theta \\ &\quad - mgq \sin \theta. \end{aligned}$$

于是,拉格朗日方程(11.14)给出运动方程

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} [M\dot{X} + m(\dot{X} + \dot{q} \cos \theta)] = 0, \\ \frac{d}{dt} (m\dot{q} + m\dot{X} \cos \theta) + mg \sin \theta = 0. \end{cases}$$

第一个方程指出这个系统在水平方向的动量守恒,事实上, X 是可遗坐标,所以相应的广义动量守恒.

由运动方程解得大楔子的加速度

$$\ddot{X} = \frac{mg \sin \theta \cos \theta}{M + m \sin^2 \theta},$$

以及小楔子相对于大楔子的加速度

$$\ddot{q} = - \frac{(M + m)g \sin \theta}{M + m \sin^2 \theta}.$$

初学者用“牛顿方式”求解本题要费一番功夫,但用“拉格朗日方式”求解本题简直没有什么困难.

(5) 哈密顿函数守恒原理

拉格朗日函数 L 是时间 t 、广义坐标 q 和广义速度 \dot{q} 的函数, L 的时间变化率

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^i \frac{\partial L}{\partial q_{\alpha}} \dot{q}_{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \frac{d\dot{q}_{\alpha}}{dt}.$$

在主动为全是保守力的情况下，利用完整系统的拉格朗日方程 (11.14) 把 $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}$ 改写，即得

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) \dot{q}_\alpha + \sum_{\alpha=1}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \frac{d\dot{q}_\alpha}{dt} \\ &= \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{d}{dt} \left(\sum_{\alpha=1}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \dot{q}_\alpha \right). \end{aligned}$$

$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}$ 就是广义动量 p_α ，这样

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{\alpha=1}^i p_\alpha \dot{q}_\alpha - L \right) = - \frac{\partial L}{\partial t}. \quad (11.17)$$

定义哈密顿函数

$$H = \sum_{\alpha=1}^i p_\alpha \dot{q}_\alpha - L = \sum_{\alpha=1}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \dot{q}_\alpha - L. \quad (11.18)$$

如若拉格朗日函数 L 不是时间的显函数，

$$L = L(q, \dot{q}),$$

则 (11.17) 就是哈密顿函数 H 守恒原理，

$$H = \text{常数} \quad \left(\text{如 } \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \right). \quad (11.19)$$

弄清楚哈密顿函数的意义，显然是很重要的。

势能 V 是与广义速度无关的，因此 H 的定义式 (11.18) 中的 $\partial L / \partial \dot{q}_\alpha$ 可代之以 $\partial T / \partial \dot{q}_\alpha$ 。

设变换式 $r_i = r_i(q)$ 不显含时间，即 $\partial r_i / \partial t = 0$ ，则

$$\dot{r}_i = \sum_{\alpha=1}^i \frac{\partial r_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha.$$

于是

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \dot{r}_i \cdot \dot{r}_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \sum_{\alpha=1}^i \dot{q}_\alpha \frac{\partial r_i}{\partial q_\alpha} \cdot \sum_{\beta=1}^i \frac{\partial r_i}{\partial q_\beta} \dot{q}_\beta$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=1}^r \sum_{\beta=1}^r \frac{1}{2} m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\beta} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta,$$

这是广义速度的二次齐次多项式。根据齐次函数的欧勒定理^①,

$$\sum_{\alpha=1}^r \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \dot{q}_\alpha = 2T. \quad (11.20)$$

由此,哈密顿函数

$$H = \sum_{\alpha=1}^r p_\alpha \dot{q}_\alpha - L = 2T - (T - V) = T + V. \quad (11.21)$$

这样,在变换式 $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q)$ 不显含时间的条件下,动能是广义速度的二次齐次式,哈密顿函数 H 就是机械能。

如果约束是非定常的,则变换式 $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q, t)$ 难免显含时间。即使约束是稳定的,也可能由于选择了某些广义坐标(例如平移坐标系),变换式 $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q, t)$ 显含时间 t 。在变换式显含时间的情况下,

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^r \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha.$$

于是,

$$\begin{aligned} T &= \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^r \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha \right) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} + \sum_{\beta=1}^r \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\beta} \dot{q}_\beta \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{1}{2} m_i \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right)^2 + \sum_{\alpha=1}^r m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha \right. \end{aligned}$$

^① 可以不用欧勒定理而直接验证(11.20),

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\gamma} &= \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=1}^r \frac{1}{2} m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\gamma} \dot{q}_\alpha + \sum_{i=1}^n \sum_{\beta=1}^r \frac{1}{2} m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\gamma} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\beta} \dot{q}_\beta \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=1}^r m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\gamma} \dot{q}_\alpha, \end{aligned}$$

于是,

$$\sum_{\gamma=1}^r \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\gamma} \dot{q}_\gamma = \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=1}^r \sum_{\gamma=1}^r m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\gamma} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\gamma = 2T.$$

$$+ \sum_{\alpha=1}^i \sum_{\beta=1}^i \frac{1}{2} m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\beta} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta \},$$

这包含三个部分,它们分别是广义速度的零次、一次、二次的齐次多项式,今分别记作 T_0, T_1, T_2 , 即 $T = T_0 + T_1 + T_2$. 根据齐次函数的欧勒定理,

$$\sum_{\alpha=1}^i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \dot{q}_\alpha = 0T_0 + 1T_1 + 2T_2 = T_1 + 2T_2. \quad (11.22)$$

由此,哈密顿函数

$$\begin{aligned} H &= \sum_{\alpha=1}^i p_\alpha \dot{q}_\alpha - L = (T_1 + 2T_2) - (T_0 + T_1 + T_2 + V) \\ &= T_2 - T_0 + V. \end{aligned} \quad (11.23)$$

这样,在变换式显含时间的条件下,哈密顿函数 H 并非机械能,只能姑名之为**广义能量**.

例如,在匀速直线运动的汽车中有一谐振子在光滑水平槽中往返振动.取 q 轴沿振动方向,原点在谐振子的平衡点.选这汽车为参考系,可以认为这是惯性系.于是,谐振子的 $L = T - V = m\dot{q}^2/2 - kq^2/2$. 易见 $\partial L/\partial t = 0$, 所以 H 守恒. 另一方面,由于动能 $T = m\dot{q}^2/2$ 是广义速度 \dot{q} 的二次单项式,所以 H 就是机械能. 诚然, $H = p\dot{q} - L = (\partial L/\partial \dot{q})\dot{q} - L = m\dot{q}^2/2 + kq^2/2 = T + V$.

改取地面为参考系,这也可认为是惯性系. 如果谐振子的振动槽平行于汽车行进方向,则谐振子的 $L = T - V = m(\dot{q} + v_0)^2/2 - kq^2/2 = m\dot{q}^2/2 + mv_0\dot{q} + mv_0^2/2 - kq^2/2$, 其中 v_0 是汽车的速度. 因 $\partial L/\partial t = 0$, 所以 H 守恒. 但动能 T 不是 \dot{q} 的二次齐次式,所以 H 并非机械能. 事实上, $H = p\dot{q} - L = m(\dot{q} + v_0)\dot{q} - L = m\dot{q}^2/2 - mv_0^2/2 + kq^2/2 \neq T + V$.

如果汽车并非匀速,而是匀加速,其速度为 at , 仍以地面为参考系,则谐振子的 $L = m(\dot{q} + at)^2/2 - kq^2/2$. 这时 $\partial L/\partial t \neq 0$, 所以 H 不守恒. 另一方面, T 不是 \dot{q} 二次齐次式,所以 H 也不是机械能. 事实上, $H = m\dot{q}^2/2 - ma^2t^2/2 + kq^2/2 \neq T + V$.

读者想必记得矢量力学关于机械能守恒的条件,即作用力为保守力. 可是,本节关于哈密顿函数守恒即机械能守恒却还要求

变换式 $r_i = r_i(q)$ 不显含时间 t ，一般说来，这就是要求约束为定常的。那么，机械能守恒的这两种提法是否矛盾呢？原来，这两者并不是一回事。参看图 3-3，改设大楔子以给定的速度 $v(t)$ 运动，这对于小楔子就构成一种非定常约束。由于大楔子在运动，小楔子的真实位移一般并不平行于大楔子的斜边，因而约束力（大楔子对小楔子的正压力）对小楔子作的功一般也不为零。至于小楔子的虚位移（瞬时“冻结”了的约束条件所允许的可能的位移）总是平行于大楔子的斜边，约束力的虚功总是为零。这样，矢量力学所说的势能对应于所有的力，包括主动力和约束力，而拉格朗日函数 L 和哈密顿函数 H 中的势能则只对应于广义力 Q ，而 Q 只包括主动力，不包括约束力。可见这两种势能并不相同，机械能守恒的条件当然也就不同了。

例 4 试按“拉格朗日方式”研究单摆的运动。

解 单摆只有一个自由度。取角坐标 θ 作为广义坐标(图 3-4)。

唯一的主动力量是重力 mg ，它是势力。系统的拉格朗日函数很容易求出：

$$V = -mgl \cos \theta,$$

$$T = \frac{1}{2} m(l\dot{\theta})^2$$

$$L = T - V = \frac{1}{2} ml^2\dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta.$$

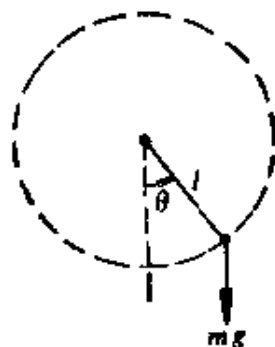


图 3-4

拉格朗日方程给出运动方程

$$\frac{d}{dt}(ml^2\dot{\theta}) - (-mgl \sin \theta) = 0, \text{ 即 } l\ddot{\theta} + g \sin \theta = 0.$$

(这个二阶微分方程在 θ 保持很小的条件下化为读者熟悉的谐振动方程 $l\ddot{\theta} + g\theta = 0$.)

我们不打算直接解这个微分方程。考虑到 L 不显含时间，哈密顿函数守恒。本例的哈密顿函数

$$H = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \dot{\theta} - L = ml^2\dot{\theta}^2 - L = \frac{1}{2} ml^2\dot{\theta}^2 - mgl \cos \theta,$$

这是机械能。这样

$$\frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 - mgl \cos \theta = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}_0^2 - mgl \cos \theta_0,$$

其中 θ_0 和 $\dot{\theta}_0$ 分别是初始角坐标和初始角速度^①。上式可改写为

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{l} \left(\cos \theta + \frac{l}{2g} \dot{\theta}_0^2 - \cos \theta_0 \right). \quad (1)$$

这是一阶微分方程。为求解这个微分方程，应区分三种情况。

1. $-1 < \frac{l}{2g} \dot{\theta}_0^2 - \cos \theta_0 < 1$ 的情况。这时，按照(1)，随着摆球的上升(θ 增大)，它的角速度 $\dot{\theta}$ 不断减小并将在某个角度 α 成为零，

$$\cos \alpha = - \left(\frac{l}{2g} \dot{\theta}_0^2 - \cos \theta_0 \right),$$

然后，摆球折回而下降。由于(1)可改写为

$$\frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \alpha}} = \sqrt{\frac{2g}{l}} dt. \quad (2)$$

作代换

$$\sin \frac{\theta}{2} = \sin \frac{\alpha}{2} \sin \varphi, \quad (3)$$

则(2)成为

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \sqrt{\frac{g}{l}} dt \quad \left(k = \sin \frac{\alpha}{2} < 1 \right).$$

两边分别积分，

$$\sqrt{\frac{g}{l}} t = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (4)$$

这类积分不能用初等函数表出，它叫做第一类椭圆积分。(4)式右边通常记作 $F(\varphi, k) - F(\varphi_0, k)$ 。

摆球从 $\theta = 0$ 到 $\theta = \alpha$ 所经历的时间是周期 τ 的四分之一。相应地， φ 从 $\varphi = 0$ 变到 $\varphi = \pi/2$ 。这样，周期

$$\tau = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}.$$

^① 其实，把运动方程 $ml^2\ddot{\theta} + mgl\sin\theta = 0$ 中的 $\ddot{\theta}$ 改写为 $\ddot{\theta} = d\dot{\theta}/dt = (d\dot{\theta}/d\theta)(d\theta/dt) = \dot{\theta}d\dot{\theta}/d\theta$ ，然后把运动方程对 θ 积分一次，并用初始条件确定积分常数，也可得到此式。

其中的积分叫作第一类完全椭圆积分，通常记作 $K(k)$ 。如果把被积函数展为幂级数，然后逐项积分，则

$$\tau = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} K(k) = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 k^6 + \dots \right], \quad (5)$$

2. $\frac{l}{2g} \dot{\theta}_0^2 - \cos \theta_0 = 1$ 的情况。这时，(1)化为

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{l}} \sqrt{1 + \cos \theta} = 2 \sqrt{\frac{g}{l}} \cos \frac{\theta}{2}.$$

分离变数并分别积分，

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \sec \frac{\theta}{2} d\frac{\theta}{2} = \int_0^t \sqrt{\frac{g}{l}} dt,$$

于是，

$$\ln \frac{\operatorname{tg} \left(\frac{\theta + \pi}{4} \right)}{\operatorname{tg} \left(\frac{\theta_0 + \pi}{4} \right)} = \sqrt{\frac{g}{l}} t,$$

即

$$\theta = 4 \operatorname{arctg} \left[e^{\sqrt{g/l} t} \operatorname{tg} \left(\frac{\theta_0 + \pi}{4} \right) \right] - \pi. \quad (6)$$

θ 随着 t 的增长而增大，当 $t \rightarrow \infty$ 时 $\theta \rightarrow +\pi$ ，单摆无限地逼近竖直向上的位置。

3. $\frac{l}{2g} \dot{\theta}_0^2 - \cos \theta_0 > 1$ 的情况。这时，(1)式右边总是正的，因此没有折回的现象，单摆绕着其悬挂点不停地转圈。把(1)改写为

$$\sqrt{\frac{l}{2g}} \cdot \frac{d\theta}{\sqrt{A + \cos \theta}} = dt \quad \left(A = \frac{l}{2g} \dot{\theta}_0^2 - \cos \theta_0 > 1 \right),$$

即

$$\sqrt{\frac{l}{2g}} \cdot \frac{d\theta}{\sqrt{A + 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}} = dt.$$

两边积分，仍得椭圆积分，

$$\begin{aligned}
 t &= \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\sqrt{2l} 2d(\theta/2)}{\sqrt{g(A+1)} \sqrt{1 - \frac{2}{A+1} \sin^2 \frac{\theta}{2}}} + C \\
 &= \frac{\sqrt{2l}}{\sqrt{g(A+1)}} \left[F\left(\frac{\theta}{2}, \sqrt{\frac{2}{A+1}}\right) \right. \\
 &\quad \left. - F\left(\frac{\theta_0}{2}, \sqrt{\frac{2}{A+1}}\right) \right], \quad (7)
 \end{aligned}$$

摆球从 $\theta = 0$ 到 $\theta = \pi$ 所经历的时间是绕悬挂点转动周期 τ 的二分之一, 所以

$$\tau = \frac{2\sqrt{2l}}{\sqrt{g(A+1)}} K\left(\sqrt{\frac{2}{A+1}}\right). \quad (8)$$

现在, 总结一下用拉格朗日方程求解完整系力学问题的一般程序:

(a) 分析系统所受的约束, 如系统确为完整系, 就根据系统的自由度选择恰当的广义坐标 q_α .

(b) 建立各质点的径矢 \mathbf{r}_i 与广义坐标 q_α 的变换方程

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_s; t).$$

为方便起见, 尽可能使变换方程不显含时间 t . 如果能直接完成下一步 (c), 则此步骤可以省略.

(c) 以广义坐标和广义速度表示动能 T . 用广义坐标表示广义力 Q_α ; 对于保守系统, 则写出广义坐标表示的势能 V . 最后写出系统的拉格朗日函数 $L = T - V$.

注意, 这里的 T 和 V 一般是指惯性系中的动能和势能, 若使用非惯性系, 则应加上与惯性力相应的势. 它可能不是只依赖于广义坐标 q 和时间 t 的普通势, 而是和广义速度有关的广义势.

(d) 列出拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s).$$

对保守系统, 则列方程

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s).$$

这 s 个 q_α 的二阶常微分方程组就是完整系的动力学方程。

(e) 解微分方程组, 得

$$q_\alpha = q_\alpha(C_1, C_2, \dots, C_{2s}; t) \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s).$$

(f) 利用初始条件定积分常数 C_1, C_2, \dots, C_{2s} , 最后求得

$$q_\alpha = q_\alpha(t) \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s).$$

(g) 对结果进行讨论。

*§ 12. 非完整系的动力学

现在研究这样的力学系统, 它不仅有完整约束而且有非完整约束, 这称为**非完整系**。因而选取的广义坐标的个数 s 超过了系统的实际的自由度。尽管也可以用广义坐标把达朗伯原理表为

$$\sum_{\alpha=1}^s \left(Q_\alpha - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} + \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} \right) \delta q_\alpha = 0, \quad (12.1)$$

但是这些 δq_α 并不独立, 它们受到非完整约束方程

$$f_r(q_1, q_2, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s; t) = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, k) \quad (12.2)$$

的限制(设有 k 个非完整约束方程)。

对于线性非完整约束, 约束方程可表为

$$\sum_{\alpha=1}^s A_{r\alpha} \dot{q}_\alpha + A_r = 0, \quad (12.3)$$

其中 $A_{r\alpha}$ 和 A_r 是广义坐标 q 和时间 t 的函数。取微分,

$$\sum_{\alpha=1}^s A_{r\alpha} dq_\alpha + A_r dt = 0. \quad (12.4)$$

由于虚位移不是时间中的过程, 所以 $\delta t = 0$, 于是得到广义虚位移之间的关系

$$\sum_{\alpha=1}^s A_{r\alpha} \delta q_\alpha = 0. \quad (12.5)$$

对于一般的非完整约束，由约束方程(12.2)可得广义虚位移之间的关系

$$\sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial f_r}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta q_\alpha = 0. \quad (12.6)$$

这个关系也包括了线性约束的结果，因为(12.5)乃是 $\partial f_r / \partial \dot{q}_\alpha = A_{r\alpha}$ 的特例。

把方程组(12.6)中各个方程分别乘以待定常数 λ_r 并与达朗伯原理(12.1)相加，得

$$\sum_{\alpha=1}^s \left(Q_\alpha - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} + \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} + \sum_{r=1}^k \lambda_r \frac{\partial f_r}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) \delta q_\alpha = 0. \quad (12.7)$$

虽然这些 δq_α 并不独立，但总可以选取 k 个拉格朗日乘子 λ_r ($r=1, 2, \dots, k$) 使方程(12.7)的 k 个括号值等于零，余下的 $s-k$ 个 δq_α 就是独立的了，作为它们的系数的各括号值亦应分别为零。这样，

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha + \sum_{r=1}^k \lambda_r \frac{\partial f_r}{\partial \dot{q}_\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s). \quad (12.8)$$

把动力学方程(12.8)和约束条件(12.2)联立起来就可以解出 s 个 q_α 和 k 个待定的拉格朗日乘子。

如所有的主动力都是保守力，相应的势能为 V ，则广义主动力可表为

$$Q_\alpha = - \frac{\partial V}{\partial q_\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s).$$

仍然把 $T - V$ 记作 L ，则动力学方程(12.8)就可改写为

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = \sum_{r=1}^k \lambda_r \frac{\partial f_r}{\partial \dot{q}_\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s). \quad (12.9)$$

拿(12.8)和(11.10)比较，可以看出 $\lambda_r \frac{\partial f_r}{\partial \dot{q}_\alpha}$ ($\alpha = 1, 2, \dots, k$) 正是以广义力形式表出的，保证第 r 个约束条件的约束力的各个

“分量”。

有时要计算完整约束的约束力，可在选取广义坐标时暂不考虑相应的完整约束条件，而通过微分将此约束条件改写为运动约束形式，这时 $\lambda, \frac{\partial f_c}{\partial q_a}$ 就是以广义力形式表示的此约束力的各个

“分量”。

例 1 斜冰面上冰刀简化模型的运动。

解 设冰刀可抽象为以刚性轻杆相连的两个质点，并且 $m_1 = m_2 = m$ ，杆的长为 l (图 3-5)。当冰刀在冰面上运动时，质心(杆的中点)的速度只能沿杆长的方向。已知冰面的倾角为 α ，取固定于斜冰面的坐标系 $Oxyz$ ，其中 Oz 垂直于冰面， Oy 在冰面上并沿水平方向。为确定冰刀的位形，可取质心的坐标 (x, y) 及冰刀与 x 轴的夹角 φ 为广义坐标。

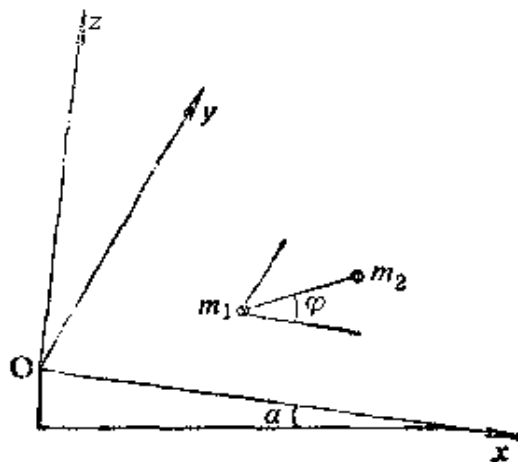


图 3-5

质心只沿杆长方向运动，这可表为

$$f = \sin \varphi \dot{x} - \cos \varphi \dot{y} = 0. \quad (1)$$

这是非完整约束方程。

系统的动能为质心平移动能与绕质心转动动能之和，即

$$T = \frac{1}{2} (2m)(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} ml^2 \right) \dot{\varphi}^2. \quad (2)$$

系统的势能为

$$V = -2mgx \sin \alpha, \quad (3)$$

于是写出拉格朗日函数

$$L = T - V = m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{4} ml^2 \dot{\varphi}^2 + 2mgx \sin \alpha, \quad (4)$$

按照拉格朗日乘子法建立动力学方程：

$$\begin{cases} 2m\ddot{x} - 2mg \sin \alpha = \lambda \sin \varphi, & (5) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2m\ddot{y} = -\lambda \cos \varphi, & (6) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi} \right) = 0. & (7) \end{cases}$$

和约束方程(1)联立,共有四个方程.

由(7)可得

$$\varphi = \omega t + \varphi_0. \quad (8)$$

这就是说,冰刀绕质心转动的角速度不变.从另一方面看,由于 φ 是可遗坐标,因而绕质心转动的角动量守恒.

从(5)和(6)消去 λ ,得

$$m\ddot{x} \cos \varphi + m\ddot{y} \sin \varphi - mg \sin \alpha \cos \varphi = 0. \quad (9)$$

由约束条件(1)可得

$$\frac{\dot{x}}{\cos \varphi} = \frac{\dot{y}}{\sin \varphi} = K,$$

即

$$\begin{cases} \dot{x} = K \cos \varphi, & (10) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{y} = K \sin \varphi. & (11) \end{cases}$$

对时间求导,并将 $\dot{\varphi} = \omega$ 代入,得

$$\begin{cases} \ddot{x} = -K\omega \sin \varphi + \frac{dK}{dt} \cos \varphi, & (12) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{y} = K\omega \cos \varphi + \frac{dK}{dt} \sin \varphi. & (13) \end{cases}$$

于是(9)化为

$$\frac{dK}{dt} - g \sin \alpha \cos \varphi = 0. \quad (14)$$

将 $\varphi = \omega t + \varphi_0$ 代入并积分,则

$$K = \frac{g}{\omega} \sin \alpha \sin(\omega t + \varphi_0) + \delta_0. \quad (15)$$

其中 δ_0 是积分常数.代入(10)和(11),

$$\begin{cases} \dot{x} = K \cos \varphi = \frac{g}{\omega} \sin \alpha \sin(\omega t + \varphi_0) \cos(\omega t + \varphi_0) + \delta_0 \cos(\omega t + \varphi_0), \\ \dot{y} = K \sin \varphi = \frac{g}{\omega} \sin \alpha \sin^2(\omega t + \varphi_0) + \delta_0 \sin(\omega t + \varphi_0). \end{cases}$$

再积分一次,得

$$\begin{cases} x = \frac{g}{2\omega^2} \sin \alpha \sin^2(\omega t + \varphi_0) + \frac{\delta_0}{\omega} \sin(\omega t + \varphi_0) + \epsilon_0, & (16) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{g}{2\omega^2} \sin \alpha \left(\omega t + \varphi_0 - \frac{1}{2} \sin 2(\omega t + \varphi_0) \right) - \frac{\delta_0}{\omega} \cos(\omega t + \varphi_0) + \eta_0. & (17) \end{cases}$$

其中 $\epsilon_0, \eta_0, \varphi_0, \omega, \delta_0$ 是由初始条件决定的积分常数。

当初始条件为

$$x_0 = y_0 = \dot{x}_0 = \dot{y}_0 = \varphi_0 = 0, \quad \dot{\varphi}_0 = \omega,$$

则可得到解

$$\begin{cases} x = \frac{g \sin \alpha}{2\omega^2} \sin^2 \omega t, & (18) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{g \sin \alpha}{2\omega^2} \left(\omega t - \frac{1}{2} \sin 2\omega t \right). & (19) \end{cases}$$

例 2 具有尖锐边缘的薄圆盘在水平面上滚动, 盘面偏离竖直面是难免的。如果这种偏离保持很小, 圆盘就稳定地滚动; 如这种偏离越来越大, 圆盘就倒下来。试研究稳定滚动条件。

解 本例不同于 § 8 中的圆盘, 这里多一个自由度, 即盘面相对于竖直面的倾斜角 θ (图 3-6(a)), 圆盘位置需要用五个独立的广义坐标来确定, 它们是: 盘心的坐标 x_0 和 y_0 , 着地点轨迹的切线与 x 轴夹角 φ , 自转角 ψ , 以及 θ 。盘心的另一个坐标 z_0 不是独立的, 它可以用 θ 表出: $z_0 = R \cos \theta$ (R 是圆盘半径)。既然研究的是稳定滚动条件, 我们只需研究盘面接近竖直的滚动, 着地点的轨迹近于直线。就是说, θ 保持为小量, 从而 $\dot{\theta}$ 和 $\ddot{\theta}$ 也是小量; φ 接近常数, 因而 $\dot{\varphi}$ 和 $\ddot{\varphi}$ 也是小量。

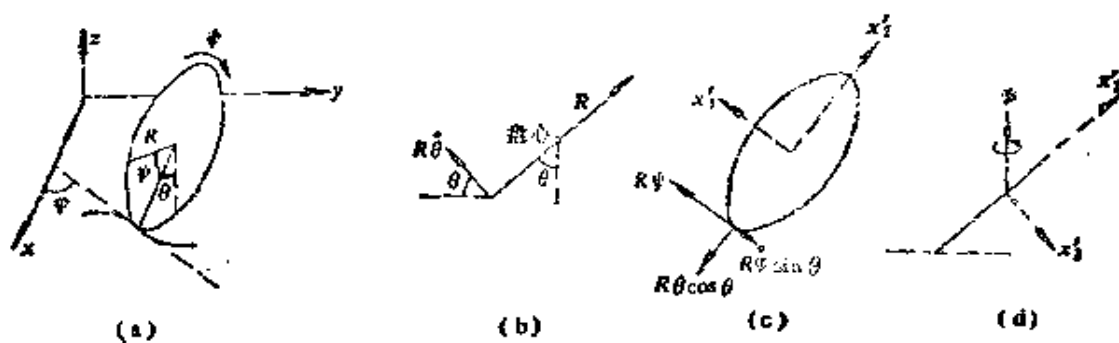


图 3-6

首先应写出圆盘滚动的约束条件, 即盘的着地点的速度为零。参看图

3-6(b), 盘面与竖直面夹角 θ 变化时, 着地点绕盘心的速度为 $R\dot{\theta}$, 它的竖直分量为 $R\dot{\theta} \sin \theta$, 水平分量为 $R\dot{\theta} \cos \theta$. 这水平分量也画在图 3-6(c) 中, 如果进一步将它分解到 x 和 y 方向, 则 x 分速度为 $R\dot{\theta} \cos \theta \sin \varphi$, y 分速度为 $R\dot{\theta} \cos \theta \cos \varphi$. 盘绕其自身的轴自转时, 着地点绕盘心的速度为 $R\dot{\phi}$, 参看图 3-6(c), 它的 x 分量是 $-R\dot{\phi} \cos \varphi$, y 分量是 $-R\dot{\phi} \sin \varphi$. 着地点轨迹的切线与 x 轴夹角变化时, 亦即圆盘绕通过盘心的竖直线转动时 (参看图 3-6(d)), 着地点的速度为 $R\dot{\psi} \sin \theta$, 其指向见图 3-6(c), 与 $R\dot{\phi}$ 相反. 不过, 这 $R\dot{\psi} \sin \theta$ 包含小量 $\dot{\psi}$ 与小量 $\sin \theta$, 因而是二阶小量, 与 $R\dot{\phi}$ 相比, 完全可以忽略. 此外, 着地点还追随盘心运动, 其速度的 x 、 y 和 z 分量分别是 \dot{x}_0, \dot{y}_0 和 \dot{z}_0 .

在滚动而无滑动的条件下, 着地点的总速度为零, 即

$$\begin{cases} \dot{x}_0 + R\dot{\theta} \cos \theta \sin \varphi - R\dot{\phi} \cos \varphi = 0, \\ \dot{y}_0 - R\dot{\theta} \cos \theta \cos \varphi - R\dot{\phi} \sin \varphi = 0. \end{cases}$$

这是非完整约束, 可以写成

$$\begin{cases} dx_0 + R \cos \theta \sin \varphi d\theta - R \cos \varphi d\phi = 0, \\ dy_0 - R \cos \theta \cos \varphi d\theta - R \sin \varphi d\phi = 0. \end{cases}$$

其次应写出拉格朗日函数 L . 唯一的主动力量是重力, 它是势力, 势能 $V = mgR \cos \theta$. 至于动能 T 应为质心的动能 T_0 与圆盘绕质心转动的动能 T' 之和. T_0 简单地是

$$T_0 = \frac{1}{2} m(\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2) = \frac{1}{2} m(\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + R^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta).$$

采用惯量主轴计算 T' 比较方便. 参看图 3-6(d), x'_1 轴通过盘心并垂直于盘面向下, 主转动惯量 $I_3 = \frac{1}{2} mR^2$. x'_2 轴是盘面水平直径, x'_3 轴是垂直于 x'_1 轴的盘面直径, 盘面任一直径都是惯量主轴, 主转动惯量 $I_1 = I_2 = \frac{1}{4} mR^2$. 转动 θ 是绕 x'_1 轴进行的, 转动 ψ 是绕 x'_2 轴进行的. 转动 ϕ 是绕竖直轴进行的, 相应的角速度矢量可分解为 (见图 3-6(d)) 沿 x'_1 轴的 $\dot{\psi} \cos \theta$ 和沿 x'_3 轴的 $-\dot{\psi} \sin \theta$. 于是,

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} (I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2) \\ &= \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\psi}^2 \cos^2 \theta + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\psi} - \dot{\phi} \sin \theta)^2. \end{aligned}$$

拉格朗日函数

$$L = \frac{1}{2} m(\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + R^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\psi}^2 \cos^2 \theta + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\psi} - \dot{\phi} \sin \theta)^2 - mgR \cos \theta, \quad (1)$$

运用拉格朗日乘子法, 按照(14.7), 对应于广义坐标 $x_0, y_0, \varphi, \psi, \theta$, 分别得

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} [m\dot{x}_0] = \lambda_1, \\ \frac{d}{dt} [m\dot{y}_0] = \lambda_2, \\ \frac{d}{dt} [I_2 \dot{\psi} \cos^2 \theta - I_3 (\dot{\psi} - \dot{\phi} \sin \theta) \sin \theta] = 0, \\ \frac{d}{dt} [I_3 (\dot{\psi} - \dot{\phi} \sin \theta)] = -\lambda_1 R \cos \varphi - \lambda_2 R \sin \varphi, \\ \frac{d}{dt} [mR^2 \dot{\theta} \sin^2 \theta + I_1 \dot{\theta}] - [mR^2 \dot{\theta}^2 \sin \theta \cos \theta - I_2 \dot{\psi}^2 \cos \theta \sin \theta - I_3 (\dot{\psi} - \dot{\phi} \sin \theta) \dot{\phi} \cos \theta + mgR \sin \theta] = \lambda_1 R \cos \theta \sin \varphi - \lambda_2 R \cos \theta \cos \varphi. \end{cases}$$

把以上五个方程和约束方程联立起来求解, 这是很艰巨的. 好在这里并不要求彻底解出滚动问题, 而只是要求研究稳定滚动条件. 这样, 在计算中可认为 $\theta, \dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{\psi}$ 是小量, 保留一阶小量而略去二阶和二阶以上小量, 把 $\sin \theta$ 换成 θ , $\cos \theta$ 换成 1. 于是, 以上五个方程和约束方程成为

$$\begin{cases} \dot{x}_0 + R\dot{\theta} \sin \varphi - R\dot{\phi} \cos \varphi = 0, & (2) \\ \dot{y}_0 - R\dot{\theta} \cos \varphi - R\dot{\psi} \sin \varphi = 0. & (3) \end{cases}$$

$$m\dot{x}_0 = \lambda_1, \quad (4)$$

$$m\dot{y}_0 = \lambda_2, \quad (5)$$

$$\frac{d}{dt} (I_2 \dot{\psi} - I_3 \dot{\phi} \theta) = 0, \quad (6)$$

$$I_3 \dot{\psi} = -\lambda_1 R \cos \varphi - \lambda_2 R \sin \varphi, \quad (7)$$

$$I_1 \dot{\theta} + I_3 \dot{\phi} \theta - mgR\theta = \lambda_1 R \sin \varphi - \lambda_2 R \cos \varphi. \quad (8)$$

以(2)和(3)的 \dot{x}_0 和 \dot{y}_0 代入(4)和(5), 略去二次项 $\theta\dot{\phi}$, 得

$$\begin{cases} \lambda_1 = -mR\dot{\theta} \sin \varphi + mR\dot{\psi} \cos \varphi - mR\dot{\phi} \theta \sin \varphi, & (9) \\ \lambda_2 = mR\dot{\theta} \cos \varphi + mR\dot{\psi} \sin \varphi + mR\dot{\phi} \theta \cos \varphi. & (10) \end{cases}$$

把(9)和(10)代入(6)–(8),得

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(I_1\dot{\phi} - I_3\dot{\phi}\theta) = 0, & (11) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (I_3 + mR^2)\ddot{\phi} = 0, & (12) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (I_1 + mR^2)\ddot{\theta} + (I_3 + mR^2)\dot{\phi}\dot{\theta} - mgR\theta = 0 & (13) \end{cases}$$

由(11)得

$$\dot{\phi} = \frac{I_3}{I_1}\dot{\phi}\theta + C, \quad (14)$$

其中 C 是积分常数。由(12)得

$$\dot{\phi} = \text{常数} \quad (15)$$

这就是说,圆盘自转角速度保持一定。以(14)和(15)代入(13),

$$\begin{aligned} (I_1 + mR^2)\ddot{\theta} + \left[(I_3 + mR^2)\frac{I_3}{I_1}\dot{\phi}^2 - mgR \right] \theta \\ = -C(I_1 + mR^2)\dot{\phi}. \end{aligned} \quad (16)$$

非齐次微分方程(16)有明显的特解

$$\theta = -C(I_1 + mR^2)\dot{\phi} / [(I_3 + mR^2)I_3\dot{\phi}^2/I_1 - mgR],$$

这特解是不随时间而变的常数。方程(16)的通解由上述特解和补余函数构成,补余函数指的是相应的齐次方程

$$(I_1 + mR^2)\ddot{\theta} + \left[(I_3 + mR^2)\frac{I_3}{I_1}\dot{\phi}^2 - mgR \right] \theta = 0 \quad (17)$$

的解。方程(17)的解视方括号值的符号而定,如值 < 0 , 方程(17)的解是指数函数,这对应于不稳定的滚动;如值 > 0 , 方程(17)的解是正弦或余弦函数,即 θ 作简谐振动,这对应于稳定的滚动。因此,稳定滚动的条件是

$$(I_1 + mR^2)\frac{I_3}{I_1}\dot{\phi}^2 - mgR > 0,$$

即

$$\dot{\phi}^2 > \frac{I_1 mgR}{I_3(I_1 + mR^2)}$$

*§ 13. 拉格朗日动力学的推广

对于保守系,广义力 $Q_a = -\frac{\partial V(q)}{\partial q_a}$, 定义拉格朗日函数

$L = T - V$, 即有拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0.$$

以上引进的势函数 V 与广义速度无关, 可称之为**普通势**。

但是, 拉格朗日方程并不只适用于普通势的系统。我们可以很自然地作如下推广: 假定系统的广义力 Q_α 满足

$$Q_\alpha = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial V}{\partial q_\alpha}, \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s) \quad (13.1)$$

其中 $V = V(q, \dot{q}, t)$ 。显然, 定义 $L = T - V$, 拉格朗日方程依然成立。为了保证广义力表达式中不显含广义加速度, V 函数只可能含有广义速度的线性项, 即

$$V = \sum_{\alpha=1}^s V_\alpha(q, t) \dot{q}_\alpha + V_0(q, t). \quad (13.2)$$

这个 V 函数称为**广义势**或**速度相关势**。

把普通势推广到广义势, 在物理上就意味着从一般机械运动的研究推广开来。例如, 在经典电磁学中, 带电量为 q 的粒子在电磁场中所受的力是

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (13.3)$$

引用矢量势 $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ 和标量势 $\varphi(\mathbf{r}, t)$,

$$\begin{cases} \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \\ \mathbf{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \end{cases} \quad (13.4)$$

则

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= q \left[-\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \right] \\ &= q \left[-\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A} \right] \\ &= q \left[-\nabla \varphi - \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\nabla(q\varphi - q\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) + \frac{d}{dt}(-q\mathbf{A}) \\
&= -\nabla(q\varphi - q\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) + \frac{d}{dt} \nabla_v(-q\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) \\
&= -\nabla(q\varphi - q\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) + \frac{d}{dt} \nabla_v(q\varphi - q\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}),
\end{aligned}$$

式中记号 ∇_v 是矢量算符 $i \frac{\partial}{\partial v_x} + j \frac{\partial}{\partial v_y} + k \frac{\partial}{\partial v_z}$.

这样,可定义广义势能

$$U(q, \dot{q}, t) = q\varphi - q\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}, \quad (13.5)$$

而广义力

$$\begin{aligned}
Q_\alpha = \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_\alpha} = -\nabla U \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_\alpha} + \frac{d}{dt} \nabla_v U \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_\alpha} \\
(\alpha = 1, 2, 3).
\end{aligned}$$

以(11.3)代入上式右边第二项,则

$$Q_\alpha = -\frac{\partial U}{\partial q_\alpha} + \frac{d}{dt} \nabla_v U \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial U}{\partial q_\alpha}. \quad (13.6)$$

于是拉格朗日方程(11.10)成为

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial U}{\partial q_\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, 3). \quad (13.7)$$

如果把 $T - U$ 也叫作拉格朗日函数 L ,

$$L = T - U = \frac{1}{2} m v^2 - (q\varphi - q\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}), \quad (13.8)$$

则拉格朗日方程(13.7)成为

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 \quad (\alpha = 1, 2, 3),$$

这样,拉格朗日力学也可以用来研究电磁运动等,而不像牛顿力学那样只能研究机械运动.

如果 x 是可遗坐标,就是说 L 不包含 x , 即 φ 和 \mathbf{A} 与 x 无关,

则相应的动量 p_x 守恒,即

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial}{\partial \dot{x}}(q\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) = m\dot{x} + qA_x \text{ 守恒. (13.9)}$$

注意这动量并不就是 $m\dot{x}$, 而多出一项 qA_x . 这多出的一项其实是电磁场的动量.

动量守恒(13.9)的根据只在于 x 是可遗坐标, 跟牛顿第三定律无关. 矢量力学论述动量守恒时是以牛顿第三定律为先决条件的, 可是电磁场很难按“牛顿方式”处理, 质点与电磁场的作用也谈不上牛顿第三定律.

至于哈密顿函数

$$\begin{aligned} H = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - L &= mv^2 + q\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - L = \frac{1}{2} mv^2 + q\varphi \\ &= \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 + q\varphi. \end{aligned} \quad (13.10)$$

具有普通势或广义势的有势系统, 系统的拉格朗日函数可表示为动能减势能(或广义势能), 而且一定可写为

$$L = T - V = L_2 + L_1 + L_0, \quad (13.11)$$

其中, L_2 是广义速度的齐二次式, L_1 是广义速度的齐一次式, L_0 是广义速度的齐零次式(与广义速度无关). 具有这种构造的系统我们称之为**自然拉格朗日系统**.

可以更大胆地推广到不同于(13.11)结构的拉格朗日函数, 只要这种具有任意结构形式的拉格朗日函数所生成的拉格朗日方程确是所研究系统的动力学方程, 就可运用拉格朗日力学来研究此系统. 这种系统称为**非自然拉格朗日系统**. 这里“非自然”并没有不现实的含义.

例如, 当质点运动速度接近光速时, 牛顿定律已不再适用, 但拉格朗日方程仍然可以适用. 这里, 只需定义一个非自然的拉格朗日函数, 就可以使拉格朗日方程恰好是狭义相对论中的动力学方程.

对于保守力场 V 中的单个质点,可定义 L 为

$$L = -m_0c^2 \sqrt{1 - \left(\frac{v^2}{c^2}\right)} - V, \quad (13.12)$$

式中 m_0 是质点的静止质量, c 是光速. 由于

$$\frac{\partial}{\partial v_x} \left(-m_0c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right) = \frac{m_0v_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

于是从(13.12)得拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{m_0v}{\sqrt{1 - \left(\frac{v^2}{c^2}\right)}} \right] = F,$$

这正是狭义相对论中的质点运动方程.

但这时要注意拉格朗日函数(13.12)已不再是 $T - V$, 因为狭义相对论中的动能

$$T = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v^2}{c^2}\right)}} - m_0c^2. \quad (13.13)$$

至于哈密顿函数

$$\begin{aligned} H = p \cdot v - L &= \frac{m_0v^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v^2}{c^2}\right)}} + m_0c^2 \sqrt{1 - \left(\frac{v^2}{c^2}\right)} + V \\ &= T + m_0c^2 + V \end{aligned}$$

仍是质点的总能量(包括静止能 m_0c^2).

这样, 拉格朗日动力学实际上概括了比牛顿力学广泛得多的系统, 甚至可包括电气系统和控制系统.

第四章 有心力 散射问题

质点所受力的作用线始终通过某定点,这种力叫作**有心力**,那个定点叫作**力心**.

实际情况却往往是两个质点在相互作用下各自运动,作用力始终沿着两质点的连线。(例如,把行星和太阳都看作质点,虽然两者都在太空中运动,但行星所受太阳引力的作用线总是通过太阳。)在研究其中一质点相对于另一质点的运动时,就不妨说第一个质点所受作用力是有心力,力心在第二个质点.

§ 14. 动力学方程及其解算

在有心力作用下,质点在通过力心的平面内运动.这是不难看出:在某个“初始”时刻,质点具有一定的初始速度,而质点的加速度指向力心.既然加速度表征着速度的变化,所以下一瞬时质点的速度必在初始速度与加速度所决定的平面中,即在通过力心与初始速度的平面中.而此一瞬时的加速度必又在该平面中,从而再下一瞬时的速度必仍在该平面中.如此继续推论下去,可知质点的速度始终在该平面中,从而质点始终在该平面中运动.

质点在有心力作用下的运动是平面运动.因此,两个质点,如果相互作用力沿着两者连线,最多有五个自由度,即质心的运动有三个自由度,两质点相对的平面运动有两个自由度.

我们采用直角坐标系研究质心的运动,采用极坐标研究第二个质点相对于第一个质点的运动.这样,这个两质点系统的广义坐标是质心坐标 (x_0, y_0, z_0) 以及相对极径 ρ 和相对极角 φ .

唯一的主动动力是两质点相互作用力 $F(\rho)$,这是保守力,相应

的势能为

$$V(\rho) = - \int_{\infty}^{\rho} F(\rho) d\rho, \quad (14.1)$$

这里已规定两质点相距无限远时的势能为零。

至于动能可利用柯尼希定理(5.10)计算,即质点组的动能 T 等于质心的动能 T_0 加上质点组相对于质心的运动的动能 T' 。

把两个质点的质量分别记作 m 和 M , 则质心的质量 $m_0 = M + m$, 质心的动能可简单写为

$$T_0 = \frac{1}{2} m_0 v_0^2 = \frac{1}{2} m_0 (\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2). \quad (14.2)$$

现在计算 T' 。参看图 4-1, 我们采用的广义坐标 ρ 和 φ 是两

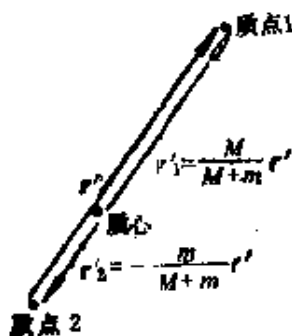


图 4-1

质点相对径矢 r' 在极坐标中的表示。可是, T' 所说的却是两质点相对于质心的运动的动能。我们知道, 质心把两质点连线分为两段, 其长度反比于各质点的质量。这样,

$$r'_1 = \frac{M}{M+m} r', \quad r'_2 = -\frac{m}{M+m} r',$$

从而

$$v'_1 = \frac{M}{M+m} v', \quad v'_2 = -\frac{m}{M+m} v'.$$

于是, 两质点相对于质心的运动的动能

$$\begin{aligned} T' &= \frac{1}{2} m v_1'^2 + \frac{1}{2} M v_2'^2 = \frac{1}{2} m \left(\frac{M}{M+m} v' \right)^2 \\ &+ \frac{1}{2} M \left(-\frac{m}{M+m} v' \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{Mm}{M+m} v'^2. \end{aligned} \quad (14.3)$$

上式相当于一个质量为 $Mm/(M+m)$ 而速度为 v' 的质点的动能表示式, 因此把 $Mm/(M+m)$ 叫作约化质量, 记作 m' , 它曾出现于(5.4),

$$m' = \frac{Mm}{M+m}, \quad \text{即} \quad \frac{1}{m'} = \frac{1}{M} + \frac{1}{m}. \quad (14.4)$$

利用约化质量, 相对于质心的动能就表为

$$T' = \frac{1}{2} m' v'^2 = \frac{1}{2} m' [\dot{\rho}^2 + (\rho\dot{\varphi})^2]. \quad (14.5)$$

综合以上各式, 得到拉格朗日函数

$$L = \frac{1}{2} m_0 (\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2) + \frac{1}{2} m' (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2) - V(\rho). \quad (14.6)$$

x_0, y_0 和 z_0 都是可遗坐标, 相应的动量守恒, 即质心动量守恒。换句话说, 质心保持静止或作匀速直线运动。以下不再讨论质心的运动, 而专注于相对运动, 即 ρ 和 φ 的变化。

φ 也是可遗坐标, 相应的广义动量 $p_\varphi = \partial L / \partial \dot{\varphi} = m' \rho^2 \dot{\varphi}$ 守恒。这其实就是质点相对于极点的角动量守恒, 我们把它记作 $m'h$,

$$\rho^2 \dot{\varphi} = h. \quad (14.7)$$

矢量力学的横向运动方程也给出这个结论。

拉格朗日函数 L 不显含时间, 所以哈密顿函数守恒。本例中哈密顿函数就是机械能 E ,

$$H = \frac{1}{2} m_0 (\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2) + \frac{1}{2} m' (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2) + V(\rho) = E.$$

因此,

$$\frac{1}{2} m' (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2) + V(\rho) = E', \quad (14.8)$$

式中 $E' = E - \frac{1}{2} m_0 (\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2)$ 是相对运动的机械能。

方程(14.7)和(14.8)是相对运动的两个基本的动力学方程。

从两方程消去 $\dot{\varphi}$ 得径向运动 $\rho(t)$ 的微分方程

$$\frac{1}{2} m' \dot{\rho}^2 + \frac{1}{2} m' \frac{h^2}{\rho^2} + V(\rho) = E'.$$

这表明, 相对的径向运动可看作某种“一维”运动, 而把 $m'h^2/2\rho^2$ 看

作惯性离心力 $m' \rho \dot{\varphi}^2$ (即 $m'h^2/\rho^3$) 的“势能”。通常将 $m'h^2/2\rho^2 + V(\rho)$ 称为**有效势能**, 记作 $V'(\rho)$,

$$V'(\rho) = \frac{1}{2} \frac{m' h^2}{\rho^2} + V(\rho).$$

将径向运动微分方程分离变数,

$$\frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m'} [E' - V'(\rho)]}} = dt, \quad (14.9)$$

两边分别积分就给出径向运动 $\rho(t)$ 。把解得的 $\rho(t)$ 代入(14.7)并分离变数,

$$d\varphi = \frac{h dt}{[\rho(t)]^2}, \quad (14.10)$$

两边分别积分就给出相对方位角变化情况 $\varphi(t)$ 。

这样, 详尽的解已经求得。当然, 对于具体问题, 还必须根据 $F(\rho)$ 的具体形式算出有效势能 $V'(\rho)$, 代入(14.9)和(14.10), 才可能得到具体的 $\rho(t)$ 和 $\varphi(t)$ 。

既已求得详尽的解, 从 $\rho = \rho(t)$ 和 $\varphi = \varphi(t)$ 消去时间参数 t 就得到相对运动的轨道方程。

某些问题只需求轨道, 并不要求知道质点怎样在轨道上运转, 这就不必先求详尽解然后消去时间参数 t 。完全可以一开始就从基本方程消去 t 。事实上, 利用(14.7)可把 d/dt 改用 $d/d\varphi$ 表出,

$$\frac{d}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \frac{d}{d\varphi} = \frac{h}{\rho^2} \frac{d}{d\varphi}. \quad (14.11)$$

把(14.11)代入(14.8), 并分离变数,

$$\frac{h d\rho}{\rho^2 \sqrt{\frac{2}{m'} [E' - V'(\rho)]}} = d\varphi. \quad (14.12)$$

两边分别积分, 就得**轨道方程**。

极坐标 ρ 和 φ 都是实数, (14.12)左边分母的根号下的式子不可为负,

$$E' - V'(\rho) \geq 0.$$

事实上,上式左边是径向运动的动能,当然不应为负.这样,当

$$E' < \lim_{\rho \rightarrow \infty} V'(\rho) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} V(\rho)$$

时,则 $\rho \rightarrow \infty$ 是不容许的,换句话说,这时轨道不会伸向无限远,运动范围是有限的;当 $E' \geq \lim_{\rho \rightarrow \infty} V(\rho)$ 时,则 $\rho \rightarrow \infty$ 是容许的,这时

轨道伸向无限远,运动范围是无限的.

轨道微分方程(14.12)是用有效势能 $V'(\rho)$ 表出的.其实,我们也可以直接用 $F(\rho)$ 来表述轨道微分方程.为此,将(14.8)对 ρ 求导,

$$m' \dot{\rho} \frac{d\dot{\rho}}{d\rho} + m' \rho \dot{\varphi}^2 - F(\rho) = 0,$$

即

$$m' \frac{d\dot{\rho}}{dt} + m' \rho \dot{\varphi}^2 - F(\rho) = 0. \quad (14.13)$$

读者不难看出,这实际上是回到极坐标系的径向运动方程.考虑最后结果的简洁,作变换

$$u = 1/\rho,$$

依照(14.11)有

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= \frac{h}{\rho^2} \frac{d\rho}{d\varphi} = hu^2 \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{u} \right) = -h \frac{du}{d\varphi}, \\ \frac{d^2\rho}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left(-h \frac{du}{d\varphi} \right) = -h^2 u^2 \frac{d^2u}{d\varphi^2}. \end{aligned}$$

代入运动方程(14.13)并利用(14.7)消去 $\dot{\varphi}$, 得

$$h^2 u^2 \left(\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u \right) = -\frac{F}{m}. \quad (14.14)$$

这就是用力 $F(\rho)$ 表出的轨道微分方程,通常称为比内公式.

变换 $u = 1/\rho$ 也可施于(14.8),其结果是

$$\frac{1}{2} m' h^2 \left[\left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 + u^2 \right] + V \left(\frac{1}{u} \right) = E'. \quad (14.15)$$

这个轨道微分方程是一阶的，因此可叫作**降阶的比内公式**。读者不难验证它就是(14.12)。

这样，只要知道 F 的具体表达式，就可以从比内公式解出轨道方程。另一方面，若已知轨道方程也可以从比内公式求得 $F(\rho)$ 的表达式。

例如，已知质点在有心力作用下的轨道是以力心为焦点的圆锥曲线

$$\rho = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}, \quad \text{即 } u = \frac{1}{p} + \frac{\varepsilon}{p} \cos \varphi. \quad (14.16)$$

式中 p 为焦点参数， ε 为离心率。将轨道方程(14.16)代入比内公式，得知

$$\begin{aligned} F &= -mh^2u^2 \left(\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u \right) \\ &= -mh^2u^2 \left(-\frac{\varepsilon}{p} \cos \varphi + \frac{1}{p} + \frac{\varepsilon}{p} \cos \varphi \right) \\ &= -\frac{mh^2}{p} u^2 = -\frac{mh^2}{p} \frac{1}{\rho^2}. \end{aligned} \quad (14.17)$$

力 F 反比于距力心距离的平方；负号表明力的指向与径向的正指向相反，即质点受到的是吸引力。这就是说，质点所受的有心力是平方反比吸引力。

§ 15. 平方反比引力

有心力问题的一个重要特例是平方反比引力(如万有引力, 异号电荷之间的静电引力等)

(1) 开普勒行星运动定律

丹麦天文学家第谷·布拉赫于 1580—1600 年间在设备完善的布拉格天文台里系统地观测了星球。当时望远镜尚未发明，全

部观测都凭肉眼进行,但他所测定的行星位置却以高度精密著名,在他身后,这些资料留给了他的助手开普勒,

开普勒决心利用这些资料来论证并改进哥白尼的理论,终于在解除了自古以来的圆周运动的思想束缚之后,揭示了著名的**开普勒行星运动定律**:

第一定律:行星的轨道是椭圆,太阳位于椭圆的一个焦点。
(1609年)

第二定律:行星的矢径在相等的时间内扫过相等的面积。
(1609年)

第三定律:行星公转周期的平方正比于轨道半长轴的立方。
(1618年)

开普勒行星运动定律的动力学意义到牛顿手里才被阐发出来。

首先,第二定律指出行星绕太阳的掠面速度为常数,依(1.10),这就是说,

$$\frac{1}{2} \rho^2 \dot{\psi} = \text{常数}.$$

试与 § 4(2) 的角动量在极坐标系中的表达式比较,这式与角动量守恒实质上是一回事。掠面速度为常数也就意味着行星运转时对于太阳的角动量守恒,从而推知,行星所受的力对于太阳的力矩始终为零。第二定律表明行星所受的力是有心力,太阳为力心。

其次,根据(14.16)和(14.17),第一定律表明行星所受到的有心力是平方反比吸引力。

这样,第一、第二两定律指出,每一个行星受到的力是指向太阳的吸引力,吸引力的大小反比于该行星在运行中与太阳距离的平方。

那么,第三定律又说明什么呢?将行星的轨道方程表为(14.16)

$$\rho = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}.$$

易于验明：这种轨道(图 4-2) 的近日距离 $\rho_{\min} = p/(1 + \epsilon)$ ，远日距离 $\rho_{\max} = p/(1 - \epsilon)$ ，从而半长轴 $a = \frac{1}{2}(\rho_{\min} + \rho_{\max}) = p/(1 - \epsilon^2)$ ，半短轴 $b = a\sqrt{1 - \epsilon^2} = p/\sqrt{1 - \epsilon^2}$ 。而公转周期

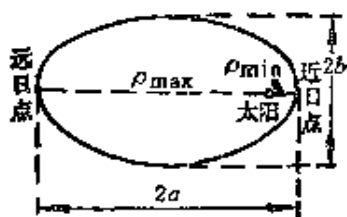


图 4-2

期

$$T = \frac{\text{椭圆面积}}{\text{掠面速度}} = \frac{\pi ab}{h/2} = \frac{2\pi p^2}{h(1 - \epsilon^2)^{3/2}}$$

因此，

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 p^4}{h^2(1 - \epsilon^2)^3} \bigg/ \frac{p^3}{(1 - \epsilon^2)^3} = \frac{4\pi^2 p}{h^2}$$

于是按(14.17)，行星所受的力

$$F = -\frac{m}{\rho^2} \times 4\pi^2 \frac{a^3}{T^2} \quad (15.1)$$

据第三定律， T^2/a^3 是与行星无关的常数，所以

$$F = -\frac{m}{\rho^2} \times \text{与行星无关的常数。}$$

这就是说，各个行星所受的吸引力反比于各该行星距太阳距离的平方，正比于各该行星的质量。

牛顿还研究了月球绕地球的运动，发现地球对月球的引力也就是地球吸引地面上物体的力，只是按距离平方反比而减弱了的。

因此，这种平方反比引力并不只是天体之间特有的，而是存在于任意物体之间。牛顿就这样经由开普勒行星运动定律发现了万有引力。

随着望远镜等精密仪器的出现，发现开普勒行星运动定律是近似的，行星的实际运行情况与开普勒定律有少许偏离。牛顿又指出这些偏离也是引力作用的结果。行星不仅受到太阳的引力，还受到其他行星的引力，因而其运动与开普勒定律有偏离。

(2) 平方反比引力作用下的运动

这里研究质点在平方反比引力作用下的运动，其一个重要例子即是行星在太阳的引力作用下的运动。

同时绕太阳运行的实际上有好几个行星，但这种问题的严格解决极为困难，至今还不成功。在天体力学中研究某个行星运动时，先只考虑最主要的因素，即太阳对该行星的引力，暂时撇开其他行星对该行星的引力不谈，这就是单个行星绕太阳运行的问题。这样所得的解能够反映出该行星运动的基本情况。当然，其他行星对该行星也有引力，只考虑太阳引力所得的解与实际的运动情况还是有差别的，通常说，该行星受到了其他行星的**摄动**。好在摄动是比较小的，因此可在前所得解的基础上进行逐级的校正以求得近似程度越来越高的解，这就是所谓**摄动法(微扰法)**。这一方法后来也广泛应用于其他方面，例如量子力学就经常应用这一方法。总而言之，单个行星绕太阳运行的问题还是有实际意义的。

取平面极坐标系，以力心为极点。例如，在单个行星绕太阳运行的问题中就以太阳为极点。质点所受平方反比引力可记作

$$F(\rho) = -\frac{mk^2}{\rho^2}. \quad (15.2)$$

例如，对于行星所受太阳的引力，上式中的 $k^2 = GM$ (M 是太阳质量， G 是万有引力常数)。相应的势能是

$$V(\rho) = -\int_{\infty}^{\rho} -\frac{mk^2}{\rho^2} d\rho = -\frac{mk^2}{\rho},$$

而有效势

$$V'(\rho) = V(\rho) + \frac{m'h^2}{\rho^2} = -\frac{mk^2}{\rho} + \frac{m'h^2}{\rho^2}.$$

代入(14.12)以求轨道方程，

$$\frac{hd\rho}{\rho \sqrt{\frac{2E'}{m'} \rho^2 + \frac{2mk^2}{m'} \rho - h^2}} = d\varphi,$$

$$\arcsin \left[\frac{(2mk'/m')\rho - 2h^2}{\rho \sqrt{(4m^2k^4 + 8E'h^2m')/m'^2}} \right] = \varphi + C + \frac{3}{2}\pi,$$

积分常数记作 $C + \frac{3}{2}\pi$, 以便把下列轨道方程写成标准形式:

$$\rho = \frac{h^2m'/mk^2}{1 + \sqrt{1 + (E'2h^2m'/m^2k^4)}\cos(\varphi + C)}. \quad (15.3)$$

这是圆锥曲线的方程, 离心率

$$\varepsilon = \sqrt{1 + (E'2h^2m'/m^2k^4)}.$$

轨道究竟是椭圆或抛物线还是双曲线的一支, 视 $\varepsilon < 1$ 或 $\varepsilon = 1$ 还是 $\varepsilon > 1$ 而定, 亦即视

$$E' < 0 \text{ 或 } E' = 0 \text{ 还是 } E' > 0$$

而定. 圆是椭圆的特例, 其离心率 $\varepsilon = 0$, 即 $E' = -m^2k^4/2h^2m'$.

鉴于椭圆运动的重要性, 这里特别给出椭圆运动的诸参数. 方程(15.3)可写成

$$\rho = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos(\varphi + C)}. \quad (15.4)$$

容易算出焦点参数 p , 半长轴 a 和半短轴 b :

$$p = m'h^2/mk^2, \quad (15.5)$$

$$\begin{aligned} a &= (\rho_{\max} + \rho_{\min})/2 = p/(1 - \varepsilon) + p/(1 + \varepsilon), \\ &= p/(1 - \varepsilon^2) = mk^2/2|E'|, \end{aligned} \quad (15.6)$$

$$b = a\sqrt{1 - \varepsilon^2} = p/\sqrt{1 - \varepsilon^2} = h\sqrt{m'/2|E'|}. \quad (15.7)$$

用这些式子可以验证开普勒行星运动第三定律:

$$\text{周期 } \tau = \frac{\text{椭圆面积}}{\text{掠面速度}} = \frac{\pi ab}{\rho^2 \dot{\varphi}/2} = \frac{\pi ab}{h/2} = \frac{2\pi a^2 \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{h},$$

$$\frac{\tau^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 a^4 (1 - \varepsilon^2)}{h^2 a^3} = \frac{4\pi^2 a (1 - \varepsilon^2)}{h^2} = \frac{4\pi^2 m'}{k^2 m}.$$

行星的质量 m 远小于太阳的质量 M , 所以约化质量 $m' \approx m$, 上式右边成为 $4\pi^2/k^2$, 这是各个行星共同的常数.

这样,我们证明了本节(1)的逆命题:平方反比引力作用下的行星运动遵守开普勒定律。

如果要求详尽的解,则应以 $V(\rho)$ 的表示式代入(14.9)。为简便计,这里将忽略 m' 与 m 的差别,

$$dt = \frac{\rho d\rho}{\sqrt{\frac{2E'}{m}\rho^2 + 2k^2\rho - h^2}}. \quad (15.8)$$

为进一步积分,需将根号下的二次式配平方。这也应区分 $E' < 0$, $E' = 0$ 与 $E' > 0$ 三种情况。

1. $E' < 0$ 的情况, (15.8) 可改写为

$$\begin{aligned} dt &= \sqrt{\frac{m}{2|E'|}} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{\left(\frac{m^2 k^4}{4|E'|^2} - \frac{m h^2}{2|E'|}\right) - \left(\rho - \frac{m k^2}{2|E'|}\right)^2}} \\ &= \frac{\sqrt{a}}{k} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{a^2 e^2 - (\rho - a)^2}}. \end{aligned}$$

作代换 $\rho - a = -ae \cos \xi$ 就可积分,结果是

$$t = \frac{a^{3/2}}{k} \int (1 - e \cos \xi) d\xi = \frac{a^{3/2}}{k} (\xi - e \sin \xi) + \text{常数}.$$

适当选取时间 t 的计算起点,可使上式中的常数为零。这就是天体力学中著名的开普勒方程:

$$(k/a^{3/2})t = \xi - e \sin \xi, \quad (15.9)$$

它给出 ρ 作为时间 t 的隐函数。

2. $E' = 0$ 的情况, (15.8) 可改写为

$$dt = \frac{\rho d\rho}{\sqrt{2k^2\rho - h^2}}$$

作代换 $\rho = (h^2/2k^2)(1 + \xi^2)$ 就可积分,结果是

$$\begin{aligned} t &= \frac{h^4}{2k^4} \int \frac{(1 + \xi^2)\xi d\xi}{h\xi} = \frac{h^3}{2k^4} \int (1 + \xi^2) d\xi \\ &= \frac{h^3}{2k^4} \left(\xi + \frac{1}{3} \xi^3 \right) + \text{常数}, \end{aligned} \quad (15.10)$$

它也是给出 ρ 作为时间 t 的隐函数。

3. $E' > 0$ 的情况。(15.8) 可改写为

$$dt = \sqrt{\frac{m}{2E'}} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{\left(\rho + \frac{mk^2}{2E'}\right)^2 - \left(\frac{m^2 k^4}{4E'^2} - \frac{mh^2}{2E'}\right)}}$$

$$= \frac{\sqrt{a}}{k} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{(\rho + a)^2 - a^2 \sigma^2}}$$

作代换 $\rho + a = a\sigma \cosh \xi$ 就可积分。结果是

$$t = \frac{a^{3/2}}{k} \int (\sigma \cosh \xi - 1) d\xi$$

$$= \frac{a^{3/2}}{k} (\sigma \sinh \xi - \xi) + \text{常数}.$$

适当选取时间 t 的计算起点, 可使上式中的常数为零,

$$(k/a^{3/2})t = \sigma \sinh \xi - \xi, \quad (15.11)$$

它还是给出 ρ 作为时间 t 的隐函数。

(3) 椭圆运动的能量

这里要特别强调一下(15.6)和(15.7)。它们指出, 椭圆的长轴只取决于能量而与角动量无关, 短轴则既取决于能量又取决于角动量。

(15.6) 可以改写成

$$E' = -\frac{mk^2}{2a}. \quad (15.12)$$

椭圆运动的能量只取决于长轴而与短轴无关。

圆是椭圆的特例, 其半长轴 a 与半短轴 b 相等, 也即是其半径。所以(15.12)也适用于圆运动, 式中的 a 是圆的半径。

以上结论在玻尔原子模型中也成立。按照玻尔模型, 原子中的核外电子就是在原子核的平方反比库仑引力作用下沿着椭圆轨道或圆轨道运行。

我们也可以直接计算椭圆运动的能量

$$E' = \frac{1}{2} m' \dot{\rho}^2 + \frac{1}{2} m' \rho^2 \dot{\varphi}^2 + V(\rho).$$

利用(14.10)和(14.11),

$$\begin{aligned} E' &= \frac{1}{2} m' \left(\frac{h}{\rho^2} \frac{d\rho}{d\varphi} \right)^2 + \frac{1}{2} m' \frac{h^2}{\rho^3} - m' \frac{k^2}{\rho} \\ &= \frac{1}{2} m' \frac{h^2}{\rho^4} \left(\frac{d\rho}{d\varphi} \right)^2 + \frac{1}{2} m' \frac{h^2}{\rho^3} - \frac{m' k^2}{\rho}. \end{aligned}$$

根据(15.4)

$$\begin{aligned} E' &= \frac{1}{2} m' \frac{h^2 (1 + \varepsilon \cos \varphi)^2}{\rho^4} \cdot \frac{\rho^2 \varepsilon^2 \sin^2 \varphi}{(1 + \varepsilon \cos \varphi)^4} \\ &\quad + \frac{1}{2} m' \frac{h^2 (1 + \varepsilon \cos \varphi)^2}{\rho^3} - \frac{m' k^2 (1 + \varepsilon \cos \varphi)}{\rho}. \end{aligned}$$

利用(15.5)把 h^2 改用 p 表出

$$\begin{aligned} E' &= \frac{m' k^2}{2p} \varepsilon^2 \sin^2 \varphi + \frac{m' k^2}{2p} (1 + \varepsilon \cos \varphi)^2 \\ &\quad - \frac{m' k^2 (1 + \varepsilon \cos \varphi)}{p} \\ &= \frac{m' k^2}{2p} [\varepsilon^2 \sin^2 \varphi + (1 + 2\varepsilon \cos \varphi + \varepsilon^2 \cos^2 \varphi) \\ &\quad - 2(1 + \varepsilon \cos \varphi)] \\ &= \frac{m' k^2}{2p} [\varepsilon^2 - 1] = -\frac{m' k^2}{2p(1 - \varepsilon^2)} = -\frac{m' k^2}{2a}, \end{aligned}$$

与(15.12)一致。

(4) 圆轨道的稳定性

质点在轨道上运动时,若受到某种因素的扰动,就会偏离原来的轨道。如果质点受微扰后,虽偏离原轨道,但仍能始终保持在原轨道的附近,在原轨道的内外振动,则此种轨道称为是稳定的,反之,如果受微扰后偏离原轨道的程度不断加大,则称为是不稳定的。

设圆轨道半径为 r_0 , 有效势为 $V'(\rho)$. 判断轨道是否为稳定

的方法之一是研究平衡点 r_0 处的有效势是否为极小：若 V' 为极小值，

$$\left. \frac{\partial^2 V'}{\partial \rho^2} \right|_{\rho=r_0} > 0,$$

则圆轨道为稳定的；若 V' 为极大值，

$$\left. \frac{\partial^2 V'}{\partial \rho^2} \right|_{\rho=r_0} < 0,$$

则圆轨道不稳定。

下面计算稳定的圆轨道上质点受到微扰后绕平衡位置振动的周期。由机械能守恒，

$$\frac{1}{2} m \dot{\rho}^2 + V'(\rho) = E. \quad (15.13)$$

将有效势 $V'(\rho)$ 在平衡位置 $\rho = r_0$ 附近展开：

$$\begin{aligned} V'(\rho) = & V'(r_0) + \left. \frac{\partial V'}{\partial \rho} \right|_{\rho=r_0} (\rho - r_0) \\ & + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 V'}{\partial \rho^2} \right|_{\rho=r_0} (\rho - r_0)^2 + \dots \end{aligned} \quad (15.14)$$

略去二阶以上微量，又考虑到在平衡位置有

$$\left. \frac{\partial V'}{\partial \rho} \right|_{\rho=r_0} = 0,$$

将(15.14)代回到机械能守恒方程(15.13)中，得

$$\frac{1}{2} m \dot{\rho}^2 + V'(r_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 V'}{\partial \rho^2} \right|_{\rho=r_0} (\rho - r_0)^2 = E.$$

对 t 求导一次，得

$$m \dot{\rho} \ddot{\rho} + \left. \frac{\partial^2 V'}{\partial \rho^2} \right|_{\rho=r_0} (\rho - r_0) \dot{\rho} = 0,$$

即

$$m \ddot{\rho} + \left. \frac{\partial^2 V'}{\partial \rho^2} \right|_{\rho=r_0} (\rho - r_0) = 0. \quad (15.15)$$

对于稳定平衡,必有 $[\partial^2 V' / \partial \rho^2] |_{\rho=r_0} > 0$, 上式表示质点在 ρ 方向作简谐振动,其周期为

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\left. \frac{\partial^2 V'}{\partial \rho^2} \right|_{\rho=r_0}}}.$$

例 1 一质点 m 在势能为 $-km/\rho^n$ 的有心力作用下沿一半径为 r 的圆轨道运动,试证明如果 $n < 2$, 则圆轨道受到微扰时是稳定的.

解 先求出质点运动时的有效势 V' . 因质点受有心力作用,所以角动量守恒,

$$m\rho^2\dot{\phi} = \text{常量} = mh. \quad (1)$$

惯性离心力

$$F_{\text{离}} = m\rho\dot{\phi}^2 = mh^2/\rho^3.$$

惯性离心力势能

$$V_{\text{离}} = \int \frac{mh^2}{\rho^3} d\rho = \frac{mh^2}{2\rho^2} + C. \quad (2)$$

所以有效势为

$$V' = -\frac{km}{\rho^n} + \frac{mh^2}{2\rho^2} + C. \quad (3)$$

而稳定平衡条件为

$$\left. \frac{dV'}{d\rho} \right|_{\rho=r_0} = 0 \quad \text{且} \quad \left. \frac{d^2V'}{d\rho^2} \right|_{\rho=r_0} > 0 \quad (4)$$

第一个条件即

$$\frac{kmn}{r_0^{n+1}} - \frac{mh^2}{r_0^3} = 0.$$

亦即

$$\frac{1}{r_0^{n-1}} = \frac{h^2}{kn^2}. \quad (5)$$

而第二个条件即

$$-\frac{kmn(n+1)}{r_0^{n+2}} + \frac{3mh^2}{r_0^4} > 0. \quad (6)$$

将(5)式代入(6)式得

$$3 > n + 1,$$

即

$$n < 2.$$

研究圆轨道的稳定性，也可以采用线性化的方法：先求出系统的拉格朗日函数，导出 ρ 的拉格朗日方程，并借助角动量守恒消去 $\dot{\varphi}$ 。设 ρ 稍稍偏离平衡值，把拉格朗日方程线性化，就是说，略去小偏离的二次幂以及高次幂。如线性化方程是振动方程，即 ρ 在平衡值附近振动，则轨道是稳定的。

例 2 一光滑水平桌面上有一小孔，通过小孔用一细绳在绳的两端系着两个质量同为 m 的质点(图 4-3)。桌面下方的质点沿竖直方向运动，讨论桌面上质点运动轨道的稳定性。

解 在桌面上取极坐标 (ρ, φ) ，以小孔为极点。桌面下质点的位置以坐标 z 表示。由于绳长不变，

$$\rho - z = l. \quad (1)$$

系统的势能

$$V = mgz = mg(\rho - l), \quad (2)$$

动能

$$T = \frac{1}{2} m(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2)$$

$$+ \frac{1}{2} m\dot{z}^2$$

$$= \frac{1}{2} m(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2) + \frac{1}{2} m\dot{\rho}^2, \quad (3)$$

拉格朗日函数

$$L = T - V$$

$$= \frac{1}{2} m\dot{\rho}^2 + \frac{1}{2} m(\rho^2 \dot{\varphi}^2) - mg(\rho - l). \quad (4)$$

因为桌面上质点受到的是有心力，角动量守恒，

$$m\rho^2\dot{\varphi} = \text{常数}, \quad mh. \quad (5)$$

所以

$$L = m\dot{\rho}^2 + \frac{1}{2} \frac{mh^2}{\rho^2} - mg(\rho - l). \quad (6)$$

由拉格朗日方程 $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \rho} = 0$ 得

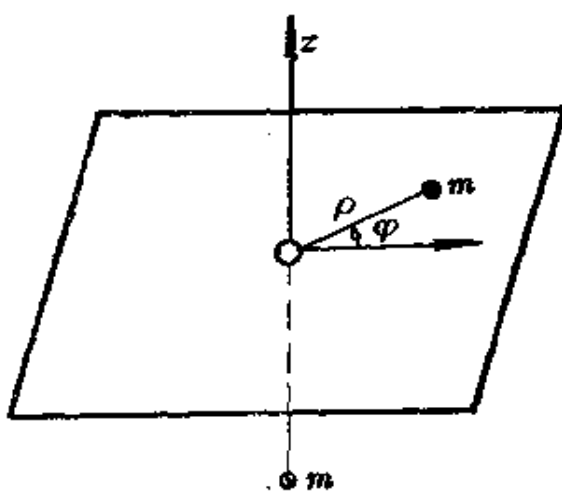


图 4-3

$$2m\dot{\rho} - \frac{mh^2}{\rho^3} + mg = 0. \quad (7)$$

对于 $\rho = r_0$ 的圆轨道, $\dot{\rho} = 0$, $\ddot{\rho} = 0$, 可用(7)式求得角动量 mh ,

$$m^2 h^2 = m^2 g r_0^3. \quad (8)$$

从而得到圆轨道运动的角速度

$$\dot{\phi} = \frac{h}{r_0^2} = \sqrt{\frac{g}{r_0}}. \quad (9)$$

这时绳中张力 mg 充当圆运动的向心力.

下面考虑轨道的稳定性. 设桌面上的质点有微小的径向偏离,

$$\rho = r_0 + \varepsilon \quad (\varepsilon \ll r_0). \quad (10)$$

将(10)代入(7)得

$$2m\dot{\varepsilon} - \frac{mh^2}{r_0^3(1+\varepsilon/r_0)^3} + mg = 0.$$

将 $(1 + \varepsilon/r_0)^{-3}$ 展开为 ε/r_0 的幂级数, 并略去二阶及二阶以上微量, 即得

$$2m\dot{\varepsilon} - \frac{mh^2}{r_0^3} \left(1 - \frac{3\varepsilon}{r_0}\right) + mg = 0. \quad (11)$$

用(8)消去(11)中的 h , 则(11)化为

$$\ddot{\varepsilon} + \frac{3g}{2r_0} \varepsilon = 0. \quad (12)$$

(12)表示 ε 在 $\varepsilon = 0$ (质点在平衡位置 r_0) 附近作简谐振动, 其角频率为

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{2r_0}},$$

周期为

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2r_0}{3g}}.$$

§ 16. 人造地球卫星

(1) 环绕卫星

地球周围的大气层对环绕地球高速运动的卫星会产生巨大的摩擦力, 摩擦产生的热量可以烧毁卫星. 即使不谈烧毁, 这摩擦阻

力也会使卫星的能量急速减少,从而轨道迅速变低以致卫星陨落。

因此卫星的轨道必须有足够的高度,让它飞行在大气层之上,一般应离地面 120 千米以上。

卫星的轨道一般为椭圆或近似为圆,以地心为坐标系的原点,卫星的轨道是不变的,但地球却在不停地自转,所以卫星可以覆盖地面上的相当一部份区域。设轨道平面与赤道平面的夹角为 θ 。由图 4-4 可以看出卫星轨道覆盖区域的最高纬度就等于 θ ,所以 θ 越大,卫星覆盖的地面区域就越大。一般的气象卫星或侦察卫星即属此类卫星。

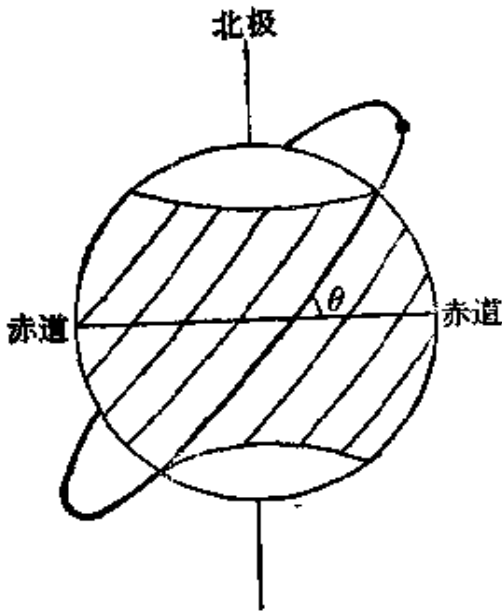


图 4-4

(2) 同步卫星

由于通讯及电视转播的需要,我们要求卫星处于地球上空某一固定位置,也就是说在地球上看来卫星是不动的。相对于地心来说,卫星应和地球以同一角速度转动,因而称此为同步卫星。参看图 4-4,同步卫星的 θ 必须为零,即只能位于赤道上空。地球的自转角速度 $\omega_e = 7.27 \times 10^{-5}$ 弧度/秒,同步卫星环绕地球的角速度既然与 ω_e 相同,则由万有引力定律

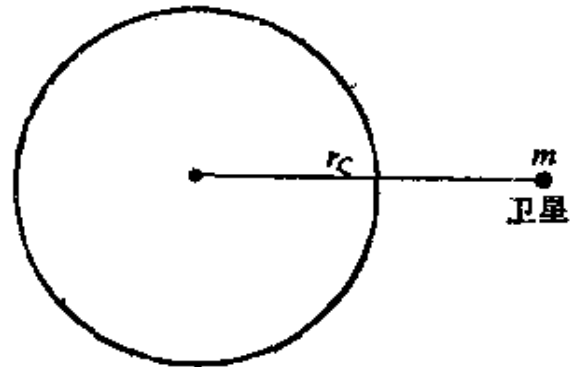


图 4-5

$$mg \frac{R^2}{r_c^2} = m \omega_0^2 r_c, \quad (16.1)$$

式中 m 为卫星质量, r_c 为卫星与地心距离, R 为地球半径 (图 4-5)。由此求得同步卫星距地心

$$r_c = \sqrt[3]{\frac{gR^2}{\omega_0^2}} = 4.22 \times 10^4 \text{ 千米},$$

而离地面高度则是 $(4.22 - 0.64) \times 10^4$ 千米, 即为 3.58×10^4 千米。同步卫星的速度 v_c 则是

$$v_c = r_c \omega_0 = 3.069 \text{ 千米/秒}$$

但要注意这是它在同步轨道上运行的速度, 而不是从地面发射的速度。

(a) 赤道上发射同步卫星

在赤道向上空垂直发射卫星, 若略去空气阻力来计算发射速度 v_0 , 则由机械能守恒, 有

$$-mgR + \frac{1}{2}mv_0^2 = -\frac{mgR^2}{r_c} + \frac{1}{2}mv_c^2, \quad (16.2)$$

求出

$$v_0 = \sqrt{v_c^2 + 2gR \left(1 - \frac{R}{r_c}\right)}$$

$$= 10.74 \text{ 千米/秒}.$$

当卫星到达与地心距离为 r_c 时, 令其向东转 90° , 而速度仍为 v_c , 它就进入同步轨道了。

不过, 实际上通常是先将卫星送入围绕地球的某一圆轨道 I, 称为**停泊轨道** (图 4-6)。卫星经停泊轨道上某点 A 时, 使卫星速度的大小作适当的增加 (方向不变)。这样, 卫星进入以 A 点为近地点的椭圆轨

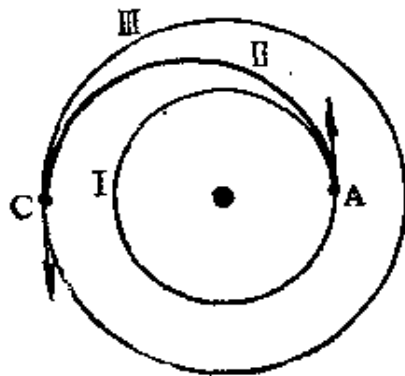


图 4-6

道 II，而这椭圆轨道的远地距离恰好等于同步轨道的半径，这就是转移轨道。当卫星到达它的远地点 C 时，再一次适当增速，使之恰好进入与 II 相切的圆形同步轨道。

这三条轨道在同一平面内，而且两两相切，这种转移常称为霍曼转移。

现在让我们计算卫星在 A 点和 C 点转轨时的速度增量及能量增量。

先讨论在 A 点自圆轨道 I 转入椭圆轨道 II。

于圆轨道 I，万有引力提供向心力

$$\frac{mgR^2}{r_A^2} = \frac{mv_A^2}{r_A} \quad (16.3)$$

所以在圆轨道上卫星运行的速度

$$v_A = \sqrt{\frac{gR^2}{r_A}}$$

从而动能

$$T_A = \frac{1}{2} mv_A^2 = \frac{1}{2} \frac{mgR^2}{r_A}$$

椭圆轨道 II 的半长轴 $a = (r_A + r_C)/2$ 。卫星在椭圆轨道上运行时总机械能为 $E = -mgR^2/2a$ ，所以

$$\frac{1}{2} mv_A'^2 - \frac{mgR^2}{r_A} = -\frac{mgR^2}{2a}$$

上式中 v_A' 为卫星沿椭圆轨道 B 运行时在 A 点的速度。由上式解得

$$v_A' = \sqrt{\frac{gR^2}{r_A} \left(2 - \frac{r_A}{a} \right)}$$

动能为

$$T_A' = \frac{1}{2} mv_A'^2 = \frac{mgR^2}{2r_A} \left(2 - \frac{r_A}{a} \right)$$

由此可见，卫星在 A 点转轨的速度增量应为

$$\Delta v_1 = v'_A - v_A = \sqrt{\frac{gR^2}{r_A}} \left(\sqrt{2 - \frac{r_A}{a}} - 1 \right),$$

动能的增量应为

$$\Delta T_1 = T'_A - T_A = \frac{mgR^2}{2r_A} \left(1 - \frac{r_A}{a} \right). \quad (16.4)$$

其次,讨论在C点自椭圆轨道 II 转入同步轨道,仿照上面的计算,卫星在椭圆轨道 II 的C点速度为

$$v'_C = \sqrt{\frac{gR^2}{r_C} \left(2 - \frac{r_C}{a} \right)},$$

动能为

$$T'_C = \frac{mgR^2}{2r_C} \left(2 - \frac{r_C}{a} \right).$$

至于同步圆形轨道 III, 它的半径即为 r_C , 所以卫星在此轨道上的速度为 v_C ,

$$v_C = \sqrt{\frac{gR^2}{r_C}},$$

动能为

$$T_C = \frac{mgR^2}{2r_C}.$$

这样,卫星在C点转轨的速度增量应为

$$\Delta v_2 = v_C - v'_C = \sqrt{\frac{gR^2}{r_C}} \left(1 - \sqrt{2 - \frac{r_C}{a}} \right),$$

动能增量应为

$$\Delta T_2 = T_C - T'_C = \frac{mgR^2}{2r_C} \left(\frac{r_C}{a} - 1 \right).$$

两次转轨的速度增量总计为

$$\begin{aligned} \Delta v = \Delta v_1 + \Delta v_2 &= \sqrt{\frac{gR^2}{r_A}} \left(\sqrt{2 - \frac{r_A}{a}} - 1 \right) \\ &+ \sqrt{\frac{gR^2}{r_C}} \left(1 - \sqrt{2 - \frac{r_C}{a}} \right), \end{aligned}$$

而动能增量总计为

$$\Delta T = \Delta T_1 + \Delta T_2 = \frac{mgR^2}{2} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_C} \right), \quad (16.5)$$

这正是卫星在同步轨道上的机械能 ($-mgR^2/2r_C$) 与它在停泊轨道上的机械能 ($-mgR^2/2r_A$) 之差。其实这本该在我们的预料之中。

如果转移轨道并非既与停泊轨道相切又与同步轨道相切 (非霍曼轨道), 卫星的机械能的增量仍由上式给出。但是, 既然转轨时速度方向也改变了, 火箭需要提供改变速度方向的推力, 此时燃料的消耗大于霍曼转轨的情况

(b) 赤道以外地方发射同步卫星

有心力作用下的运动为平面运动, 该平面通过力心。因此, 在赤道以外地方发射的卫星轨道 I' 必定不在赤道平面内 (图 4-7),

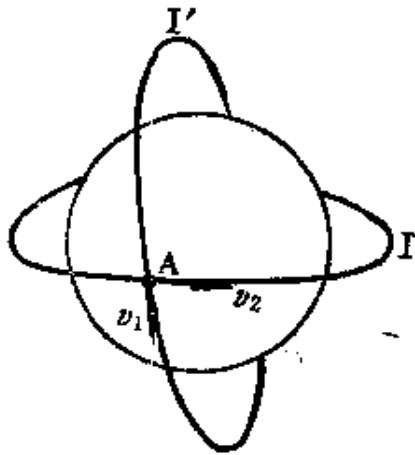


图 4-7

发射同步卫星首先要解决这个问题。为此, 当卫星运行到赤道平面上空的点 A 时, 应把它的速度从 v_1 改变为 v_2 。

轨道 I 再经霍曼转轨成为同步轨道。还要选好转轨时机以便完成转轨后的卫星恰在所指定的地点的上空。

例 讨论如何将一宇宙飞船从地球绕日轨道转移到金星绕日轨道。

我们将地球和金星围绕太阳运动的轨道均看成是以太阳为圆心的圆 (这是可以的, 因为它们的偏心率分别为 0.017 和 0.039)。常用的办法是让飞船从地球轨道上 E 点转移到一椭圆轨道, 而在与金星轨道相切的 V 点转到金星轨道 (图 4-8)。这样 E 和 V 分别在这椭圆轨道的远日点和近日点, 太阳为椭圆的焦点。椭圆的长轴是地球和金星轨道半径之和。这也是霍曼转移。

首先, 飞船沿地球轨道绕太阳运行, 飞船的速率为 v_1, v_2 。由下式给出:

$$\frac{mv_0^2}{r_e} = \frac{GMm}{r_e} \quad (1)$$

式中 r_e 为地球绕太阳轨道半径, M 为太阳质量.

这一速率的大小又可由地球轨道半径 r_e (1.49×10^8 千米) 和一年的长短 T_E (3.16×10^7 秒) 得出,

$$v_0 = \frac{2\pi r_e}{T_E} = 29.6 \text{ 千米/秒.}$$

对于椭圆转移轨道, 它的总能量为

$$E = -\frac{GMm}{1.2r_e} \quad (2)$$

在点 E , 这总能量可表示为动能与势能之和:

$$E = \frac{1}{2}mv_E^2 - \frac{GMm}{r_e} \quad (3)$$

联立(2)和(3)求出

$$\begin{aligned} v_E &= \sqrt{\frac{GM}{r_e} \left(2 - \frac{1}{0.86} \right)} \\ &= \sqrt{0.84 \frac{GM}{r_e}} \\ &\approx 0.92v_0 = 27.2 \text{ 千米/秒.} \end{aligned}$$

由此可见, 由飞船运行到 E 点时, 为从地球轨道转入椭圆轨道, 必须将速率从 v_0 变为 v_E , 即使用减速火箭使速率从 29.6 千米/秒变为 27.2 千米/秒. 此减速只有 2.5 千米/秒, 是可以达到的, 一旦进入椭圆的转移轨道, 飞船需要轨道周期的一半时间方可在 V 点接上金星的轨道. 由开卜勒第三定律, 周期 T^2 与长轴的三次方成比例, 所以椭圆轨道的周期 T 为

$$T = \left(\frac{1.72}{2.00} \right)^{2/3} T_E = 0.80T_E.$$

故飞船的航程为 0.40 地球年, 即 146 天. 在这段时间内, 因机械能守恒, 飞船的速率不断增加, 在 V 处的速率为 v_1 , 由机械能守恒

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GMm}{0.72r_e} = -G \frac{Mm}{1.12r_e}, \quad (4)$$

即
$$v_1^2 = \frac{GM}{r_e} \left(\frac{1}{0.36} - \frac{1}{0.86} \right) = 1.62v_0^2,$$

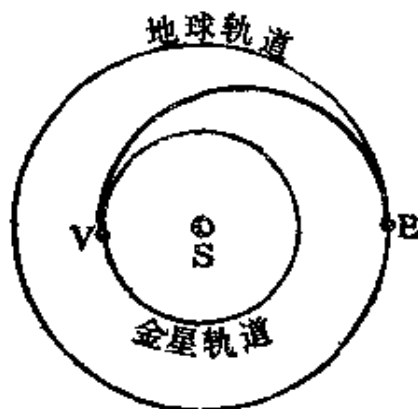


图 4-8

得 $v_1 \approx 1.27v_0 = 37.7$ 千米/秒。

而金星的轨道速率约为 34.9 千米/秒，因此，在 v 点飞船的速率又要从 37.7 千米/秒减到 34.9 千米/秒，就可以进入金星轨道了。我们若计算好飞船的发射时间，使飞船到达 v 点时金星恰好也运动到 v 点，这样，飞船就可以在金星着陆了。

(3) 轨道卫星的自动姿态稳定

由于某些目的，需要保持轨道上运行的卫星或空间站相对于地球表面的方位始终相同（亦即保持固定的姿态）。例如，通讯卫星的天线应始终面向地球。当然，我们可以使球形卫星的转动角速率恰好等于它绕地球的角速度，于是卫星将以同一面始终对着地球。但是，转动角速率的任何微小不精确或微小扰动都会引起卫星偏离同步转动。保持姿态的一个比较适宜的方法，是利用地球作用于非球形卫星上的引力所产生的力矩，在 1966 年双子座 (Gemini) 11 号和 12 号飞行过程中曾成功地使用了这种方法。

设卫星的形状为哑铃形，即半径各为 a ，质量各为 m 的两个圆球由一杆连结而组成；杆长为 l ，质量可以不计。又设卫星的质心在距地心 R 的圆形轨道上，且卫星可以绕其质心在轨道平面内自由转动。质心在圆轨道上运行的角频率为 ω_0 ，它可由下式决定：

$$GmM/R^3 = m\omega_0^2 R,$$

故
$$\omega_0 = \sqrt{GM/R^3},$$

上式中 M 为地球质量。

下面我们应用拉格朗日方法，来求哑铃模型的运动方程。选取原点在地心的固定坐标系，卫星的质心极坐标是 (R, θ) ，卫星相对于地心极径的方位由角 φ 确定，而且 $l \ll R$ (图 4-9)。

沿圆轨道运行的哑铃卫星在轨道平面内绕自己的质心振动。应用柯尼希定理(5.10)，卫星的动能

$$T = \frac{1}{2} \times 2mR^2 \omega_0^2 + \frac{1}{2} \times 2 \left(\frac{2}{5} ma^2 + \frac{1}{4} ml^2 \right) \dot{\varphi}^2. \quad (16.6)$$

前一项为质心运动的动能 T_0 , 后一项为相对质心运动的动能 T' .

卫星的势能为

$$V = -\frac{GMm}{r_1} - \frac{GMm}{r_2} \quad (16.7)$$

而 $r_1 = \sqrt{R^2 + Rl \cos \varphi + l^2/4}$,

$$r_2 = \sqrt{R^2 - Rl \cos \varphi + l^2/4}.$$

将 r_1 按 l/R 的幂展开为级数并取二阶近似,

$$r_1 = \sqrt{R^2 + Rl \cos \varphi + l^2/4}$$

$$= R \sqrt{1 + l \cos \varphi / R + l^2/4R^2}$$

$$= R \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{l}{R} \cos \varphi + \frac{l^2}{4R^2} \right) + \frac{\left(\frac{1}{2} \right) \left(-\frac{1}{2} \right)}{2!} \right.$$

$$\times \left(\frac{l}{R} \cos \varphi + \frac{l^2}{4R^2} \right)^2 + \dots \left. \right\}$$

$$= R \left\{ 1 + \frac{l}{2R} \cos \varphi + \frac{l^2}{8R^2} - \frac{1}{8} \right.$$

$$\times \left(\frac{l^2}{R^2} \cos^2 \varphi + \text{高阶项} \right) + \dots \left. \right\}$$

$$\simeq R \left\{ 1 + \frac{l}{2R} \cos \varphi + \frac{l^2}{8R^2} - \frac{l^2}{8R^2} \cos^2 \varphi \right\}$$

$$= R \left\{ 1 + \frac{l}{2R} \cos \varphi + \frac{l^2}{8R^2} \sin^2 \varphi \right\},$$

即

$$r_1 \simeq R \left(1 + \frac{l}{2R} \cos \varphi + \frac{l^2}{8R^2} \sin^2 \varphi \right).$$

同理,

$$r_2 \simeq R \left(1 - \frac{l}{2R} \cos \varphi + \frac{l^2}{8R^2} \sin^2 \varphi \right).$$

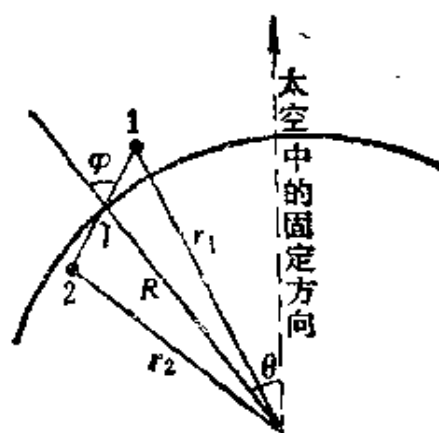


图 4-9

所以势能

$$\begin{aligned}
 V &= -\frac{GMm}{R} \left\{ \left(1 + \frac{l}{2R} \cos \varphi + \frac{l^2}{8R^2} \sin^2 \varphi \right)^{-1} \right. \\
 &\quad \left. + \left(1 - \frac{l}{2R} \cos \varphi + \frac{l^2}{8R^2} \sin^2 \varphi \right)^{-1} \right\} \\
 &= -\frac{GMm}{R} \left\{ 1 - \frac{l}{2R} \cos \varphi - \frac{l^2}{8R^2} \sin^2 \varphi \right. \\
 &\quad \left. + \frac{l^2}{4R^2} \cos^2 \varphi + 1 + \frac{l}{2R} \cos \varphi \right. \\
 &\quad \left. - \frac{l^2}{8R^2} \sin^2 \varphi + \frac{l^2}{4R^2} \cos^2 \varphi \right\} \\
 &= -\frac{GMm}{R} \left\{ 2 - \frac{l^2}{4R^2} + \frac{3l^2}{4R^2} \cos^2 \varphi \right\}.
 \end{aligned}$$

又由 $\omega_0^2 = GM/R^3$ 可将上式中的 GM 改用 ω_0 表出,

$$V = -\omega_0^2 R^2 m \left\{ 2 - \frac{l^2}{4R^2} + \frac{3l^2}{4R^2} \cos^2 \varphi \right\}. \quad (16.8)$$

于是拉格朗日函数为

$$\begin{aligned}
 L = T - V &= mR^2 \omega_0^2 + \left(2m\omega_0^2 R^2 - \frac{1}{4}m\omega_0^2 l^2 \right) \\
 &\quad + m \left(\frac{2}{5}ma^2 + \frac{1}{4}ml^2 \right) \dot{\varphi}^2 + \frac{3}{4}\omega_0^2 ml^2 \cos^2 \varphi.
 \end{aligned}$$

拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

给出

$$\frac{d}{dt} \left[m \left(\frac{4}{5}a^2 + \frac{1}{2}l^2 \right) \dot{\varphi} \right] - \left(-\frac{3}{4}\omega_0^2 ml^2 2 \cos \varphi \sin \varphi \right) = 0,$$

即

$$\left(\frac{4}{5}a^2 + \frac{1}{2}l^2 \right) \ddot{\varphi} + \frac{3}{2}\omega_0^2 l^2 \cos \varphi \sin \varphi = 0. \quad (16.9)$$

当 $\varphi = 0, \pi/2, \pi$, 或 $3\pi/2$, 上式给出 $\ddot{\varphi} = 0$, 可见哑铃卫星的

平衡位置在 $\varphi = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ 。容易看出, $\varphi = 0$ 或 π , 平衡是稳定的, 而 $\varphi = \pi/2$ 或 $3\pi/2$, 平衡是不稳定的。

研究稳定平衡位置 $\varphi = 0$ 附近的运动, 对于小 φ , $\cos \varphi \simeq 1$, $\sin \varphi \simeq \varphi$, 将其代入上式可得:

$$\left(\frac{8}{5}a^2 + l^2\right)\ddot{\varphi} + 3\omega_0 l^2 \varphi = 0. \quad (16.10)$$

这是一个谐振动方程①, 表示哑铃卫星在其稳定平衡位置附近作小振幅的谐振动, 角频率为

$$\omega = \omega_0 \sqrt{\frac{3l^2}{\frac{8}{5}a^2 + l^2}}.$$

值得注意的是, 在 l 远远大于 a 的情形下, 在 ω 中略去 a^2 项可得

$$\omega = \sqrt{3} \omega_0.$$

总之, 只要将卫星以稳定平衡的位形送入轨道, 当其受到微扰时, 地心引力能自动地使卫星在平衡位置附近作小振幅的振动, 从而保持了卫星姿态的稳定。

1966年双子座11号和12号卫星的飞行中, 证实了这无人管理维持站的方法在空间技术中确实可行。所采用的办法是把双子座卫星与靠近它而沿轨道飞行的阿吉纳 (Agena) 火箭钩住, 于是阿吉纳-双子座的形状就类似于上述的哑铃模型, 从而保持了卫星姿态的稳定。

§ 17. 散射问题

具有一定动量的两个粒子(如质子-质子, 质子-电子等), 由远

① V. 巴杰, M. 奥尔森著, 孙国铨译《经典力学新编》(科学出版社, 1983) 第282—284页, 也讨论了这个问题, 结果与此相同。但是, 该书的计算不甚妥当。例如, 该书关于 r_1 和 r_2 的表达式(7-56)仅仅是一级近似, 却用来计算势能函数 V 到二级近似(见该书(7-60)式)！该书的动能函数 T 也有些问题。

而近,飞掠而过之后,又由近而远离。在此过程中,由于相互作用而交换部分动量,这就称为散射。

两个粒子之间的作用力可以是吸引力也可以是斥力。著名的卢瑟福实验,就是研究 α 粒子束被金箔原子核的斥力散射,从而论证了原子的有核模型。

(1) 平方反比斥力

平方反比斥力也是有心力问题的重要特例,同号电荷之间的静电斥力就是平方反比斥力。记平方反比斥力为

$$F(\rho) = \frac{k^2}{\rho^2},$$

相应的势能是

$$V(\rho) = -\int_{\infty}^{\rho} \frac{k^2}{\rho^2} d\rho = \frac{k^2}{\rho}. \quad (17.1)$$

把(17.1)代入(14.12)以求轨道方程,

$$\frac{hd\rho}{\rho \sqrt{\frac{2E'}{m'} \rho^2 - \frac{2k^2}{m'} \rho - h^2}} = d\varphi.$$

两边分别积分并加以整理,即得

$$\rho = \frac{m'h^2/k^2}{-1 + \sqrt{1 + E'2m'h^2/k^4} \cos(\varphi + C)}. \quad (17.2)$$

这也是圆锥曲线的方程,离心率 $e = \sqrt{1 + E'2m'h^2/k^4}$ 。斥力的势能(17.1)总是 ≥ 0 , 所以势能与动能之和即能量 E' 必为正,从而离心率 > 1 。这是说,轨道总是双曲线的一支。

(2) 散 射

(a) α 粒子在原子核的库仑场中散射

一束 α 粒子投射于金属箔,在金属箔的原子核的静电斥力作用下不再保持原来的人射束而散开,朝各方射去。 α 粒子带电量

为 $+2e$ ，这里 e 为电子电量；如金属的原子序数为 Z ，则金属原子核带电量为 $+Ze$ 。两者带同号电荷，按平方反比规律排斥， α 粒子就是被这种斥力散射。

原子核质量比较大，可以看作不动。 α 粒子所受斥力是一种有心力，原子核即为其力心。选取以力心为极点的极坐标，来研究粒子相对于力心的运动。

参看图 4-10。粒子以初速 v_i 入射，粒子的入射线与力心的垂直距离 l 叫作碰撞参数。

在力心的斥力作用下，粒子沿双曲线的一支运行并终于射出。对于弹性散射，由于机械能守恒，粒子射出的速率就等于入射速率 v_i 。

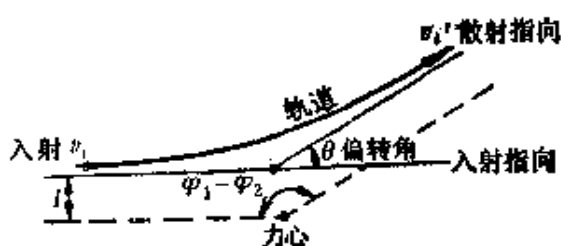


图 4-10

我们要计算从入射到出

射的过程中速度指向所偏转的角 θ 。这不难从轨道方程

$$\rho = \frac{m' h^2 / k^2}{-1 + \epsilon \cos(\varphi + C)} \quad \left[\epsilon = \sqrt{1 + (E' / 2 m' h^2 / k^4)} \right]$$

求得。事实上， ρ 是正的，所以必定分母 $-1 + \epsilon \cos(\varphi + C) > 0$ ，即

$$\cos(\varphi + C) > \frac{1}{\epsilon}.$$

就是说， φ 限制于

$$\varphi_1 = \arccos \frac{1}{\epsilon} \quad \text{与} \quad \varphi_2 = -\arccos \frac{1}{\epsilon}$$

之间，而粒子的方位角的改变

$$\varphi_1 - \varphi_2 = 2 \arccos \frac{1}{\epsilon}.$$

从图 4-10 可见，偏转角

$$\theta = \pi - (\varphi_1 - \varphi_2) = 2 \left[\frac{\pi}{2} - \arccos \frac{1}{\epsilon} \right]$$

$$= 2 \arcsin \frac{1}{\epsilon},$$

即
$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{1}{\epsilon}. \quad (17.3)$$

换个方式来表示,

$$\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} = \sqrt{\csc^2 \frac{\theta}{2} - 1} = \sqrt{\epsilon^2 - 1} = \sqrt{E' \frac{2mh^2}{k^4}}.$$

动量矩 $m'h$ 可用 v_i' 与 l 表出, $m'h = m'v_i'l$. 以此代入上式,

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} &= \sqrt{E' \frac{2m'v_i'l^2}{k^4}} = \sqrt{E' \frac{l^2}{k^4} 4 \times \frac{1}{2} m v_i'^2} \\ &= \sqrt{\frac{4E'l^2}{k^4}} = \frac{2E'l}{k^2}. \end{aligned} \quad (17.4)$$

但是,要把(17.4)应用于散射实验,有两个问题尚待解决.

第一个问题. 这里算出的是两粒子相对径矢的偏转角 θ , 或者说,质心坐标系中的偏转角. 而在实验中测量的总是相对于“静止”参考系(例如说,实验室)的偏转角 Θ , 或者说,实验室坐标系中的偏转角. 我们还得寻求 θ 与 Θ 的关系.

通常,粒子 1 以速度 v_i 入射,粒子 2 开始是静止的. 于是,它们的质心的速度

$$v_0 = \frac{m}{M+m} v_i,$$

两粒子在质心坐标系中的速度分别是

$$\begin{cases} v_1' = v_i - v_0 = \frac{M}{M+m} v_i = \frac{M}{m} v_0, \\ v_2' = 0 - v_0 = -v_0, \end{cases}$$

参看图 4-11 (a).

散射以后的速度示于图 4-11 (b). 质心的速度 v_0 不变. 由质心坐标系中的动量守恒和机械能守恒知道,粒子 1 散射后的速率 v_1' 等于入射速率 v_1' . 当然,速度的指向有所偏转,偏转角为 θ_1 . 回

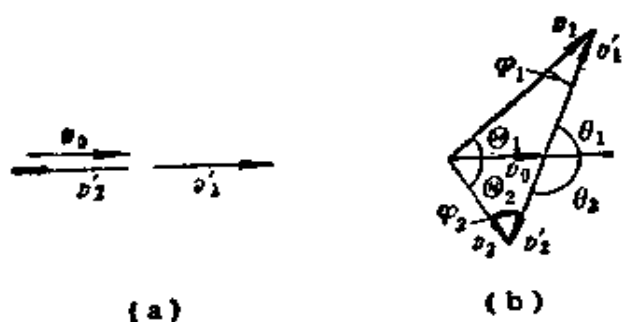


图 4-11

到实验室坐标系，粒子 1 的速度 $v_1 = v_0 + v_1'$ ，偏转角为 Θ_1 。从图上容易看出

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \Theta_1 &= \frac{v_1' \sin \theta_1}{v_0 + v_1' \cos \theta_1} = \frac{(M/m)v_1' \sin \theta_1}{v_0 + (M/m)v_1' \cos \theta_1} \\ &= \frac{M \sin \theta_1}{m + M \cos \theta_1} \end{aligned}$$

这就是用质心坐标系中的偏转角 θ_1 表示实验室坐标系中偏转角 Θ_1 的式子。反过来，也可以用 Θ_1 表示 θ_1 ，

$$\cos \theta_1 = -\frac{m}{M} \sin^2 \Theta_1 \pm \cos \Theta_1 \sqrt{1 - \frac{m^2}{M^2} \sin^2 \Theta_1}.$$

质心坐标系中的偏转角 θ_1 可以取从 0 到 π 的一切值。那么，实验室坐标系中的偏转角 Θ_1 又怎样呢？不难验证，如 $m > M$ ，则 Θ_1 的最大值为 $\arcsin(M/m)$ ；如 $m < M$ ，则 Θ_1 可以取从 0 到 π 的一切值。

再说粒子 2。它在质心坐标系中散射后的速率 v_2' 也等于散射前的速率，亦即等于 v_0 ，它的反跳角为 θ_2 。回到实验室坐标系，粒子 2 的速度 $v_2 = v_0 + v_2'$ ，反跳角为 Θ_2 。在图 4-11(b) 中， v_0, v_2' 和 v_2 衔接为等腰三角形，所以

$$\Theta_2 = \frac{1}{2} \theta_2 = \frac{1}{2} (\pi - \theta_1) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \theta_1.$$

现在谈一谈两粒子散射后射出的夹角 $\Theta_1 + \Theta_2$ 。参看图 4-11(b)，

$$\Theta_1 + \Theta_2 + \varphi_1 + \varphi_2 = \pi.$$

由于 $\varphi_2 = \Theta_2$, 上式亦即

$$2(\Theta_1 + \Theta_2) + (\varphi_1 - \Theta_1) = \pi,$$

因而
$$\Theta_1 + \Theta_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}(\Theta_1 - \varphi_1).$$

如两粒子质量相等, $m = M$, 则 $v'_1 = (M/m)v_0 - v_0$, 图 4-11(b) 中的 v_1, v'_1 和 v_1 衔接为等腰三角形, 从而 $\varphi_1 = \Theta_1$. 这样,

$$\Theta_1 + \Theta_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}(\Theta_1 - \varphi_1) = \frac{\pi}{2},$$

两粒子互成直角而射出.

第二个问题. 以上计算的是单个粒子被散射, 而实际的情况是一束粒子被散射, 因此还需要讨论散射截面.

(b) 散射截面 卢瑟福公式

设一束粒子的人射速度基本相同, 碰撞参数 l 则各不相同, 因而偏转角 θ 也各不相同. 为便于与实验比较, 还需要计算粒子按偏转角分布的情况.

通常用微分散射截面描写偏转角的分布情况. 朝某个指向散射的微分散射截面(有时简称散射截面) σ 定义为

$$\sigma d\Omega = \frac{dN}{I}, \quad (17.5)$$

其中 $d\Omega$ 是该指向的一个立体角元, dN 是单位时间内散射到该立体角元中去的粒子数, 而 I 是人射粒子束的强度, 即人射粒子束单位横截面上单位时间内通过的粒子数. 不难验证, 如此定义的 σ 的量纲是面积的量纲. 其实, 如果把散射到该指向的单位立体角中去的那些粒子(其数目为 $dN/d\Omega$) 追溯到入射时, 这些粒子在入射束中所占横截面正是 $dN/I d\Omega$ 即 σ .

由图 4-12 可见, 入射时碰撞参数在 l 与 $l + dl$ 之间的那些粒子, 即所有通过环形面积为 $2\pi l dl$ 的粒子, 其偏转角在 θ 与 $\theta + d\theta$ 之间.

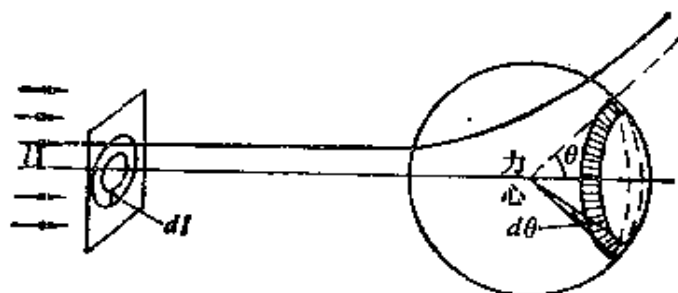


图 4-12

图 4-12 以力心为球心作出一个单位球。单位球面上划线的那一环带对应于偏转角在 θ 与 $\theta + d\theta$ 之间。这环带的面积是 $2\pi \sin \theta d\theta$ ，所对应的立体角也就是 $2\pi \sin \theta d\theta$ 。[注意：根据 (17.4) 式， dl 与 $d\theta$ 符号相反。] 入射粒子束横截面上碰撞参数在 l 与 $l + dl$ 之间的那块环形的面积为 $2\pi l dl$ ，因此，

$$-\sigma(\theta) 2\pi \sin \theta d\theta = \frac{l 2\pi dl}{I},$$

即
$$\sigma(\theta) = -\frac{l}{\sin \theta} \frac{dl}{d\theta}.$$

利用偏转角的公式 $\text{ctg}(\theta/2) = 2E'l/k^2$ 算出 $dl/d\theta$ ，然后代入上式，即得

$$\begin{aligned} \sigma(\theta) &= -\frac{k^2 \text{ctg}(\theta/2)}{2E' \sin \theta} \cdot \frac{k^2}{2E'} \left[-\frac{1}{2} \text{csc}^2 \frac{\theta}{2} \right] \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{k^2}{2E'} \right)^2 \frac{\text{ctg}(\theta/2)}{\sin(\theta/2) \cos(\theta/2)} \frac{1}{\sin^2(\theta/2)} \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{k^2}{2E'} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}. \end{aligned}$$

对于带同号电荷 Ze 与 $Z'e$ 的粒子之间的散射，斥力

$$F = \frac{ZZ'e^2}{\rho^2},$$

所以前面的计算中的 k^2 指的是 $ZZ'e^2$ ，散射截面的公式成为

$$\sigma(\theta) = \frac{1}{4} \left(\frac{ZZ'e^2}{2E'} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}. \quad (17.5)$$

这就是著名的卢瑟福公式。

但是,如前所述,质心坐标系中的偏转角 θ 还应化作实验室坐标系中的偏转角 Θ , 质心坐标系中的立体角 $d\Omega_\theta$ 也要化作实验室坐标系中的立体角 $d\Omega_\Theta$, 才便于跟实际测量结果比较。一般说来,这一代换将使公式十分复杂。这里只限于指出两个特殊情况:

(1) $M \gg m$, 则 $\text{tg } \Theta = M \sin \theta / (m + M \cos \theta) \approx \text{tg } \theta$, 即 $\Theta \approx \theta$ 。事实上,这时质心坐标系与实验室坐标系可不加区分。

(2) $m = M$, 则

$$\text{tg } \Theta = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} = \frac{2 \sin(\theta/2) \cos(\theta/2)}{2 \cos^2(\theta/2)} = \text{tg } \frac{\theta}{2},$$

即 $\Theta = \theta/2$ 。由于

$$\sigma(\Theta) 2\pi \sin \Theta d\Theta = \sigma(\theta) 2\pi \sin \theta d\theta,$$

以 $\theta = 2\Theta$ 代入即得

$$\sigma(\Theta) = 4 \cos \Theta \sigma(\theta) = \left(\frac{ZZ'e^2}{2E'} \right)^2 \frac{\cos \Theta}{\sin^4 \Theta}.$$

第五章 微 振 动

保守力学系统在它的稳定平衡位形附近作微振动。这类问题虽然可以应用牛顿定律来解，但这类问题的一般性讨论却以拉格朗日动力学方法更为适宜。

下面，我们从两个自由度的微振动入手，再推广到多自由度系统的微振动。

§ 18. 两个自由度的振动

两个单摆由一根弹簧耦合起来，就叫作耦合摆。确定这个系统的位置，需要两个变数，例如图 5-1 的 θ_1 和 θ_2 ，箭头指明 θ_1 和 θ_2 的正向。为简便计，设两个单摆的摆长相等，摆球的质量 m 相等，运动限制在竖直平面内，且振动幅度较小。在这些条件下，摆球的竖

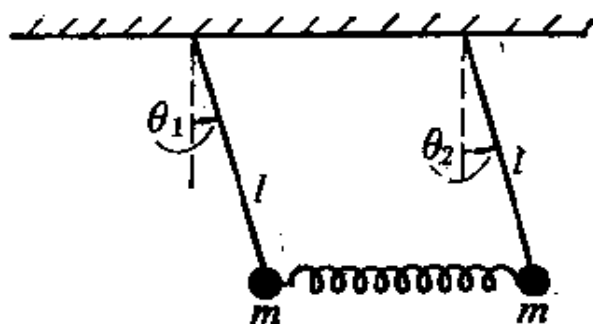


图 5-1

直位移 $l(1 - \cos\theta_1) = l\left(\frac{1}{2}\theta_1^2 - \frac{1}{4}\theta_1^4 + \dots\right)$ 和 $l(1 - \cos\theta_2) = l\left(\frac{1}{2}\theta_2^2 - \frac{1}{4}\theta_2^4 + \dots\right)$ 是二阶小量，可以略去，弹簧在整个运动过程中近似保持水平。

选取 θ_1 及 θ_2 为广义坐标。取 $\theta_1 = 0$ 且 $\theta_2 = 0$ 对应于系统的平衡位置，此时弹簧既不伸长也不缩短。

系统的动能为

$$T = \frac{1}{2} ml^2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2).$$

系统的势能为重力势能与弹性势能之和,即

$$V = V_g + V_s.$$

先计算系统的重力势能.

$$\begin{aligned} V_g &= mgl(1 - \cos \theta_1) + mgl(1 - \cos \theta_2) \\ &= mgl \left[1 - \left(1 - \frac{1}{2!} \theta_1^2 + \frac{1}{4!} \theta_1^4 - \dots \right) \right] \\ &\quad + mgl \left[1 - \left(1 - \frac{1}{2!} \theta_2^2 + \frac{1}{4!} \theta_2^4 - \dots \right) \right]. \end{aligned}$$

在二阶近似下,

$$V_g = \frac{1}{2} mgl (\theta_1^2 + \theta_2^2).$$

再算系统的弹性势能. 弹簧两端竖直位移之差 $l[(1 - \cos \theta_2) - (1 - \cos \theta_1)]$ 是二阶小量, 其对弹性势能的贡献是四阶小量, 故可略去. 于是,

$$V_s = \frac{1}{2} k [l(\sin \theta_2 - \sin \theta_1)]^2.$$

在二阶近似下,

$$V_s = \frac{1}{2} kl^2 (\theta_2 - \theta_1)^2.$$

所以

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} mgl (\theta_1^2 + \theta_2^2) + \frac{1}{2} kl^2 (\theta_2 - \theta_1)^2 \\ &= \frac{1}{2} ml^2 \left(\frac{g}{l} + \frac{k}{m} \right) (\theta_1^2 + \theta_2^2) - kl^2 \theta_1 \theta_2. \end{aligned}$$

由此, 系统的拉格朗日函数为

$$L - T - V = \frac{1}{2} ml^2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) - \frac{1}{2} ml^2 \left(\frac{g}{l} + \frac{k}{m} \right) (\theta_1^2 + \theta_2^2) + kl^2 \theta_1 \theta_2.$$

拉格朗日方程为

$$\begin{cases} ml\ddot{\theta}_1 + mg\theta_1 + kl(\theta_1 - \theta_2) = 0, & (18.1) \\ ml\ddot{\theta}_2 + mg\theta_2 + kl(\theta_2 - \theta_1) = 0. & (18.2) \end{cases}$$

需要指出,虽然拉格朗日函数采用了二阶近似,而拉格朗日方程却只是一阶近似,

求解微分方程组(18.1)和(18.2)的常用办法是令

$$\theta_1 = A \cos(\omega t + \varphi_0), \quad \theta_2 = B \cos(\omega t + \varphi_0),$$

代入(18.1)和(18.2),即得 A 和 B 的代数方程组

$$\begin{cases} (-ml\omega^2 + mg + kl)A - klB = 0, \\ -klA + (-ml\omega^2 + mg + kl)B = 0. \end{cases} \quad (18.3)$$

这是齐次联立代数方程组,它显然有 $A = B = 0$ 这样的解,但这意味着两个摆球都竖直悬垂而保持不动.这种解实在没有多大意义.试问还有没有另外的解呢?齐次联立代数方程组,存在着 A 和 B 不都是零的解是有条件的,这条件就是系数行列式为零,

$$\begin{vmatrix} -ml\omega^2 + mg + kl & -kl \\ -kl & -ml\omega^2 + mg + kl \end{vmatrix} = 0,$$

即

$$(-ml\omega^2 + mg + kl)^2 = (kl)^2.$$

由此解得

$$\omega^2 = \frac{g}{l}, \quad \text{或} \quad \frac{g}{l} + \frac{2k}{m}.$$

以 $\omega^2 = g/l$ 代入(18.3)可求出 $A:B = +1$.这样就求得第一个特解

$$\theta_1^{(1)} = A_1 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t + \varphi_0^{(1)}\right), \quad \theta_2^{(1)} = A_1 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t + \varphi_0^{(1)}\right).$$

以 $\omega^2 = g/l + 2k/m$ 代入(18.3)可求出 $A:B = -1$.这样就求得第二个特解

$$\theta_1^{(2)} = A_2 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}}t + \varphi_0^{(2)}\right),$$

$$\theta_2^{(2)} = -A_2 \cos \left(\sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}} t + \varphi_0^{(2)} \right).$$

于是,问题的通解是

$$\begin{cases} \theta_1 = A_1 \cos \left(\sqrt{\frac{g}{l}} t + \varphi_0^{(1)} \right) + A_2 \cos \left(\sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}} t + \varphi_0^{(2)} \right), \\ \theta_2 = A_1 \cos \left(\sqrt{\frac{g}{l}} t + \varphi_0^{(1)} \right) - A_2 \cos \left(\sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}} t + \varphi_0^{(2)} \right). \end{cases} \quad (18.4)$$

角坐标 θ_1 和 θ_2 分别是两个谐振动叠加而成的复杂振动. 那么, 有没有办法简化这种描写方式?

就第一个特解而论, 显然有 $\theta_1 - \theta_2 = 0$ 而

$$\theta_1 + \theta_2 = 2A_1 \cos \left(\sqrt{\frac{g}{l}} t + \varphi_0^{(1)} \right).$$

就第二个特解而论, 显然有 $\theta_1 + \theta_2 = 0$ 而

$$\theta_1 - \theta_2 = 2A_2 \cos \left(\sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}} t + \varphi_0^{(2)} \right).$$

把 $\theta_1 + \theta_2$ 记作 ξ_1 , 把 $\theta_1 - \theta_2$ 记作 ξ_2 , 则第一个特解可记作

$$\xi_1 = 2A_1 \cos \left(\sqrt{\frac{g}{l}} t + \varphi_0^{(1)} \right), \quad \xi_2 = 0,$$

第二个特解可记作

$$\xi_1 = 0, \quad \xi_2 = 2A_2 \cos \left(\sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}} t + \varphi_0^{(2)} \right).$$

通解也就可以记作

$$\begin{cases} \xi_1 = 2A_1 \cos \left(\sqrt{\frac{g}{l}} t + \varphi_0^{(1)} \right), \\ \xi_2 = 2A_2 \cos \left(\sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}} t + \varphi_0^{(2)} \right). \end{cases} \quad (18.5)$$

注意 A_1 和 A_2 是两个独立的积分常数. (18.5) 指出 ξ_1 和 ξ_2 各自独立地作谐振动.

对于 N 自由度系统, 如果能找到 N 个独立的变数, 它们可以确定系统的位置, 并且当系统振动时, 这些变数各自独立地作谐振动, 这些变数就叫作系统的简正坐标. 各个简正坐标的谐振动频率叫作简正频率. 某一简正坐标作谐振动, 其他简正坐标保持为零, 就叫作振动系统的一个模式或简称模.

$\xi_1 = \theta_1 + \theta_2$ 和 $\xi_2 = \theta_1 - \theta_2$ 正是耦合摆的两个简正坐标. 其实, 这

两个简正坐标具有很明白的物理意义： $\xi_1 = \theta_1 + \theta_2$ 是两个摆球的质心的角坐标； $\xi_2 = \theta_1 - \theta_2$ 是 θ_1 相对于 θ_2 的角坐标，也可说是代表弹簧的变形程度。

耦合摆的振动模式之一是

$$\xi_2 = 0, \quad \xi_1 = 2A_1 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t + \varphi_0^{(1)}\right).$$

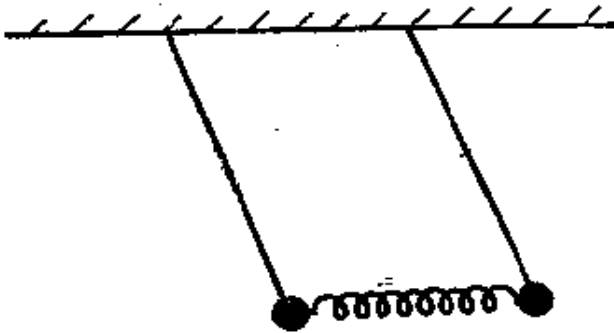


图 5-2

这里 $\xi_2 = 0$ 意味着两个摆球没有相对运动，弹簧不变形，就是说两个摆球和弹簧作为不变形的整体而运动。 ξ_1 作谐振动意味着质心作谐振动，在这里就是两个摆球和弹簧作为不变形的整体而作谐振动，如图 5-2 所示。既然弹簧不变形，它就相当于弹簧不起作用，因而简正角频率 $\omega_1 = \sqrt{g/l}$ 是很容易理解的。

耦合摆的另一振动模式是

$$\xi_1 = 0, \quad \xi_2 = 2A_2 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}}t + \varphi_0^{(2)}\right).$$

这里 $\xi_1 = 0$ 意味着两个摆球的质心保持不动，就是说两个摆球对称地相向而运动或相背而运动。 ξ_2 作谐振动意味着两球的相对运动是谐振动，在这里就是两球时而相向时而相背对称地作谐振动，如图 5-3 所示。既然两球对称地拉伸弹簧或对称地压缩弹簧，弹簧中的弹性力必然是一端固定情况下弹性力的二倍，因而简正角频率 $\omega_2 = \sqrt{g/l + 2k/m}$ 也是很容易理解的。

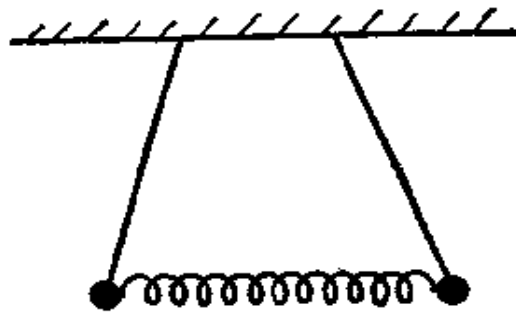


图 5-3

以上的讨论是求得通解之后才引入简正坐标的。其实，完全可以从一开始就引入简正坐标。

读者应该熟悉下列两个代数公式:

$$a^2 + b^2 = \frac{1}{2} [(a+b)^2 + (a-b)^2],$$

$$ab = \frac{1}{4} [(a+b)^2 - (a-b)^2].$$

这样,我们的耦合摆的动能和势能可以分别改写为

$$V = \frac{1}{4} mgl [(\theta_1 + \theta_2)^2 + (\theta_1 - \theta_2)^2]$$

$$+ \frac{1}{2} kl^2 (\theta_1 - \theta_2)^2,$$

$$T = \frac{1}{4} ml^2 [(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)^2].$$

显然,如果改取 $\theta_1 + \theta_2$ 、 $\theta_1 - \theta_2$ 作为广义坐标:

$$\begin{cases} \xi_1 = \theta_1 + \theta_2, \\ \xi_2 = \theta_1 - \theta_2, \end{cases}$$

则 T 和 V 都化为平方和:

$$V = \frac{1}{4} mgl \xi_1^2 + \frac{1}{4} l (mg + 2kl) \xi_2^2,$$

$$T = \frac{1}{4} ml^2 (\dot{\xi}_1^2 + \dot{\xi}_2^2).$$

不出现交叉项 $\dot{\xi}_1 \dot{\xi}_2$ 或 $\xi_1 \xi_2$. 容易看出,这样的 ξ_1 与 ξ_2 就是简正坐标. 事实上,拉格朗日函数

$$L = T - V = \frac{1}{4} ml (\dot{\xi}_1^2 - g \xi_1^2)$$

$$+ \frac{1}{4} l [ml \dot{\xi}_2^2 - (mg + 2kl) \xi_2^2].$$

既然 L 是平方和而没有交叉项,那么 ξ_1 和 ξ_2 的拉格朗日方程必是各自独立无关的.

$$\begin{cases} \ddot{\xi}_1 + \frac{g}{l} \xi_1 = 0, \\ \ddot{\xi}_2 + \left(\frac{g}{l} + \frac{2k}{m} \right) \xi_2 = 0. \end{cases}$$

这两个各自独立的谐振动方程的解是

$$\begin{cases} \xi_1 = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}} t + \varphi_0^{(1)}\right), \\ \xi_2 = C_2 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}} t + \varphi_0^{(2)}\right). \end{cases}$$

与式(18.5)相同。

应当指出,如(18.4)所示,两个摆球的角坐标 θ_1 和 θ_2 分别是频率不同的两个谐振动的叠加,它们各自有拍的现象。(18.4)的两式,一个是相加,一个是相减,所以 θ_1 和 θ_2 的拍正好错开,其一振动最强的时候,另一恰好振动最弱。

例 质点质量为 m , 用长为 l 的轻绳系在固定点 O , 在此质点上又用同样长的轻绳系另一质点, 其质量亦为 m . 求解此“双摆”系统在竖直平面内作微振动的情况(图 5-4)。

解 本例有两个自由度, 取图中标明的 θ_1 及 θ_2 为广义坐标。

第一个质点的势能为

$$V_1 = -mgl \cos \theta_1$$

(取 O 点势能为零)。因为 θ_1 很小, 将 $\cos \theta_1$ 用泰勒级数展开, 并取到二级小量, 则 $\cos \theta_1 = 1 - \frac{1}{2} \theta_1^2$, 所以,

$$V_1 = -mgl \left(1 - \frac{1}{2} \theta_1^2\right).$$

而动能 $T_1 = \frac{1}{2} ml \dot{\theta}_1^2$.

同理, 第二个质点的势能

$$\begin{aligned} V_2 &= -mgl(\cos \theta_1 + \cos \theta_2) \\ &= -mgl \left(2 - \frac{1}{2} \theta_1^2 - \frac{1}{2} \theta_2^2\right), \end{aligned}$$

动能

$$T_2 = \frac{1}{2} ml (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2.$$

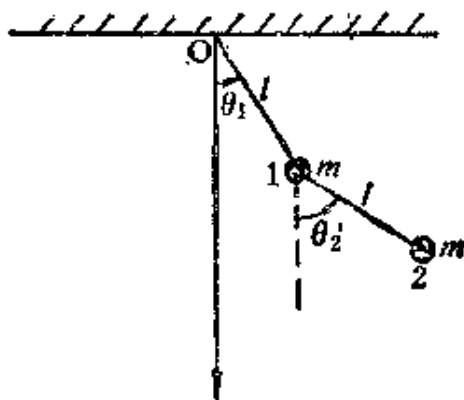


图 5-4

系统的拉格朗日函数

$$L = (T_1 + T_2) - (V_1 + V_2).$$

拉格朗日方程为

$$\begin{cases} 2l\ddot{\theta}_1 + l\ddot{\theta}_2 + 2g\theta_1 = 0, \\ l\ddot{\theta}_2 + l\ddot{\theta}_1 + g\theta_2 = 0. \end{cases} \quad (1)$$

令

$$\begin{cases} \theta_1 = A \cos(\omega t + \varphi_0), \\ \theta_2 = B \cos(\omega t + \varphi_0). \end{cases} \quad (2)$$

代入方程组(1),可得 A 和 B 的方程组:

$$\begin{cases} 2(g - l\omega^2)A - l\omega^2 B = 0, \\ -l\omega^2 A + (g - l\omega^2)B = 0. \end{cases} \quad (3)$$

我们需要的是 A 和 B 不都是零的解,它的条件是系数行列式为零,

$$\begin{vmatrix} 2(g - l\omega^2) & -l\omega^2 \\ -l\omega^2 & g - l\omega^2 \end{vmatrix} = 0, \quad (4)$$

即

$$2(g - l\omega^2)^2 - (l\omega^2)^2 = 0. \quad (5)$$

它的根是

$$\omega_{(1)}^2 = (2 + \sqrt{2})g/l, \quad \omega_{(2)}^2 = (2 - \sqrt{2})g/l.$$

以 $\omega_{(1)}^2 = (2 + \sqrt{2})g/l$ 代入(3),求得 $B = -\sqrt{2}A$,

$$\theta_1 = A_{(1)} \cos(\omega_{(1)}t + \varphi_0^{(1)}), \quad \theta_2 = -\sqrt{2}A_{(1)} \cos(\omega_{(1)}t + \varphi_0^{(1)}).$$

以 $\omega_{(2)}^2 = (2 - \sqrt{2})g/l$ 代入(3)求得 $B = \sqrt{2}A$,

$$\theta_1 = A_{(2)} \cos(\omega_{(2)}t + \varphi_0^{(2)}), \quad \theta_2 = \sqrt{2}A_{(2)} \cos(\omega_{(2)}t + \varphi_0^{(2)}).$$

于是,系统的通解为

$$\begin{aligned} \theta_1 = & A_{(1)} \cos\left(\sqrt{(2 + \sqrt{2})\frac{g}{l}}t + \varphi_0^{(1)}\right) \\ & + A_{(2)} \cos\left(\sqrt{(2 - \sqrt{2})\frac{g}{l}}t + \varphi_0^{(2)}\right) \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \theta_2 = & -\sqrt{2}A_{(1)} \cos\left(\sqrt{(2 + \sqrt{2})\frac{g}{l}}t + \varphi_0^{(1)}\right) \\ & + \sqrt{2}A_{(2)} \cos\left(\sqrt{(2 - \sqrt{2})\frac{g}{l}}t + \varphi_0^{(2)}\right). \end{aligned} \quad (7)$$

从(6)及(7)式可以看出,简正坐标是

$$\begin{cases} \xi_1 = \sqrt{2} \theta_1 - \theta_2, \\ \xi_2 = \sqrt{2} \theta_1 + \theta_2. \end{cases}$$

这时系统的通解可以表为

$$\begin{cases} \xi_1 = 2\sqrt{2} A_{(1)} \cos\left(\sqrt{(2+\sqrt{2})\frac{g}{l}} t + \varphi_0^{(1)}\right), & (8) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \xi_2 = 2\sqrt{2} A_{(2)} \cos\left(\sqrt{(2-\sqrt{2})\frac{g}{l}} t + \varphi_0^{(2)}\right). & (9) \end{cases}$$

系统的简正模式之一是

$$\begin{cases} \xi_2 = 0, \\ \xi_1 = 2\sqrt{2} A_{(1)} \cos\left(\sqrt{(2+\sqrt{2})\frac{g}{l}} t + \varphi_0^{(1)}\right). \end{cases}$$

$\xi_2 = 0$ 意味着 $\theta_2 = -\sqrt{2} \theta_1$, 它的振动如图 5-5 所示, 简正角频率为

$$\omega_{(1)} = \sqrt{(2+\sqrt{2})g/l}.$$

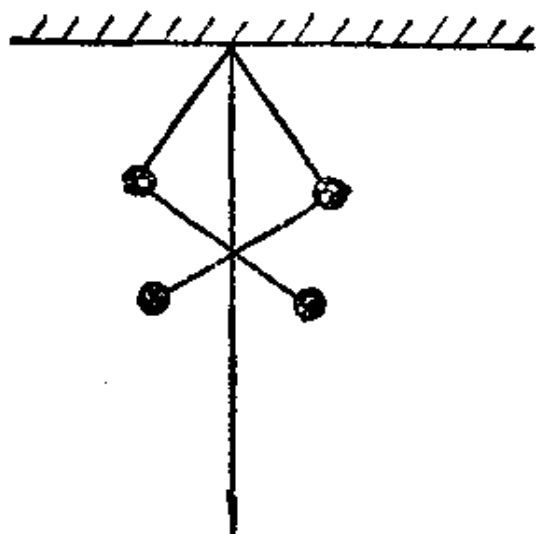


图 5-5

另一简正模式 $\xi_1 = 0$ 意味着 $\theta_2 = \sqrt{2} \theta_1$, 它的振动如图 5-6 所示, 简正角频率为

$$\omega_{(2)} = \sqrt{(2-\sqrt{2})g/l}.$$

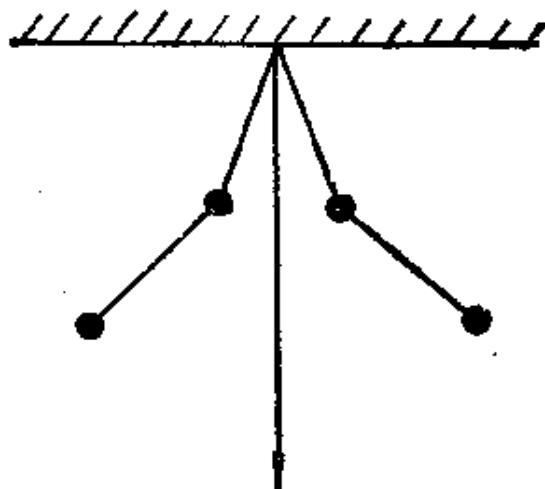


图 5-6

另解 运用简单的配平方技巧可以简化本例的求解。
系统的动能

$$\begin{aligned} T &= T_1 + T_2 \\ &= \frac{1}{2} ml^2 (2\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2), \end{aligned}$$

势能

$$\begin{aligned} V &= V_1 + V_2 \\ &= -3mgl + \frac{1}{2} mgl(2\theta_1^2 + \theta_2^2). \end{aligned}$$

这里的 V 除了无关紧要的常数项即 $-3mgl$ 以外, 是平方和的形式, 没有交叉项。但 T 则除了平方和之外, 还有交叉项 $\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2$ 。仿照前面耦合摆问题中的处理方法, 采用配平方的办法除去交叉项。由

$$\begin{aligned} 2\theta_1^2 + \theta_2^2 &= (\sqrt{2}\theta_1)^2 + \theta_2^2 \\ &= \frac{1}{2} [(\sqrt{2}\theta_1 + \theta_2)^2 + (\sqrt{2}\theta_1 - \theta_2)^2], \\ (\sqrt{2}\theta_1)\theta_2 &= \frac{1}{4} [(\sqrt{2}\theta_1 + \theta_2)^2 - (\sqrt{2}\theta_1 - \theta_2)^2] \end{aligned}$$

可知, 只要变换到

$$\begin{cases} \xi_1 = \sqrt{2}\theta_1 - \theta_2, \\ \xi_2 = \sqrt{2}\theta_1 + \theta_2, \end{cases}$$

拉格朗日函数就化为平方和:

$$\begin{aligned}
 L &= T - V \\
 &= \frac{1}{4} ml \left[l \left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2} \right) \dot{\xi}_1^2 - g \xi_1^2 \right] \\
 &\quad + \frac{1}{4} ml \left[l \left(\frac{2 + \sqrt{2}}{2} \right) \dot{\xi}_2^2 - g \xi_2^2 \right] + 3mgl.
 \end{aligned}$$

拉格朗日方程为

$$\begin{cases} \ddot{\xi}_1 + \frac{2g}{l(2 - \sqrt{2})} \xi_1 = 0, \\ \ddot{\xi}_2 + \frac{2g}{l(2 + \sqrt{2})} \xi_2 = 0, \end{cases} \quad (10)$$

即

$$\begin{cases} \ddot{\xi}_1 + \frac{(2 + \sqrt{2})g}{l} \xi_1 = 0, \\ \ddot{\xi}_2 + \frac{(2 - \sqrt{2})g}{l} \xi_2 = 0. \end{cases} \quad (11)$$

这样, ξ_1 及 ξ_2 各以 $\omega_{(1)}$ 及 $\omega_{(2)}$ 做简谐振动, 而

$$\omega_{(1)}^2 = \frac{(2 + \sqrt{2})g}{l}, \quad \omega_{(2)}^2 = \frac{(2 - \sqrt{2})g}{l}.$$

与前得结果相同.

§ 19. 分子的振动

以线性三原子对称分子作为例子, 参看图 5-7, 这种分子包含三个原子, 其中两个原子是相同的, 我们称之为 A 原子, 另一个原子是不同的, 我们称之为 B 原子. 三原子排列在一直线上, 两个 A 原子对称地在两旁.

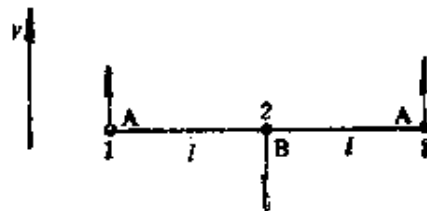


图 5-7

先研究横振动. 三个原子沿 y 轴作横振动, 有三个自由度. 但有一个自由度对应于分子的整体平移. 这里不考虑整体的平移, 因此认为质心静止, 即 $m_A y_1 +$

$m_B y_2 + m_A y_3 = 0$ 。另外还有一个自由度对应于分子的整体转动。这里不考虑整体的转动,因此认为分子对于质心的角动量为零,即 $m_A \dot{y}_1 l - m_A \dot{y}_3 l = 0$, 即 $\dot{y}_1 = \dot{y}_3$ 。这样,只剩下一个自由度对应于横振动。不妨取 y_1 作为这个系统的广义坐标, y_2 和 y_3 都可用 y_1 表出,

$$y_3 = y_1, \quad y_2 = -\frac{2m_A}{m_B} y_1.$$

系统的动能

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m_A \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} m_B \dot{y}_2^2 + \frac{1}{2} m_A \dot{y}_3^2 \\ &= \frac{m_A}{m_B} (2m_A + m_B) \dot{y}_1^2. \end{aligned}$$

至于系统的势能 V 本是 y_1, y_2 和 y_3 的函数,但既然 y_2 和 y_3 都可用 y_1 表出,所以 V 归根结底也是 y_1 的函数 $V(y_1)$ 。在平衡位形 $y_1 = 0$ 附近可把 V 展为泰勒级数,

$$V(y_1) = V(0) + \left. \frac{dV}{dy_1} \right|_{y_1=0} y_1 + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2V}{dy_1^2} \right|_{y_1=0} y_1^2 + \dots \quad (19.1)$$

既然 $y_1 = 0$ 对应于系统的平衡位形,按照(10.16),

$$\left. \frac{dV}{dy_1} \right|_{y_1=0} = 0.$$

这里考虑的是微振动, y_1 始终很小,所以(19.1)中省略号所表示的 y_1 的高幂次项可以略去。这样一来,(19.1)成为

$$V(y_1) = V(0) + \left. \frac{d^2V}{dy_1^2} \right|_{y_1=0} y_1^2.$$

势能本来可以加减任意常数,所以上式的 $V(0)$ 也可以略去。又

把 $\left. \frac{d^2V}{dy_1^2} \right|_{y_1=0}$ 记作 $\frac{1}{2} k_1$, 则势能的表示式成为

$$V(y_1) = \frac{1}{2} k_1 y_1^2. \quad (19.2)$$

这就是说,不管势能的表示式本来是怎样的,在微振动的情况下总可以看作弹性势能。

系统的拉格朗日函数

$$L = T - V = \frac{m_A}{m_B} (2m_A + m_B) \dot{y}_1^2 - \frac{1}{2} k_1 y_1^2. \quad (19.3)$$

相应的拉格朗日方程是

$$\frac{d}{dt} \left[2 \frac{m_A}{m_B} (2m_A + m_B) \dot{y}_1 \right] + k_1 y_1 = 0,$$

即
$$\ddot{y}_1 + \frac{k_1 m_B}{2m_A (2m_A + m_B)} y_1 = 0. \quad (19.4)$$

这是谐振动方程,它的角频率是 $\sqrt{k_1 m_B / 2m_A (2m_A + m_B)}$.

现在研究纵振动(如图 5-8),用 x 表示原子偏离平衡位置的纵位移。这有三个自由度。但有一个自由度对应于分子的整体平移,这里不考虑分子的整体平动,因此认为质心静止,即

$$m_A x_1 + m_B x_2 + m_A x_3 = 0.$$

这样,还剩两个自由度对应于纵振动。不妨取 x_1 和 x_3 作为这个系统的广义坐标, x_2 可用它们表出,

$$x_2 = -\frac{m_A}{m_B} (x_1 + x_3).$$

系统的动能

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m_A \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_B \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} m_A \dot{x}_3^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{m_A}{m_B} (m_A + m_B) (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_3^2) + \frac{m_A^2}{m_B} \dot{x}_1 \dot{x}_3. \end{aligned}$$

不管原子之间相互作用势能的表示式怎样,在微振动的情况下总

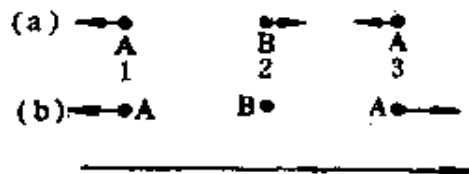


图 5-8

可以看作弹性势能。假若只考虑近邻之间的势能,则

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{1}{2} k(x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2} k(x_3 - x_2)^2 \\
 &= \frac{1}{2} \frac{k}{m_B^2} [(m_A + m_B)^2 + m_A^2] (x_1^2 + x_3^2) \\
 &\quad + 2 \frac{k m_A (m_A + m_B)}{m_B^2} x_1 x_3.
 \end{aligned}$$

系统的拉格朗日函数是

$$\begin{aligned}
 L = T - V &= \frac{1}{2} \frac{m_A}{m_B} (m_A + m_B) (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_3^2) + \frac{m_A^2}{m_B} \dot{x}_1 \dot{x}_3 \\
 &\quad - \frac{1}{2} \frac{k}{m_B^2} [(m_A + m_B)^2 + m_A^2] (x_1^2 + x_3^2) \\
 &\quad - 2 \frac{k m_A (m_A + m_B)}{m_B^2} x_1 x_3. \quad (19.5)
 \end{aligned}$$

于是得拉格朗日方程

$$\begin{cases}
 \frac{m_A}{m_B} (m_A + m_B) \ddot{x}_1 + \frac{m_A^2}{m_B} \ddot{x}_3 + \frac{k}{m_B^2} [(m_A + m_B)^2 + m_A^2] x_1 \\
 \quad + \frac{2 k m_A (m_A + m_B)}{m_B^2} x_3 = 0, \\
 \frac{m_A^2}{m_B} \ddot{x}_1 + \frac{m_A}{m_B} (m_A + m_B) \ddot{x}_3 + \frac{2 k m_A (m_A + m_B)}{m_B^2} x_1 \\
 \quad + \frac{k}{m_B^2} [(m_A + m_B)^2 + m_A^2] x_3 = 0.
 \end{cases} \quad (19.6)$$

令

$$x_1 = A_1 e^{i\lambda t}, \quad x_3 = A_3 e^{i\lambda t}.$$

代入(19.6)即得 A_1 与 A_3 的代数方程组

$$\begin{cases}
 \{m_A m_B (m_A + m_B) \lambda^2 + k [(m_A + m_B)^2 + m_A^2]\} A_1 \\
 \quad + \{m_A^2 m_B \lambda^2 + 2 k m_A (m_A + m_B)\} A_3 = 0, \\
 \{m_A^2 m_B \lambda^2 + 2 k m_A (m_A + m_B)\} A_1 \\
 \quad + \{m_A m_B (m_A + m_B) \lambda^2 + k [(m_A + m_B)^2 \\
 \quad + m_A^2]\} A_3 = 0.
 \end{cases} \quad (19.7)$$

这是联立线性齐次代数方程组，它的解是 $A_1 = A_3 = 0$ ，除非系数行列式等于零。 $A_1 = A_3 = 0$ 意味着三个原子都不动，无需讨论。系数行列式等于零即

$$\{m_A m_B (m_A + m_B) \lambda^2 + k[(m_A + m_B)^2 + m_A^2]\}^2 - \{m_A^2 m_B \lambda^2 + 2k m_A (m_A + m_B)\}^2 = 0,$$

由此解得

$$\lambda^2 = -k \frac{2m_A + m_B}{m_A m_B},$$

或

$$\lambda^2 = -\frac{k}{m_A}.$$

先看 $\lambda^2 = -k(2m_A + m_B)/m_A m_B$ 。这意味着， x_1 和 x_3 对时间的依赖关系都是 $e^{\pm i\sqrt{k(2m_A + m_B)/m_A m_B}t}$ ，或者说

$$\cos(\sqrt{k(2m_A + m_B)/m_A m_B}t + \theta_1).$$

为决定 A_1 和 A_3 ，把这个 λ^2 代入(19.7)，得

$$\begin{cases} -k m_A m_B A_1 + k m_A m_B A_3 = 0, \\ k m_A m_B A_1 - k m_A m_B A_3 = 0. \end{cases}$$

这就是说， $A_1 = A_3$ ，而所求的解是

$$\begin{cases} x_1 = A^{(1)} \cos(\sqrt{k(2m_A + m_B)/m_A m_B}t + \theta_1), \\ x_3 = A^{(1)} \cos(\sqrt{k(2m_A + m_B)/m_A m_B}t + \theta_1). \end{cases} \quad (19.8)$$

再看 $\lambda^2 = -k/m_A$ 。这意味着， x_1 和 x_3 对时间的依赖关系都是 $e^{\pm i\sqrt{k/m_A}t}$ ，或者说 $\cos(\sqrt{k/m_A}t + \theta_2)$ 。为决定 A_1 和 A_3 ，把这个 λ^2 代入(19.7)，得

$$\begin{cases} k m_A (2m_A + m_B) A_1 + k m_A (2m_A + m_B) A_3 = 0, \\ k m_A (2m_A + m_B) A_1 - k m_A (2m_A + m_B) A_3 = 0. \end{cases}$$

这是说 $A_1 = -A_3$ ，而所求的解是

$$\begin{cases} x_1 = A^{(2)} \cos(\sqrt{k/m_A}t + \theta_2), \\ x_3 = -A^{(2)} \cos(\sqrt{k/m_A}t + \theta_2). \end{cases} \quad (19.9)$$

综合(19.8)和(19.9),这种三原子分子的纵振动的一般解为

$$\begin{cases} x_1 = A^{(1)} \cos(\sqrt{k(2m_A + m_B)/m_A m_B} t + \theta_1) \\ \quad + A^{(2)} \cos(\sqrt{k/m_A} t + \theta_2), \\ x_3 = A^{(1)} \cos(\sqrt{k(2m_A + m_B)/m_A m_B} t + \theta_1) \\ \quad - A^{(2)} \cos(\sqrt{k/m_A} t + \theta_2). \end{cases} \quad (19.10)$$

x_1 和 x_3 都作复振动,它们的频谱相同,都包含

$$\sqrt{k(2m_A + m_B)/m_A m_B} \text{ 和 } \sqrt{k/m_A} \text{ 这两个角频率.}$$

值得注意的是, $\xi_1 = x_1 + x_3$ 和 $\xi_3 = x_1 - x_3$ 互相独立地作简谐振动:

$$\begin{cases} \xi_1 = 2A^{(1)} \cos(\sqrt{k(2m_A + m_B)/m_A m_B} t + \theta_1), \\ \xi_3 = 2A^{(2)} \cos(\sqrt{k/m_A} t + \theta_2). \end{cases}$$

这表明 ξ_1 和 ξ_3 是更适当的广义坐标. 这两种互相独立的简谐振动叫作简正振动,其频率叫作简正频率,相应的广义坐标 ξ_1 和 ξ_3 叫作简正坐标.

这两种简正振动的图象是很清楚的. $\xi_3 = 0$ 而 ξ_1 作简谐振动,这就是 1 和 3 两个原子同步地振动,如图 5-8(a). $\xi_1 = 0$ 而 ξ_3 作简谐振动,这就是 1 和 3 两个原子对称地反向振动,如图 5-8(b).

其实,正如“耦合摆”和“双摆”的情况那样,我们不必等到解出 x_1 和 x_3 之后才引入简正坐标,完全可以在得到拉格朗日函数(19.5)之后立即引入 ξ_1 和 ξ_3 . 事实上,

$$\text{以 } x_1 = \frac{1}{2}(\xi_1 + \xi_3), \quad x_3 = \frac{1}{2}(\xi_1 - \xi_3)$$

代入(19.5),就把拉格朗日函数 L 里的动能和势能部分各化为平方和:

$$\begin{aligned} L = & \left[\frac{1}{4} \frac{m_A}{m_B} (2m_A + m_B) \dot{\xi}_1^2 - \frac{1}{4} \frac{k}{m_B^2} (2m_A + m_B)^2 \xi_1^2 \right] \\ & + \left[\frac{1}{4} m_A \dot{\xi}_3^2 - \frac{1}{4} k \xi_3^2 \right]. \end{aligned}$$

既然 T 和 V 两部分各化为平方和, 就可以把 L 拆开为两部分, 这两部分各只依赖于 ξ_1 和 ξ_2 中的一个。这正是 ξ_1 和 ξ_2 得以互相独立的秘密所在。上式两个方括号中各是简谐振子的拉格朗日函数, 所以 ξ_1 和 ξ_2 各作简谐振动。

以上是两自由度系统的微振动, 下面研究微振动的一般理论。

§ 20. 微振动的一般理论

以下讨论多自由度的力学系统在其平衡位置附近作微振动的理论。

(1) 拉格朗日函数

把 s 个自由度的力学系统的平衡位形所对应的广义坐标的值记作 $q_{\alpha 0}$ ($\alpha = 1, 2, \dots, s$), 下标 0 标志平衡位形。不妨把这些 $q_{\alpha 0}$ 当作就是零, 这样讨论无损于一般性。

既然研究的是平衡位形附近的微振动, 可把系统的拉格朗日函数 L 在 $q_{\alpha 0}$ 附近展开为泰勒级数, 并且只取它的前几项。

先展开势能

$$V = V_0 + \sum_{\alpha=1}^s \left(\frac{\partial V}{\partial q_{\alpha}} \right)_0 q_{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^s \sum_{\beta=1}^s \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_{\alpha} \partial q_{\beta}} \right)_0 q_{\alpha} q_{\beta} + \dots$$

势能本来可以加减任意常数, 所以上式的 V_0 可以略去。引入记号 $k_{\alpha\beta}$,

$$k_{\alpha\beta} = k_{\beta\alpha} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_{\alpha} \partial q_{\beta}} \right)_0,$$

并根据(10.16), 则到二级项为止的势能表示式为

$$V = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^s \sum_{\beta=1}^s k_{\alpha\beta} q_{\alpha} q_{\beta}. \quad (20.1)$$

其次, 设变换式 $r_i = r_i(q)$ 不显含时间, 则动能

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=1}^s \sum_{\beta=1}^s m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\beta} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta.$$

引入记号 $m_{\alpha\beta}$,

$$m_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\beta},$$

则动能可表为

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^s \sum_{\beta=1}^s m_{\alpha\beta} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta. \quad (20.2)$$

如果(20.2)也只到二级项为止,则由于 $\dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta$ 已是二级的, $m_{\alpha\beta}$ 只要展开到零级项为止就够了. 换句话说, (20.2) 的 $m_{\alpha\beta}$ 可看作常数, 即取它们在平衡位形下的值.

这样, 到二级项为止, 力学系统在平稳位形附近作微振动的拉格朗日函数为

$$L = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^s \sum_{\beta=1}^s (m_{\alpha\beta} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta - k_{\alpha\beta} q_\alpha q_\beta). \quad (20.3)$$

(2) 化平方和

按照线性代数理论, 总可以变换到一组新的广义坐标 $\xi_l (l = 1, 2, \dots, s)$, 使二次齐次式 $V(20.1)$ 和 $T(20.2)$ 都化为平方和, 从而拉格朗日函数(20.3)化为

$$L = \sum_{l=1}^s \left(\frac{1}{2} m_l \dot{\xi}_l^2 - \frac{1}{2} k_l \xi_l^2 \right) \quad (20.4)$$

这里, L 已拆为 s 个部分, 每一部分各只依赖于 ξ_l 中的一个, 并且每一部分都是简谐振子的拉格朗日函数, 它们按照拉格朗日方程分别给出 ξ_l 中的一个动力学方程

$$m_l \ddot{\xi}_l + k_l \xi_l = 0 \quad (l = 1, 2, \dots, s),$$

其解是

$$\xi_l = C^{(l)} \cos(\omega_l t + \theta_l) \quad (\omega_l = \sqrt{k_l/m_l}). \quad (20.5)$$

(20.5) 正是简正振动, 相应的简正角频率是 $\sqrt{k_l/m_l}$. 追溯上去,

可以看出,使 T 和 V 都化为平方和的广义坐标 $\xi_l (l=1,2,\dots,s)$ 就是简正坐标。

多自由度系统的微振动问题,按上述方法具体进行解算,主要的演算工作量在于化 T 和 V 为平方和。一旦把 T 和 V 化为平方和,剩下的演算就很简便了。

(3) 直接求解

把 T 与 V 同时化为平方和这件事,在前面的耦合摆和双摆问题中还比较方便。但在一般情况下,这件事本身就比较麻烦,我们不如仍用拉格朗日函数(20.3)。

按照拉格朗日函数(20.3),拉格朗日方程是

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha} \left(\frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^i \sum_{r=1}^i m_{\beta r} \dot{q}_\beta \dot{q}_r \right) - \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \left(-\frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^i \sum_{r=1}^i k_{\beta r} q_\beta q_r \right) = 0,$$

即

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \sum_{r=1}^i m_{\alpha r} \dot{q}_r + \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^i m_{\beta \alpha} \dot{q}_\beta \right) + \left(\frac{1}{2} \sum_{r=1}^i k_{\alpha r} q_r + \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^i k_{\beta \alpha} q_\beta \right) = 0,$$

亦即

$$\sum_{\beta=1}^i m_{\alpha\beta} \ddot{q}_\beta + \sum_{\beta=1}^i k_{\alpha\beta} q_\beta = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s). \quad (20.6)$$

求解常系数线性微分方程组(20.6)的通常办法是,令

$$q_\beta = A_\beta e^{i\lambda t} \quad (\beta = 1, 2, \dots, s),$$

代入(20.6)即得 A_β 的线性代数方程组

$$\sum_{\beta=1}^i (m_{\alpha\beta} \lambda^2 + k_{\alpha\beta}) A_\beta = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s). \quad (20.7)$$

齐次线性代数方程组(20.7)有非零解的条件是这些方程不全独

立,亦即系数行列式为零,

$$\begin{vmatrix} m_{11}\lambda^2 + k_{11} & m_{12}\lambda^2 + k_{12} & \cdots & m_{1s}\lambda^2 + k_{1s} \\ m_{21}\lambda^2 + k_{21} & m_{22}\lambda^2 + k_{22} & \cdots & m_{2s}\lambda^2 + k_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ m_{s1}\lambda^2 + k_{s1} & m_{s2}\lambda^2 + k_{s2} & \cdots & m_{ss}\lambda^2 + k_{ss} \end{vmatrix} = 0. \quad (20.8)$$

这是 λ^2 的 s 次代数方程,从它可解出 s 个 λ^2 , 今记作

$$\lambda_l^2 \quad (l = 1, 2, \cdots, s).$$

这 s 个 λ^2 当然可能有一些是重根.

很自然作这样的揣想: 如果力学系统的平衡位形是稳定的, 则力学系统稍受扰动后应在这平衡位形附近振动, 这说明 $e^{\lambda t}$ 中的 λ 应为虚数, 亦即 $\lambda^2 < 0$. 这个揣想是正确的(证明在后面), 今记作

$$\lambda_l^2 = -\omega_l^2, \quad \omega_l^2 > 0 \quad (l = 1, 2, \cdots, s). \quad (20.9)$$

对应于 s 个 λ_l^2 , 有 $\lambda_l = \pm i\omega_l$, 共计 $2s$ 个.

将这 s 个 λ_l^2 即 $-\omega_l^2$ 逐个地代入方程组 (20.7). 这些方程不全独立. 比方说, 对于单根 λ_l^2 , 只有 $s - 1$ 个独立的方程. 弃去最后一个方程, 把方程组改写为

$$\sum_{\beta=1}^{s-1} (m_{\alpha\beta}\lambda_l^2 + k_{\alpha\beta}) A_{\beta}^{(l)} = -(m_{\alpha s}\lambda_l^2 + k_{\alpha s}) A_s^{(l)} \quad (\alpha = 1, 2, \cdots, s-1). \quad (20.10)$$

从这 $s - 1$ 个方程“解出” $A_{\beta}^{(l)}$ ($\beta = 1, 2, \cdots, s - 1$), 确切地说, 是用 $A_s^{(l)}$ 表出这 $s - 1$ 个 $A_{\beta}^{(l)}$,

$$A_{\beta}^{(l)} = \frac{-\sum_{\alpha=1}^{s-1} (m_{\alpha s}\lambda_l^2 + k_{\alpha s}) \alpha_{\alpha\beta}}{\Delta} A_s^{(l)} \quad (\beta = 1, 2, \cdots, s-1).$$

其中 Δ 是方程组 (20.10) 的系数行列式, $\alpha_{\alpha\beta}$ 则是 Δ 的第 α 行第 β 列元素的代数余子式.

容易看出: Δ 其实是行列式 (20.8) 第 s 行第 s 列元素的代数

余子式 $\Delta_{ii}^{(l)}$, 这里右上角的 (l) 表示行列式中 λ^2 已用 λ_l 即 $-\omega_l^2$ 代入, 至于 $-\sum_{\alpha=1}^{i-1} (m_{\alpha\alpha}\lambda_l^2 + k_{\alpha\alpha})\alpha_{\alpha\beta}$ 则是行列式 (20.8) 第 s 行第 β 列元素的代数余子式 $\Delta_{i\beta}^{(l)}$. 这样,

$$A_1^{(l)}: A_2^{(l)}: \dots: A_s^{(l)} = \Delta_{i1}^{(l)}: \Delta_{i2}^{(l)}: \dots: \Delta_{is}^{(l)},$$

亦即 $A_\beta^{(l)} = \Delta_{i\beta}^{(l)} \times \text{常数 } A^{(l)} \quad (\beta = 1, 2, \dots, s), \quad (20.11)$

对于每一套系数 (20.11), 有一套特解

$$q_\beta = \Delta_{i\beta}^{(l)} [A_1^{(l)} e^{i\omega_l t} + A_2^{(l)} e^{-i\omega_l t}],$$

即 $q_\beta = C^{(l)} \Delta_{i\beta}^{(l)} \cos(\omega_l t + \theta_l) \quad (\beta = 1, 2, \dots, s), \quad (20.12)$

其中 $C^{(l)}$ 和 θ_l 都是实常数.

对于 s 个 λ_l 可得 s 套 (20.12) 形式的特解. 把这些特解叠加起来, 最后求得运动方程 (20.6) 的通解

$$q_\beta = \sum_{l=1}^s \Delta_{i\beta}^{(l)} \xi_l \quad (\beta = 1, 2, \dots, s), \quad (20.13)$$

其中

$$\xi_l = C^{(l)} \cos(\omega_l t + \theta_l) \quad (l = 1, 2, \dots, s), \quad (20.14)$$

它正是角频率为 ω_l 的简正坐标 (20.5). 在 (20.4) 中共有 $2s$ 个积分常数 $C^{(l)}$ 和 $\theta_l (l = 1, 2, \dots, s)$, 它们取决于初始条件.

解 (20.13) 表明, 所有的广义坐标 q_β 各作复振动, 它们具有同样的频谱 $\omega_l (l = 1, 2, \dots, s)$.

(4) 证明 $\lambda^2 < 0$

这里证明 $\lambda_l^2 < 0$. 考虑到 $A_\beta (\beta = 1, 2, \dots, s)$ 可以是复数, 用 A_α 的共轭复数 A_α^* 乘方程组 (20.7) 的第 α 个, 并就 α 累加, 即得

$$\sum_{\alpha=1}^s \sum_{\beta=1}^s (m_{\alpha\beta}\lambda^2 + k_{\alpha\beta}) A_\alpha^* A_\beta = 0,$$

由此,

$$\lambda^2 = \frac{\sum_{\alpha=1}^i \sum_{\beta=1}^i k_{\alpha\beta} A_{\alpha}^* A_{\beta}}{\sum_{\alpha=1}^i \sum_{\beta=1}^i m_{\alpha\beta} A_{\alpha}^* A_{\beta}}, \quad (20.15)$$

以 $A_{\alpha} = a_{\alpha} + ib_{\alpha}$ (a_{α} 和 b_{α} 都是实数) 代入(20.15)的分子,

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^i \sum_{\beta=1}^i k_{\alpha\beta} A_{\alpha}^* A_{\beta} &= \sum_{\alpha=1}^i \sum_{\beta=1}^i (k_{\alpha\beta} a_{\alpha} a_{\beta} + k_{\beta\alpha} b_{\alpha} b_{\beta}) \\ &\quad + i \sum_{\alpha=1}^i \sum_{\beta=1}^i k_{\alpha\beta} a_{\alpha} b_{\beta} - i \sum_{\alpha=1}^i \sum_{\beta=1}^i k_{\alpha\beta} b_{\alpha} a_{\beta}. \end{aligned}$$

把上式右边最后一项的求和指标 α 和 β 对调, 并考虑到 $k_{\alpha\beta} = k_{\beta\alpha}$, 这最后一项同它前面那一项相消。于是, 上式成为

$$\sum_{\alpha=1}^i \sum_{\beta=1}^i k_{\alpha\beta} A_{\alpha}^* A_{\beta} = \sum_{\alpha=1}^i \sum_{\beta=1}^i (k_{\alpha\beta} a_{\alpha} a_{\beta} + k_{\beta\alpha} b_{\alpha} b_{\beta}). \quad (20.16)$$

稳定平衡位形的势能是极小值, 因此, 二次齐次式(20.1)应是正定的, (20.16)右边两项都是正的, 故 $\sum_{\alpha=1}^i \sum_{\beta=1}^i k_{\alpha\beta} A_{\alpha}^* A_{\beta} > 0$ 。同理,

动能的表达式(20.2)亦是正定的, 从而 $\sum_{\alpha=1}^i \sum_{\beta=1}^i m_{\alpha\beta} A_{\alpha}^* A_{\beta}$ 亦 > 0 。

于是由(20.15)知 $\lambda^2 < 0$ 。

(5) 矩阵表述

这里用矩阵来表述多自由度系统的微振动问题。式(20.2)和(20.1)可用矩阵表为

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \dot{Q} M \dot{Q}, \\ V &= \frac{1}{2} \bar{Q} K Q, \end{aligned} \quad (20.17)$$

其中 Q 与 \dot{Q} 是列矩阵

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_s \end{bmatrix}, \quad \dot{Q} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_s \end{bmatrix},$$

\tilde{Q} 和 \dot{Q} 分别是它们的转置, 因而是行矩阵, M 和 K 分别是惯量矩阵和刚度矩阵:

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1s} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ m_{s1} & \cdots & m_{ss} \end{bmatrix},$$

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & \cdots & k_{1s} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ k_{s1} & \cdots & k_{ss} \end{bmatrix}.$$

显然, M 和 K 是实对称矩阵, 而且 M 是正定的, 就是说, 不管 \dot{Q} 是怎样一个实的列矩阵, 动能 $T = \tilde{Q}M\dot{Q}$ 总是非负的. 其实, 在稳定平衡位形邻近, K 也是正定的.

如果 M 与 K 都是对角化的, 即 T 与 V 各是平方和而没有交叉项, 则 $L = T - V$ 可分解为 s 个部分, 每个部分各只涉及一个广义坐标, 从而每个拉格朗日方程也各只涉及一个广义坐标. 显然, 此时的各广义坐标都是简正坐标, 各作谐振动.

如果 M 与 K 并非都是对角化的, 那么, 由于 M 和 K 是两个对称矩阵, 而且 M 是正定的, 于是按照矩阵理论, 一定可以找到一个实的非奇异满秩代换使 M 和 K 同时对角化. 完成这个对角化, 问题的求解就很简单了.

但是, M 与 K 同时对角化的过程, 一般往往很麻烦, 还不如就用那未经对角化的 M 与 K .

这样, 拉格朗日函数 $L = \frac{1}{2} \dot{Q}M\dot{Q} - \frac{1}{2} \tilde{Q}KQ$, 而拉格朗日方程有如 (20.6) 所示, 可用矩阵表为

$$M\ddot{Q} + KQ = 0. \quad (20.18)$$

矩阵理论指出, 必定存在 s 个简正振动模式. 考察某个简正振动模式, 其相应的简正坐标 ξ 不为零而其余的简正坐标均等于零. 这时我们有

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \xi \\ A_2 \xi \\ \vdots \\ A_s \xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_s \end{bmatrix} \xi = A \xi, \quad (20.19)$$

这里 A 是列矩阵，其元素均为常数，这些常数还有待确定。以(20.19)代入(20.18)，

$$M A \ddot{\xi} + K A \xi = 0,$$

即

$$(-\omega^2 M + K) A \xi = 0,$$

式中 ω 为对应于简正坐标 ξ 的简正角频率。因 $\xi \neq 0$ ，上式即

$$(-\omega^2 M + K) A = 0. \quad (20.20)$$

这是含有 s 个方程的线性齐次代数方程组，其解是 $A = 0$ ，即 $A_1 = A_2 = \dots = A_s = 0$ 。这表示力学系统静止于其稳定平衡位形。对此，我们不感兴趣。

那么，它是否有非零解呢？按照线性代数理论，存在非零解的条件是系数行列式为零，

$$|-\omega^2 M + K| = 0. \quad (20.21)$$

这称为特征方程。它是 ω^2 的 s 次代数方程，它有 s 个根： $\omega_{(1)}^2, \omega_{(2)}^2, \dots, \omega_{(s)}^2$ ，其中可能有重根。

取某个单根 $\omega_{(1)}^2$ ，代入方程组(20.20)。这方程组就只有 $s-1$ 个方程是独立的，由此不难解得一组 A 的比值。

$$A_1^{(1)} : \omega_{(1)}^{(1)} : \dots : A_s^{(1)} \quad (20.22)$$

它们可说是本征矢量的 s 个分量。这样，我们得到一个简正模式：

$$q_1 = A_1^{(1)} \xi^{(1)}, \quad q_2 = A_2^{(1)} \xi^{(1)}, \quad \dots, \quad q_s = A_s^{(1)} \xi^{(1)}, \quad (20.23)$$

其中 $\xi^{(1)}$ 是角频率为 $\omega^{(1)}$ 的简正坐标。

关系式(20.22)即

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^{(1)} \\ A_2^{(1)} \\ \vdots \\ A_s^{(1)} \end{bmatrix} \xi^{(1)},$$

也可写为

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & A_1^{(r)} & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & A_2^{(r)} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & A_r^{(r)} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \xi^{(r)} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (20.24)$$

右边的第一个矩阵(方阵)第 r 行以外的元素均为零,而第二个矩阵(列矩阵)除第 r 个元素 $\xi^{(r)}$ 外均为零。

如 $\omega_{(r)}^2$ 为 r 重根,则代入方程组(20.20)之后只有 $s - r$ 个独立方程,从而容易定出 r 种比值(20.22),亦即求得 r 个简正模式。

将 s 个 $\omega_{(r)}^2$ 一一如上处理。由于方程组(20.20)是线性的,可得其一般解:

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^{(1)} & A_1^{(2)} & \cdots & A_1^{(s)} \\ A_2^{(1)} & A_2^{(2)} & \cdots & A_2^{(s)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_r^{(1)} & A_r^{(2)} & \cdots & A_r^{(s)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi^{(1)} \\ \xi^{(2)} \\ \vdots \\ \xi^{(r)} \end{bmatrix}, \quad (20.25)$$

或简写为

$$Q = A\xi.$$

方阵 A 正是从简正坐标 ξ_α ($\alpha = 1, 2, \dots, s$) 到(非简正)广义坐标 q_α ($\alpha = 1, 2, \dots, s$) 的变换矩阵,它的逆矩阵 A^{-1} 则是从(非简正)广义坐标 q_α 到简正坐标的变换矩阵。

例 改用矩阵形式重新计算 §18 例的双摆振动问题(见图 5-4)。

解 系统的动能

$$\begin{aligned} T &= T_1 + T_2 \\ &= \frac{1}{2} m(l\dot{\theta}_1)^2 + \frac{1}{2} ml^2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \\ &= \frac{1}{2} ml^2(2\dot{\theta}_1^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2), \end{aligned}$$

系统的势能

$$\begin{aligned} V &= V_1 + V_2 \\ &= -mgl \cos \theta_1 - mgl(\cos \theta_1 + \cos \theta_2) \\ &= -mgl \left(1 - \frac{\theta_1^2}{2}\right) - mgl \left(1 - \frac{\theta_1^2}{2} + 1 - \frac{\theta_2^2}{2}\right) \\ &= -3mgl + mgl \left(\theta_1^2 + \frac{\theta_2^2}{2}\right). \end{aligned}$$

将 T 和 V 以矩阵形式表示:

$$2T = [\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2] \begin{bmatrix} 2ml^2 & ml^2 \\ ml^2 & ml^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

$$2V = [\theta_1, \theta_2] \begin{bmatrix} 2mgl & 0 \\ 0 & mgl \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

其中刚性矩阵:

$$M = \begin{bmatrix} 2ml^2 & ml^2 \\ ml^2 & ml^2 \end{bmatrix} = ml^2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

惯量矩阵

$$K = \begin{bmatrix} 2mgl & 0 \\ 0 & mgl \end{bmatrix} = mgl \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

可以看到, K 已经对角化, 而 M 却是非对角化的.

系统的拉格朗日函数是

$$L = T - V = \frac{1}{2} \dot{\theta} M \dot{\theta} - \frac{1}{2} \theta K \theta,$$

拉格朗日方程为

$$M\ddot{\theta} + K\theta = 0. \quad (1)$$

令这方程组的解为 $\theta_\alpha = A_\alpha e^{i\omega t}$ ($\alpha = 1, 2$). 代入拉格朗日方程组, 方程组有非零解的条件为系数行列式为零, 即特征方程

$$\begin{vmatrix} 2mgl - \omega^2 ml^2 & -ml^2 \omega^2 \\ -ml^2 \omega^2 & mgl - ml^2 \omega^2 \end{vmatrix} = 0,$$

亦即

$$2(mgl - ml^2 \omega^2)^2 - (ml^2 \omega^2)^2 = 0. \quad (2)$$

解得本征值为

$$\omega_{(1)}^2 = (2 + \sqrt{2})g/l,$$

$$\omega_{(2)}^2 = (2 - \sqrt{2})g/l.$$

将 $\omega_{(1)}^2$ 代入拉格朗日方程组:

$$\begin{bmatrix} 2mgl - (2 + \sqrt{2})\frac{g}{l} 2ml^2 & -ml^2(2 + \sqrt{2})\frac{g}{l} \\ -ml^2(2 + \sqrt{2})\frac{g}{l} & mgl - ml^2(2 + \sqrt{2})\frac{g}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1^{(1)} \\ A_2^{(1)} \end{bmatrix} = 0, \quad (3)$$

解得 $A_1^{(1)}:A_2^{(1)} = 1: -\sqrt{2}$.

于是得一个简正模式:

$$\theta_1 = \xi^{(1)}, \quad \theta_2 = -\sqrt{2}\xi^{(1)},$$

而 $\xi^{(1)}$ 是角频率为 $\omega_{(1)}$ 的简正坐标.

再将 $\omega_{(2)}$ 代入拉格朗日方程组解得

$$A_1^{(2)}:A_2^{(2)} = 1: \sqrt{2}.$$

于是得另一个简正模式:

$$\theta_1 = \xi^{(2)}, \quad \theta_2 = \sqrt{2}\xi^{(2)}.$$

而 $\xi^{(2)}$ 是角频率为 $\omega_{(2)}$ 的简正坐标.

这样,问题的一般解是

$$\begin{cases} \theta_1 = \xi^{(1)} + \xi^{(2)}, \\ \theta_2 = -\sqrt{2}\xi^{(1)} + \sqrt{2}\xi^{(2)}. \end{cases} \quad (4)$$

这是用简正坐标表达 θ_1 与 θ_2 . 反之,从这两个方程解出 $\xi^{(1)}$ 和 $\xi^{(2)}$ 也可以用 θ_1 及 θ_2 表达简正坐标:

$$\begin{cases} \xi^{(1)} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\sqrt{2}\theta_1 - \theta_2), \\ \xi^{(2)} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\sqrt{2}\theta_1 + \theta_2). \end{cases} \quad (5)$$

与 §18 例的解相同.

虽然以上求解过程是从并未同时对角化的 M 与 K 出发的,但若改用(5)的简正坐标 $\xi^{(1)}$ 和 $\xi^{(2)}$ 作为广义坐标, M 与 K 就自然都是对角化的了. 验证如下:

从原来的广义坐标 θ_1, θ_2 到简正坐标 $\xi^{(1)}$ 和 $\xi^{(2)}$ 的变换式(4)可用矩阵表为 $\theta = V\xi$, 其中 θ 是由 θ_1 与 θ_2 组成的列矩阵, ξ 是由 $\xi^{(1)}$ 和 $\xi^{(2)}$ 组成的列矩阵, V 是方阵,

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

首先考察动能 T 的表达式,

$$2T = \dot{\theta}M\dot{\theta} = \dot{\xi}\tilde{V}M V\dot{\xi} = \dot{\xi}[\tilde{V}M V]\dot{\xi}.$$

由此看出,在这变换下, M 变为 VMV , 即

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix} ml^2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix} \\ &= 2ml^2 \begin{bmatrix} 2 - \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2 + \sqrt{2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

同理,考察势能 V 的表达式看出, K 变为 $\tilde{V}KV$, 即

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix} mgl \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix} \\ &= 4mgl \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

刚度矩阵保持为对角矩阵,而惯量矩阵也化为对角矩阵,果然是两者都对角化了。

*§ 21. 非线性振动

如果质点受到的恢复力并非弹性力或准弹性力, 振动幅度也并不小, 则势能展开式必须保留较多的项, 例如

$$V(x) = V_0 + \frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{3} \alpha x^3 + \frac{1}{4} \beta x^4.$$

至于动能仍为

$$T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2.$$

拉格朗日函数

$$L = T - V = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 - V_0 - \frac{1}{2} kx^2 - \frac{1}{3} \alpha x^3 - \frac{1}{4} \beta x^4.$$

拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

给出

$$m\ddot{x} + kx + \alpha x^2 + \beta x^3 = 0.$$

移项,

$$m\ddot{x} = -kx - \alpha x^2 - \beta x^3. \quad (21.1)$$

这并不是谐振动方程,它不仅有线性(一次)项,而且有高次项,所以叫作非线性振动。

只要偏离 x 不是过大,不妨认为 α, β, \dots 等系数依次为一阶、二阶、…的小量。就是说,相对于 m 和 k 而言, α 是小量;相对于 α 而言, β 是小量;依此类推。现在让我们用逐级近似的办法求解非线性振动的运动方程式(21.1)。

首先是零级近似。这时,略去所有的小量,运动方程式(21.1)成为

$$m\ddot{x}_0 = -kx_0, \quad (21.2)$$

x_0 的下标 0 表示零级近似。这方程是谐振动方程,其解是

$$x_0 = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad \left(\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \right).$$

其次是一级近似,把 x 修改为

$$x = x_0 + x_1 = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + x_1,$$

其中 x_1 是尚待确定的一阶小量。把上式代入运动方程式(21.1),

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_0 + m\ddot{x}_1 &= -kx_0 - kx_1 - \alpha(x_0^2 + 2x_0x_1 + x_1^2) \\ &\quad - \beta(x_0^3 + 3x_0^2x_1 + 3x_0x_1^2 + x_1^3). \end{aligned}$$

左边的 $m\ddot{x}_0$ 与右边的 $-kx_0$ 按照(21.2)互相约去。一级近似是说,一阶小量例如 $m\ddot{x}_1, -kx_1, -\alpha x_0^2$ 应该保留,二阶小量例如 $\alpha x_1, \beta x_0^3$ 则舍弃,更高阶的小量例如 $\alpha x_1^2, \beta x_1, \beta x_1^2, \beta x_1^3$ 不用说一概舍弃。这样,一级近似的运动方程式是

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 - \alpha x_0^2, \quad (21.3)$$

$$\begin{aligned} \text{即 } \ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 &= -\frac{\alpha}{m} A^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) \\ &= -\frac{\alpha}{2m} A^2 - \frac{\alpha}{2m} A^2 \cos 2(\omega_0 t + \varphi_0). \end{aligned}$$

这个方程式在形式上好像是受迫振动（请读者注意这里研究的是自由的非线性振动），方程右边第一项好像是恒定策动力，第二项好像是谐变策动力。不难求得这个“受迫振动”的解

$$x_1 = -\frac{\alpha A^2}{2m\omega_0^2} + \frac{\alpha A^2}{6m\omega_0^2} \cos 2(\omega_0 t + \varphi_0).$$

再看二级近似，把 x 修改为

$$\begin{aligned} x = x_0 + x_1 + x_2 &= A \cos(\omega_0 t + \varphi_0) - \frac{\alpha A^2}{2m\omega_0^2} \\ &+ \frac{\alpha A^2}{6m\omega_0^2} \cos 2(\omega_0 t + \varphi_0) + x_2, \end{aligned}$$

其中 x_2 是尚待确定的二阶小量。把上式代入运动方程式(21.1)，保留一阶和二阶小量，舍弃三阶和三阶以上的小量。

$m\ddot{x}_0 + m\dot{x}_1 + m\ddot{x}_2 = -kx_0 - kx_1 - kx_2 - \alpha(x_0^2 + 2x_0x_1) - \beta x_0^3$
左边的 $m\ddot{x}_0$ 与右边的 $-kx_0$ 按照(21.2)互相约去，左边的 $m\ddot{x}_1$ 与右边的 $-kx_1 - \alpha x_0^2$ 按照(21.3)互相约去。这样，二级近似的运动方程式是

$$\begin{aligned} \ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 &= -\frac{2\alpha}{m} x_0 x_1 - \frac{\beta}{m} x_0^3 \\ &= -\frac{2\alpha}{m} A \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \left[-\frac{\alpha A^2}{2m\omega_0^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha A^2}{6m\omega_0^2} \cos 2(\omega_0 t + \varphi_0) \right] \\ &\quad - \frac{\beta}{m} A^3 \cos^3(\omega_0 t + \varphi_0) \\ &= A^3 \left[\frac{5\alpha^2}{6m^2\omega_0^2} - \frac{3\beta}{4m} \right] \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\ &\quad - A^3 \left[\frac{\alpha^2}{6m^2\omega_0^2} + \frac{\beta}{4m} \right] \cos 3(\omega_0 t + \varphi_0). \end{aligned}$$

这个方程式在形式上好像是无阻尼振动系统的受迫振动。特别不妙的是“策动力”的第一项的角频率恰为 ω_0 ，与本征角频率相同，而在无阻尼的条件下，这会造成极强烈的共振，振幅无限增长，也就是说系统的机械能无限增长。读者想必注意到，这里研究的非线性振动是自由振动，并非受迫振动，并不存在提供能量的振源，系统的机械能不可能无限增长，那么，问题出在哪儿？

原来，这个问题的零级近似是谐振动，其角频率为 $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ 。但是，在较高级的近似中，由于振动的非谐性质，这种振动的“基本部分”的频率即“基频”与 ω_0 稍有差别。这差别在一级近似下没有暴露出来，而在二级近似下才暴露出来，这说明差别是二级小量。这样，在二级近似下，应把 x 修改为

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0) - \frac{\alpha A^2}{2 m \omega_0^2} + \frac{\alpha A^2}{6 m \omega_0^2} \cos 2(\omega t + \varphi_0) + x_2,$$

其中 $\omega = \omega_0 + \omega_2$, x_2 和 ω_2 都是尚待确定的二阶小量。把上式代入运动方程式(21.1)并略去三阶以及三阶以上的小量，即得

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_2 + kx_2 = & \left[2m\omega_0\omega_2 A + \frac{\alpha^2 A^3}{m\omega_0^2} \right] \cos(\omega t + \varphi_0) \\ & - \frac{\alpha^2 A^3}{3 m \omega_0^2} \cos(\omega t + \varphi_0) \cos 2(\omega t + \varphi_0) \\ & - \beta A^3 \cos^3(\omega t + \varphi_0). \end{aligned}$$

利用三角公式

$$\begin{cases} \cos 2\theta \cos \theta = \frac{1}{2} \cos 3\theta + \frac{1}{2} \cos \theta, \\ \cos^3 \theta = \frac{1}{4} \cos 3\theta + \frac{3}{4} \cos \theta, \end{cases}$$

把二阶运动方程式的右边加以改写，

$$\begin{aligned} \ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = & A \left[2\omega_0\omega_2 + \frac{5\alpha^2 A^2}{6 m^2 \omega_0^2} - \frac{3\beta A^2}{4 m} \right] \cos(\omega t + \varphi_0) \\ & - A^3 \left[\frac{\alpha^2}{6 m^2 \omega_0^2} + \frac{\beta}{4 m} \right] \cos 3(\omega t + \varphi_0). \end{aligned}$$

造成强烈共振的项应当是不存在的，所以上式右边第一个方括弧应为零，

$$2\omega_0\omega_2 + \frac{5\alpha^2 A^2}{6m^2\omega_0^3} - \frac{3\beta A^2}{4m} = 0.$$

由此求出基频的修正量

$$\omega_2 = \left(\frac{3\beta}{8m\omega_0} - \frac{5\alpha^2}{12m^2\omega_0^3} \right) A^2.$$

这样，基频 $\omega_0 + \omega_2$ 是跟振幅 A 有关的。（作为对照，应当指出，谐振动的频率与振幅无关。）至于 x_2 也不难解出，这里就不说它了。

*§ 22. 参数共振

大家都知道秋千可以越荡越高，那是因为荡秋千的人在经过竖直位置时站起来，他相对于转动轴的转动惯量变小，按照角动量守恒原理，他的转速增快。既然转速增快，他必然荡过较大的角度才折回。在折回点蹲下去，他相对于转动轴的转动惯量变大，按照角动量守恒原理，他的转速应变慢。可是，在折回点的转速本来是零，变慢也还是零，实际上是没有变，这蹲下去不过是为下一次的站起来创造条件而已。这样，秋千就越荡越高。

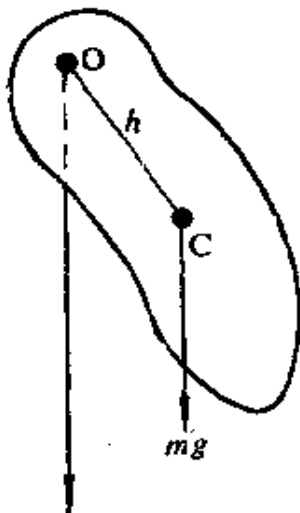


图 5-9

荡秋千的人可以看成是个复摆（图 5-9）。复摆的运动方程式是

$$I\ddot{\varphi} = -mgh\varphi,$$

式中 I 为复摆绕 O 的转动惯量， h 为质心与支点 O 的距离，它们是不变的参数。荡秋千的运动方程式应该是同样的。但如果要想越荡越高，必须象上面所指出的那样反复站起来与蹲下去，这时参数

l 和 h 就不再是不变的了，越荡越高不妨说是一种共振，但这共振不是通过策动力实现的，而是通过参数的变化而实现的，这就叫作参数共振。

现在研究一般形式下的参数共振。

我们研究的是这样的振动系统，其参数随时间作周期性变化，其运动方程式为

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) + kx = 0; \quad (22.1)$$

参数 $m(t)$ 和 $k(t)$ 是时间的周期函数。

引入新的自变数 τ 以代替 t ，

$$d\tau = \frac{dt}{m(t)}.$$

把上式代入(22.1)，就把(22.1)化为

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + m(\tau)k(\tau)x = 0.$$

因此，无损于一般性，可限于研究如下类型的运动方程式：

$$\ddot{x} + [\omega(t)]^2x = 0. \quad (22.2)$$

为具体起见，考察参数 $\omega(t)$ 变化幅度不大的情况，即

$$[\omega(t)]^2 = \omega_0^2[1 + q \cos \Omega t],$$

q 是小量， $\omega(t)$ 接近于常数 ω_0 。在这情况下的运动方程式是

$$\ddot{x} + \omega_0^2[1 + q \cos \Omega t]x = 0.$$

在秋千越荡越高的例子里，人站起蹲下的频率二倍于秋千摆动频率。由此推广开来，不妨认为在 $\Omega \approx 2\omega_0$ 的条件下，参数共振最强烈。因此，着重考察 $\Omega \approx 2\omega_0$ 的情况，令 $\Omega = 2\omega_0 + \Delta\omega$ ，而 $\Delta\omega \ll \omega_0$ 。这时，运动方程式成为

$$\ddot{x} + \omega_0^2[1 + q \cos(2\omega_0 + \Delta\omega)t]x = 0. \quad (22.3)$$

由于参数 $\omega(t)$ 变化幅度不大，可以期望如下形式的解答：

$$x = a(t) \cos\left(\omega_0 + \frac{1}{2}\Delta\omega\right)t + b(t) \sin\left(\omega_0 + \frac{1}{2}\Delta\omega\right)t, \quad (22.4)$$

$a(t)$ 和 $b(t)$ 是缓慢变化的,就是说, $\dot{a}(t)$ 和 $\dot{b}(t)$ 是小量。把上式代入运动方程式(22.3)并利用三角学的积化和差公式,

$$\begin{aligned} & a \cos(2\omega_0 + \Delta\omega)t \cos\left(\omega_0 + \frac{1}{2}\Delta\omega\right)t \\ & - \frac{1}{2} a \cos 3\left(\omega_0 + \frac{1}{2}\Delta\omega\right)t + \frac{1}{2} a \cos\left(\omega_0 + \frac{1}{2}\Delta\omega\right)t, \\ & b \cos(2\omega_0 + \Delta\omega)t \sin\left(\omega_0 + \frac{1}{2}\Delta\omega\right)t \\ & - \frac{1}{2} b \sin 3\left(\omega_0 + \frac{1}{2}\Delta\omega\right)t - \frac{1}{2} b \sin\left(\omega_0 + \frac{1}{2}\Delta\omega\right)t, \end{aligned}$$

即得

$$\begin{aligned} & \left[\ddot{a} - a\omega_0\Delta\omega - a\left(\frac{1}{2}\Delta\omega\right)^2 + 2\dot{b}\omega_0 + \dot{b}\Delta\omega + \frac{1}{2}q\omega_0^2a \right] \\ & \times \cos\left(\omega_0 + \frac{1}{2}\Delta\omega\right)t + \left[\ddot{b} - b\omega_0\Delta\omega - b\left(\frac{1}{2}\Delta\omega\right)^2 \right. \\ & \left. - 2\dot{a}\omega_0 - \dot{a}\Delta\omega - \frac{1}{2}q\omega_0^2b \right] \sin\left(\omega_0 + \frac{1}{2}\Delta\omega\right)t \\ & + \frac{1}{2}q\omega_0^2a \cos 3\left(\omega_0 + \frac{1}{2}\Delta\omega\right)t + \frac{1}{2}q\omega_0^2b \sin 3 \\ & \times \left(\omega_0 + \frac{1}{2}\Delta\omega\right)t = 0. \end{aligned}$$

上式对任意时刻都成立,两个方括弧必须各自等于零,另外两项的系数也必须各自等于零。这里暂且不考虑角频率为 $3\left(\omega_0 + \frac{1}{2}\Delta\omega\right)$ 的振动,那就只要求两个方括弧各自等于零。在各个方括弧里保留一阶小量,略去 $\ddot{a}, \ddot{b}, (\Delta\omega)^2, \dot{a}\Delta\omega, \dot{b}\Delta\omega$ 等二阶小量,于是

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{2}q\omega_0 - \Delta\omega\right)a + 2\dot{b} = 0, \\ 2\dot{a} + \left(\frac{1}{2}q\omega_0 + \Delta\omega\right)b = 0. \end{cases}$$

求解这类常系数线性微分方程组的一般方法是令

$$a = a_0 e^{st}, \quad b = b_0 e^{st}.$$

把这两式代入微分方程组,得

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{2} q\omega_0 - \Delta\omega\right) a_0 + 2sb_0 = 0, \\ 2sa_0 + \left(\frac{1}{2} q\omega_0 + \Delta\omega\right) b_0 = 0. \end{cases}$$

我们要求这代数方程组有非零解,满足这个要求的条件是系数行列式为零,即

$$s^2 - \frac{1}{4} \left[\left(\frac{1}{2} q\omega_0\right)^2 - (\Delta\omega)^2 \right]. \quad (22.5)$$

参数共振指的是 $a = a_0 e^{st}$ 和 $b = b_0 e^{st}$ 随时间而增长。这样, s 应为正的实数。于是,从(22.5)得知发生参数共振的条件是

$|\Delta\omega| < \frac{1}{2} q\omega_0$ 。换句话说,要发生参数共振,角频率 Ω 必须在下列

列范围之内:

$$2\omega_0 - \frac{1}{2} q\omega_0 < \Omega < 2\omega_0 + \frac{1}{2} q\omega_0.$$

以上未计及阻力。我们已经知道与速度正比的阻力使 x 按 $e^{-\beta t}$ 衰减。这样, $a = a_0 e^{(s-\beta)t}$, $b = b_0 e^{(s-\beta)t}$ 随时间增长的条件是 $s > \beta$, (22.5) 应修改为

$$\frac{1}{4} \left[\left(\frac{1}{2} q\omega_0\right)^2 - (\Delta\omega)^2 \right] > \beta^2,$$

由此解得 $|\Delta\omega| < \sqrt{\left(\frac{1}{2} q\omega_0\right)^2 - 4\beta^2}$ 。换句话说,要发生参数共振,角频率 Ω 必须在下列范围之内:

$$2\omega_0 - \sqrt{\left(\frac{1}{2} q\omega_0\right)^2 - 4\beta^2} < \Omega < 2\omega_0 + \sqrt{\left(\frac{1}{2} q\omega_0\right)^2 - 4\beta^2}.$$

值得注意的是,如 $q < 4\beta/\omega_0$, 则 $\sqrt{\left(\frac{1}{2}q\omega_0\right)^2 - 4\beta^2}$ 为虚数,

这意味着根本不可能发生参数共振. 这样, 存在着 q 的一个阈值 $4\beta/\omega_0$, q 必须超过阈值, 才谈得上发生参数共振的可能性.

以上未考虑角频率为 $3\left(\omega_0 + \frac{1}{2}\Delta\omega\right)$ 的振动. 如果考虑角频率为 $3\left(\omega_0 + \frac{1}{2}\Delta\omega\right)$ 的振动, 在 (51.35) 的右边应包含 $\cos 3\left(\omega_0 + \frac{1}{2}\Delta\omega\right)t$ 的项与 $\sin 3\left(\omega_0 + \frac{1}{2}\Delta\omega\right)t$ 的项, 把这样修改过的 (22.4) 代入运动方程式 (22.3) 又会出现角频率为 $5\left(\omega_0 + \frac{1}{2}\Delta\omega\right)$ 的振动. 照此类推, 在 (22.4) 的右边可能包含角频率为 $\omega_0 + \frac{1}{2}\Delta\omega$ 的奇倍数的各种振动. 但这是高阶效应, 在一级近似中不妨略去.

其实, 参数共振不仅发生于 $\Omega \approx 2\omega_0$, 而且也发生于 $\Omega \approx 2\omega_0/n$ (n 为任意整数), 但是 $|\Delta\omega|$ 的范围按 q^* 变小, q 的阈值则按 β^* 增大.

应当指出, 参数共振跟通常的受迫振动的共振是不同的. 第一, 就通常的受迫振动的共振而论, 无阻尼系统在共振时, 其振幅无限增长; 实际的系统存在阻尼, 共振时, 振幅最终稳定在某个较大的数值. 就参数共振而论, 不管有无阻尼, 振幅都是无限增长. (当然, 振幅增长到较大数值后, 还应考虑可能的非线性性质.) 第二, 就通常的受迫振动的共振而论, 不管初始偏离和初始速度怎样, 振幅最终总是稳定在某个一定的数值. 就参数共振而论, 如初始偏离与初始速度严格地(而非近似地)为零, 偏离将始终保持为零. 如果本来秋千只是静止地悬垂着, 不管怎样站起蹲下, 都不可能离开悬垂位置. 这也就谈不上参数共振了.

第六章 刚体力学

刚体即形状不变的物体可以看作一个质点组，其中各质点间的距离保持不变。这也是一个理想化模型，严格意义上的刚体并不存在，但对许多实际物体来说，用刚体模型描述它们可以得到十分精确的结果。刚体所包括的范围很广，从分子到地球乃至星系，只要在所研究的问题中可以不计及形变均可视为刚体。本章着重讨论的是刚体定点运动。

§ 23. 刚体运动学

(1) 自由刚体的自由度

§ 7 讨论过刚体的几种运动形式的自由度。这里让我们对刚体的自由度进行一般的讨论。

刚体内各质点间距离保持不变，这是一种约束，而且是完整约束。设将刚体划分为 n (n 是一个很大的自然数) 个小部分，每个小部分各可看作是一个质点。其中第 i 个质点的位矢记作 r_i ，或用坐标 (x_i, y_i, z_i) 表示。这 n 个质点共有 $3n$ 个坐标。

但这些位矢或坐标并不独立，它们满足完整约束条件：

$$|r_i - r_j| = r_{ij} \text{ (常量)} \quad (i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, n),$$

即第 i 质点与第 j 质点之间的间距保持不变。扣除 $i = j$ 的情况，这样的方程共有 $n(n-1)/2$ 个。我们已说过， n 是很大的自然数，而对于大数 n ，二次式 $n(n-1)/2$ 必大于一次式 $3n$ 。坐标的个数 $3n$ 竟然少于它们所应满足的约束方程的数目！这是怎么回事呢？原来，这 $n(n-1)/2$ 个方程并非都是独立的。

那么，这些方程中究竟有多少个是独立的呢？

条件 $|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| = r_{ij}$ 不妨理解为编号在前的位矢 \mathbf{r}_i 对编号在后的位矢 \mathbf{r}_j 的限制, 其中 $j < i$.

(a) 对于 $i = 1$, 没有 $j < i$, 也就没有约束方程.

(b) 对于 $i = 2$, 只有一个 $j < i$ 即 $j = 1$, 所以有一个约束方程 $|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| = r_{21} (j = 1)$.

(c) 对于 $i = 3$, 有两个 $j < i$ 即 $j = 1, 2$. 有两个约束方程 $|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_j| = r_{3j} (j = 1, 2)$.

(d) 对于 $i = 4$, 有三个 $j < i$ 即 $j = 1, 2, 3$. 有三个约束方程 $|\mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_j| = r_{4j} (j = 1, 2, 3)$.

(e) 对于 $i = 5$, 有四个 $j < i$ 即 $j = 1, 2, 3, 4$. 但 \mathbf{r}_5 只有三个分量即 (x_5, y_5, z_5) , 所以四个约束方程 $|\mathbf{r}_5 - \mathbf{r}_j| = r_{5j} (j = 1, 2, 3, 4)$ 之中只可能有三个是独立的, 其余的一个必定可以从另三个导出, 否则就有矛盾. 而且这四个约束方程中一定有三个是独立的, 因为当 $n > 3$ 时, 每增加一个质点, 应保证该质点与其余三点距离不变, 而这三点既已确定则增加的质点位置自然是确定的.

(f) 对于 $i > 5$, 有 $i - 1$ 个 j , 所以有 $i - 1$ 个约束方程, 但其中只有且必定有三个方程是独立的(理由同上).

这样, 独立的约束方程数 $= 0 + 1 + 2 + 3(n - 3) = 3n - 6$, 从而刚体的自由度 $= 3n - (3n - 6) = 6$.

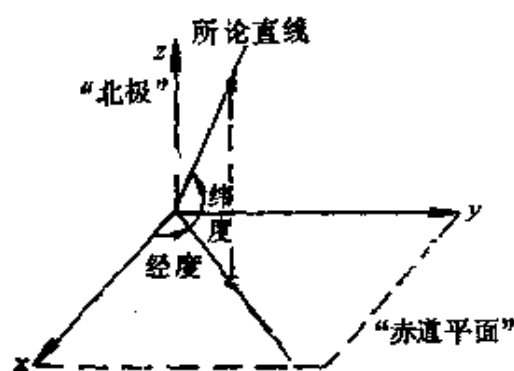


图 6-1

事实上, 为确定刚体在空间中的位置, 只要指出刚体中任选的一点 A 的位置以及刚体相对于该点的取向就行了. 为此目的而选定的刚体中的点叫作**基点**. 确定基点 A 的位置需要三个参数, 例如直角坐标 (x_A, y_A, z_A) . 为确定

刚体相对于基点的取向需要指出刚体中通过基点的某一直线的方

向，并指出刚体相对于这直线的方位。直线的方向可用方向余弦确定，方向余弦虽有三个，但其平方和等于一，所以只有两个是独立的。直线的方向还可以换个方式，用它的“经度”和“纬度”两个参数确定(图 6-1)。确定刚体相对于这直线的方位，只需一个参数，即绕该直线所转过的角度。这样，刚体具有三个平移自由度(确定基点位置)和三个转动自由度(刚体相对于基点的取向)。

不过，如果刚体受到某些限制，它的自由度就小于六。例如，限于平移的刚体只有三个平移自由度；限于平面平行运动的刚体只有两个平移自由度和一个转动自由度；限于定轴转动的刚体只有一个转动自由度。这是 § 7 已讨论过的。

(2) 刚体的运动

现在研究刚体位置的改变。在某个时刻 t ，刚体处于某种位置。过了一段时间，到了时刻 $t + \Delta t$ ，刚体处于另一位置。一般说来，基点的位置以及刚体相对于基点的取向都有所改变。因此，这种位置改变一般包括：刚体随基点 A 平移(在平移过程中，刚体相对于基点的取向保持不变，刚体的位移即基点的位移 Δr_A)，以及保持基点不动而刚体改变其相对于基点的取向。这样，刚体的位置改变可以分解为随基点平移并绕基点作定点运动。

可以证明，定点运动是一种转动，转动轴通过该定点。

证明如下。以定点 O 为球心作一球面(图 6-2)，球面上任意两点 A 和 B 的位置一经决定，和定点 O 一起，刚体的位置就确定了。当刚体位置有改变时， A 和 B 分别变到 A' 和 B' 。既然任意两点间的距离不变， A' 和 B' 必仍在同一个球面上。作大圆联结 A 与 A' ，作大圆联结 B 与 B' ，分别作垂直平分 $\widehat{AA'}$ 和 $\widehat{BB'}$ 的大圆。后两者相交于点 Q 。试看球面三角形 QAB 与 $QA'B'$ 。这两个球面三角形三边分别相等 ($\widehat{AB} = \widehat{A'B'}$ 是由

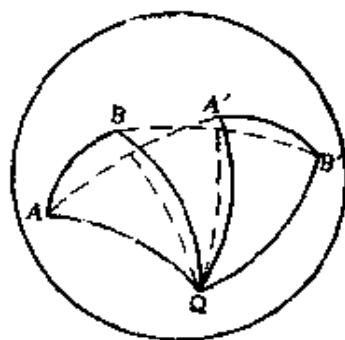


图 6-2

是由 $\widehat{AB} = \widehat{A'B'}$ 是由

于刚体的任意两点间的距离不变, $\widehat{A\Omega} = \widehat{A'\Omega}$ 是因为 Ω 在 $\widehat{AA'}$ 的垂直平分大圆上, 同理, $\widehat{B\Omega} = \widehat{B'\Omega}$, 因而是全图形. 这样, $\angle A\Omega B = \angle A'\Omega B'$. 这式两边同加上 $\angle B\Omega A'$, 就给出

$$\angle A\Omega A' = \angle B\Omega B',$$

就是说, 以直线 $O\Omega$ 为轴, 转动角度 $\angle A\Omega A'$ 把 A 移到 A' , 同时也就把 B 移到 B' . 换句话说, 点 O 固定的刚体的运动是以 $O\Omega$ 为轴的转动.

这就是**欧拉定理**: 定点运动刚体的任何一个位置移动都可以通过绕着此定点的某一轴旋转一个角度达到. 由此可以推论, 定点运动刚体的连续运动是它依次作一系列转动角为无穷小的转动的结果. 因此, 定点运动也可以称为定点转动. 注意, 定点转动的转动轴一般并非一成不变的. 如果转动轴保持不变, 那就成为读者所熟悉的定轴转动了.

为表明刚体在定点转动中的位置改变, 通常在转动轴上画一箭号, 其长度等于刚体所转过的角度 $\Delta\varphi$, 其指向与刚体的转向成右手螺旋关系. 这种箭号叫作**角位移**.

值得注意的是两个角位移的相加次序不可交换. 例如在图 6-3 与图 6-4 中, 刚体的初始位形相同, 但是图 6-3 中的刚体先绕

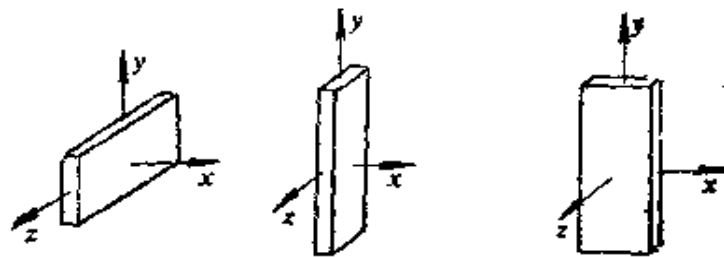


图 6-3

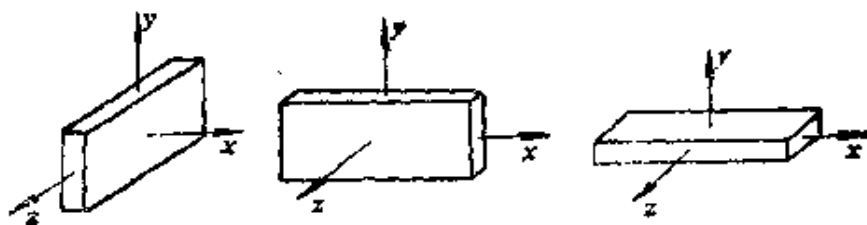


图 6-4

x 轴转 $\pi/2$ ，再绕 y 轴转 $\pi/2$ ，而图 6-4 中的刚体则先绕 y 轴转 $\pi/2$ ，再绕 x 轴转 $\pi/2$ 。比较图 6-3 和图 6-4，可见刚体的终末位形完全不同！

既然角位移的相加次序不可交换，显然根本谈不上按平行四边形法则“相加”。可见，角位移虽然既有大小又有方向，但并不遵守平行四边形相加法则，所以它不是矢量。

以上研究的是从 t 到 $t + \Delta t$ 的一段时间里刚体位置的改变。现在令 $\Delta t \rightarrow 0$ 以研究刚体位置改变的快慢。显然，这时刚体随某基点 A 平移的速度将是 $v_A = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\Delta r_A / \Delta t)$ ，刚体绕基点

转动的轴线当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时必定也趋于某个极限位置，叫作刚体在时刻 t 的**即时转动轴(或瞬时转轴)**。刚体绕即时转动轴的角速度可定义为 $\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\Delta \varphi / \Delta t)$ 。通常在即时转动轴上画一箭号，其

长度等于角速度 ω ，其指向则与刚体的转向成右手螺旋关系。下面我们将证明它是矢量，因而把它叫作**角速度矢量**，记作 ω 。在不致引起混淆的情况下，“角速度矢量”中的“矢量”二字常可省略不讲。

(3) 刚体内各点的运动

我们已经从整体上描述了刚体的运动。至于刚体内各点的运动，一般说来，是各不相同的。

取上述刚体内任意一点，例如点 P 。既然整个刚体随着基点 A 以速度 v_A 平移，点 P 当然也就具有 v_A 这一速度。另外，刚体以角速度 ω 绕基点 A 转动，点 P 还具有环绕即时转动轴的速度 $R\omega$ ， R 是点 P 与即时转动轴的垂直距离(图 6-5)。读者不难验证，点 P 环绕即时转动轴的速度可表为 $\omega \times (r_P - r_A)$ 。这样，点 P 的速度

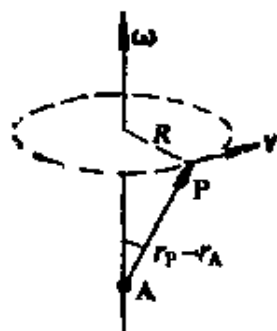


图 6-5

$$v_P = v_A + \omega \times (r_P - r_A). \quad (23.1)$$

对时间 t 微分, 即得点 P 的加速度

$$\begin{aligned} a_P &= a_A + \dot{\omega} \times (r_P - r_A) + \omega \times (v_P - v_A) \\ &= a_A + \dot{\omega} \times (r_P - r_A) + \omega \times [\omega \times (r_P - r_A)]. \end{aligned} \quad (23.2)$$

上式右边的三项分别是: 刚体整体随基点 A 平移的加速度, 刚体绕基点转动的角速度 ω 的变化(这既包括 ω 的大小变化, 也包括 ω 的指向变化, 而 ω 的指向变化实际上就是即时转动轴线的变化)所导致的“切向”加速度, 以及刚体绕即时转动轴线转动所导致的“向心”加速度。

(4) 基点的选取

基点本是任意选取的。完全可以改取另一点 B 作为基点。按照 (23.1), 点 B 的速度是

$$v_B = v_A + \omega \times (r_B - r_A). \quad (23.3)$$

从(23.1)减去(23.3), 得

$$v_P - v_B = \omega \times [(r_P - r_A) - (r_B - r_A)],$$

即
$$v_P = v_B + \omega \times (r_P - r_B). \quad (23.4)$$

拿(23.4)跟(23.1)比较, 立刻可以看出, (23.4)正是刚体内任一点 P 以点 B 为基点的速度表示式。

从(23.4)与(23.1)的比较还可看出, 不管以 A 或 B 为基点, 角速度 ω 都是相同的。

这里, 不妨把刚体的运动总结如下: 刚体的运动可归结为随任选的基点平移并绕该基点作定点转动。刚体的平移速度即基点的速度, 它取决于基点的选择。刚体转动的角速度 ω (它包括即时转动轴的指向以及刚体绕即时转动轴的转速) 则与基点的选取无关。

(5) 角速度矢量

现在证明角速度是按平行四边形法则相加的。

事实上,如果刚体绕基点 A 作定点转动,同时具有角速度 ω_1 与角速度 ω_2 ,则刚体内任一点 P 就同时具有速度 $v_A, \omega_1 \times (r_P - r_A)$ 与 $\omega_2 \times (r_P - r_A)$ 。大家都知道速度是矢量,可按平行四边形法则相加,所以点 P 的速度

$$v_P = v_A + \omega_1 \times (r_P - r_A) + \omega_2 \times (r_P - r_A).$$

根据矢量叉乘的分配律,上式可以化为

$$v_P = v_A + (\omega_1 + \omega_2) \times (r_P - r_A). \quad (23.5)$$

拿(23.5)与(23.1)比较就知道,这时刚体内的任一点可以看成是随基点 A 平动,并同时以角速度 $\omega_1 + \omega_2$ 围绕通过基点 A 的即时转动轴转动;即刚体是随基点 A 平动并以角速度 $\omega = \omega_1 + \omega_2$ 绕即时轴转动,这就是说,角速度按平行四边形法则相加。

角速度既有大小又有方向,并且遵守平行四边形相加法则,所以角速度是矢量。

(6) 转动的矩阵表述

用矩阵来表述转动是一个很好的方法。

设刚体绕方向余弦为 α, β, γ 的轴线转过角 ϕ 。这轴线上的单位矢量 $n = \alpha i + \beta j + \gamma k$,而角位移则是箭号 ϕn (图 6-6)。

位矢为 r 的质点,经此转动,位矢变为 r' 。我们要用 r 和 ϕn 表出 r' 。

r 在转轴上的投影矢量是 $(r \cdot n)n$,这个投影矢量在转动中是不变的。

r 在垂直于转轴的平面上的投影矢量是 $r - (r \cdot n)n$,这个投影矢量在转动中将要改变。转动后的这个投影矢量可表为 $[r - (r \cdot n)n] \cos \phi + (n \times r) \sin \phi$,其中 $n \times r$ 是在垂直于转轴的平面上而又跟 $r - (r \cdot n)n$ 垂直的,转动后的投影矢量就夹在它们两者之间。

由此可见,位矢原为 r 的质点,其位矢变为

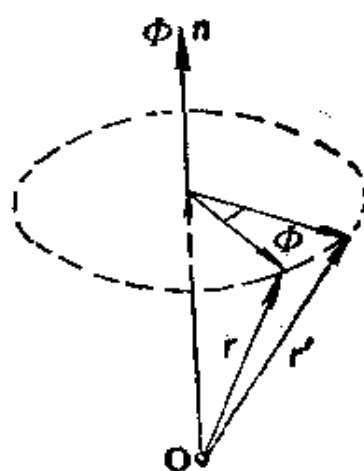


图 6-6

$$\boldsymbol{r}' = (\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n})\boldsymbol{n} + [\boldsymbol{r} - (\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n})\boldsymbol{n}] \cos \Phi + (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{r}) \sin \Phi, \quad (23.6)$$

这个矢量公式,改用矩阵形式表出,就是

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad (23.7)$$

其中

$$a_{11} = \cos^2 \frac{\Phi}{2} + (\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2) \sin^2 \frac{\Phi}{2},$$

$$a_{12} = 2 \sin \frac{\Phi}{2} \left(\alpha\beta \sin \frac{\Phi}{2} - \gamma \cos \frac{\Phi}{2} \right),$$

$$a_{13} = 2 \sin \frac{\Phi}{2} \left(\alpha\gamma \sin \frac{\Phi}{2} + \beta \cos \frac{\Phi}{2} \right),$$

$$a_{21} = 2 \sin \frac{\Phi}{2} \left(\alpha\beta \sin \frac{\Phi}{2} + \gamma \cos \frac{\Phi}{2} \right),$$

$$a_{22} = \cos^2 \frac{\Phi}{2} + (\beta^2 - \gamma^2 - \alpha^2) \sin^2 \frac{\Phi}{2},$$

$$a_{23} = 2 \sin \frac{\Phi}{2} \left(\beta\gamma \sin \frac{\Phi}{2} - \alpha \cos \frac{\Phi}{2} \right),$$

$$a_{31} = 2 \sin \frac{\Phi}{2} \left(\alpha\gamma \sin \frac{\Phi}{2} - \beta \cos \frac{\Phi}{2} \right),$$

$$a_{32} = 2 \sin \frac{\Phi}{2} \left(\beta\gamma \sin \frac{\Phi}{2} + \alpha \cos \frac{\Phi}{2} \right),$$

$$a_{33} = \cos^2 \frac{\Phi}{2} + (\gamma^2 - \alpha^2 - \beta^2) \sin^2 \frac{\Phi}{2}.$$

变换式(23.7)也往往缩写为

$$\boldsymbol{r}' = A\boldsymbol{r}, \quad (23.8)$$

其中 \boldsymbol{r} 和 \boldsymbol{r}' 分别是(23.7)左右两边的列矩阵, A 是(23.7)的那个三行三列矩阵.

这样,刚体的转动就表为线性变换,其变换矩阵 A 是正交矩阵,所谓“正交”的意思是说任意两行或任意两列都正交,即

$$a_{i1}a_{j1} + a_{i2}a_{j2} + a_{i3}a_{j3} = 0 \quad (i \neq j),$$

$$a_{1i}a_{1j} + a_{2i}a_{2j} + a_{3i}a_{3j} = 0 \quad (i \neq j).$$

另外,每一行或每一列还是归一化的,即

$$a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + a_{i3}^2 = 1 \quad (i = 1, 2, 3),$$

$$a_{ii}^2 + a_{ji}^2 + a_{ki}^2 = 1 \quad (i = 1, 2, 3).$$

已知角位移 Φn , (23.7) 给出相应的正交变换. 反过来说, 已知正交变换, 也可以求出相应的角位移. 事实上, 仔细观察 $a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots$ 的表达式, 就可看出

$$\cos \frac{\Phi}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{a_{11} + a_{22} + a_{33} + 1}, \quad (23.9)$$

$$\alpha = \frac{a_{22} - a_{33}}{2 \sin \Phi}, \quad \beta = \frac{a_{13} - a_{31}}{2 \sin \Phi}, \quad \gamma = \frac{a_{21} - a_{12}}{2 \sin \Phi}. \quad (23.10)$$

如果刚体先后进行两次转动, 与这两次角位移对应的变换矩阵分别是 A_1 和 A_2 , 则总的变换是

$$r' = A_2 A_1 r.$$

如果交换这两次角位移的先后顺序, 则总的变换是

$$r' = A_1 A_2 r.$$

矩阵乘法一般不遵从交换律, $A_2 A_1 r$ 一般不同于 $A_1 A_2 r$. 这说明角位移先后次序一般不可交换, 所以角位移不可能是矢量.

对于无限小的转动角 $d\Phi$, 变换矩阵 A 的各元素可以取一级近似 (23.7) 简化为

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\gamma d\Phi & \beta d\Phi \\ \gamma d\Phi & 1 & -\alpha d\Phi \\ -\beta d\Phi & \alpha d\Phi & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (23.11)$$

容易看出, 这只不过是 $r' = r + (\alpha d\Phi i + \beta d\Phi j + \gamma d\Phi k) \times r$ 的另一写法, 亦即

$$dr = (\alpha d\Phi i + \beta d\Phi j + \gamma d\Phi k) \times r.$$

如果先进行无限小角位移 $\alpha_1 d\Phi_1 i + \beta_1 d\Phi_1 j + \gamma_1 d\Phi_1 k$ 的转动, 再进行无限小角位移 $\alpha_2 d\Phi_2 i + \beta_2 d\Phi_2 j + \gamma_2 d\Phi_2 k$ 的转动, 则

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & -\gamma_2 d\Phi_2 & \beta_2 d\Phi_2 \\ \gamma_2 d\Phi_2 & 1 & -\alpha_2 d\Phi_2 \\ -\beta_2 d\Phi_2 & \alpha_2 d\Phi_2 & 1 \end{bmatrix} \\ &\cdot \begin{bmatrix} 1 & -\gamma_1 d\Phi_1 & \beta_1 d\Phi_1 \\ \gamma_1 d\Phi_1 & 1 & -\alpha_1 d\Phi_1 \\ -\beta_1 d\Phi_1 & \alpha_1 d\Phi_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

不难验证, 在一级近似下, 上式即

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\gamma_1 d\Phi_1 - \gamma_2 d\Phi_2 & \beta_1 d\Phi_1 + \beta_2 d\Phi_2 \\ \gamma_1 d\Phi_1 + \gamma_2 d\Phi_2 & 1 & -\alpha_1 d\Phi_1 - \alpha_2 d\Phi_2 \\ -\beta_1 d\Phi_1 - \beta_2 d\Phi_2 & \alpha_1 d\Phi_1 + \alpha_2 d\Phi_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

交换这两个无限小角位移的先后次序,仍得同一结果。这个总的效果仍然是一个转动,其角位移为 $(\alpha_1 d\Phi_1 + \alpha_2 d\Phi_2)i + (\beta_1 d\Phi_1 + \beta_2 d\Phi_2)j + (\gamma_1 d\Phi_1 + \gamma_2 d\Phi_2)k$ 。这是符合平行四边形法则的。因此,无限小角位移是矢量。

将(23.11)除以 dt ,并令 $dt \rightarrow 0$,取极限即得

$$\begin{bmatrix} \dot{x}' \\ \dot{y}' \\ \dot{z}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\gamma}\phi & \dot{\beta}\phi \\ \dot{\gamma}\phi & 0 & -\dot{\alpha}\phi \\ -\dot{\beta}\phi & \dot{\alpha}\phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (23.12)$$

容易看出,这正是

$$\dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

的另一种写法,其中 $\boldsymbol{\omega} = \dot{\phi}\alpha i + \dot{\phi}\beta j + \dot{\phi}\gamma k$ 正是角速度。既然无限小角位移是矢量,角速度当然也是矢量。

(7) 欧拉角

前面,我们讨论了刚体内各点的速度、加速度与刚体基点的速度、加速度及刚体的角速度、角加速度之间的关系。为了以后讨论刚体动力学的需要,我们还要建立角速度与广义坐标及广义速度之间的关系。

自由刚体的广义坐标有六个,其中基点 O 的三个直角坐标可以充当六个广义坐标中的三个;在基点 O 位置被确定以后,刚体只能以 O 为固定点作定点转动,所以另外三个广义坐标是用来描述刚体取向的,通常用三个称为欧拉角的角度来充当这三个广义坐标:

为描述刚体相对于基点 O 的取向,可引入两个坐标系,取基点 O 为这两个坐标系的共同原点。一个固定在空间叫作**空间坐标系**,另一个固定在刚体上叫作**本体坐标系**,用本体坐标系相对于空间坐标系的取向来表明刚体的取向。

参看图 6-7。为便于论述起见,我们把空间坐标系 $Oxyz$ 的

xy 平面叫作“赤道平面”， z 轴作为指向“北极”的极轴。 $Ox'_1x'_2x'_3$ 则是本体坐标系，刚体在空间中的指向就由本体坐标系的指向表明，具体地说，由 x'_3 轴的指向以及 $x'_1x'_2$ 平面相对于 x'_3 轴的方位角表明。

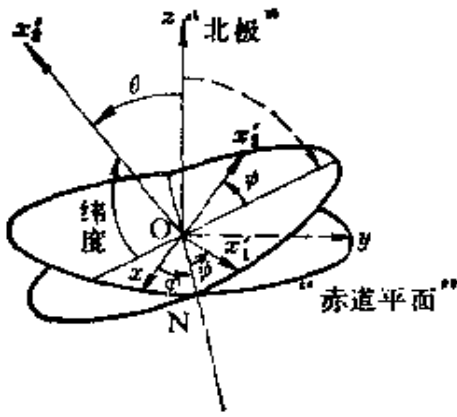


图 6-7

设想 $Ox'_1x'_2x'_3$ 原来重合于 $Oxyz$ ，然后让它绕 z 轴转 φ 角(图 6-8(a))，接着绕节线 ON 转 θ 角(图 6-8(b))，最后绕 x'_3 轴转 ψ 角，就得到图 6-7 的本体坐标系。这样， x'_3 轴的取向就由角 θ 和 φ 确定， $x'_1x'_2$ 平面相对于 x'_3 轴的方位角则由 ψ 表示。在图 6-7 上， x'_3 轴的“纬度”是指 x'_3 轴与(它在)赤道平面(上的投影)的夹角，它又等于 z 轴与 $x'_1x'_2$ 平面的夹角，所以角 $\theta = \pi/2 - \text{“}x'_3 \text{ 轴的纬度”} = x'_3 \text{ 轴的余纬度}$ ，因为节线垂直于 $x'_1x'_2$ 平面，经度由赤道平面内的 x 轴向右计算，故角 $\varphi = \text{“}x'_3 \text{ 轴的经度”} = \text{“}x \text{ 轴的经度”} + \pi/2$ 。

在图 6-7 上， x'_3 轴的“纬度”是指 x'_3 轴与(它在)赤道平面(上的投影)的夹角，它又等于 z 轴与 $x'_1x'_2$ 平面的夹角，所以角 $\theta = \pi/2 - \text{“}x'_3 \text{ 轴的纬度”} = x'_3 \text{ 轴的余纬度}$ ，因为节线垂直于 $x'_1x'_2$ 平面，经度由赤道平面内的 x 轴向右计算，故角 $\varphi = \text{“}x'_3 \text{ 轴的经度”} = \text{“}x \text{ 轴的经度”} + \pi/2$ 。

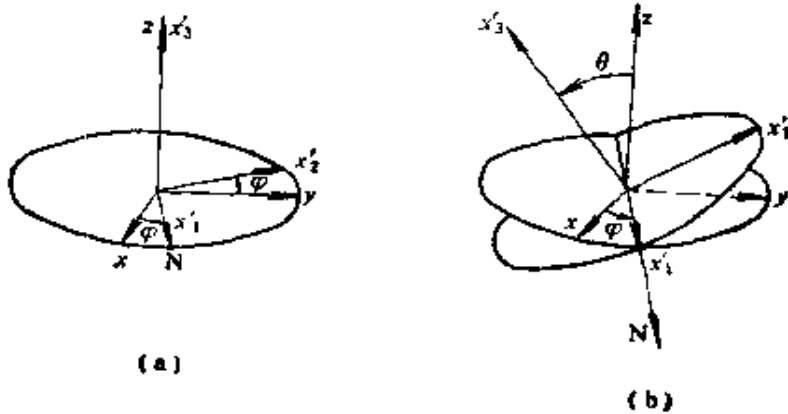


图 6-8

θ 称为章动角， φ 称为旋进角， ψ 称为自转角，统称为欧拉角。它们是确定刚体在空间中取向的三个广义坐标。

当然,还有各种各样的办法可用来确定刚体在空间的取向,例如,可以采用 x'_1 轴、 x'_2 轴和 x'_3 轴的方向余弦,共计九个参数。由于存在六个条件(每根轴的方向余弦平方和等于 1,三根轴彼此正交),实际上只有三个参数是独立的。采用九个不完全独立的参数当然不如采用三个独立的欧拉角来得方便。

刚体里的质点的空间坐标 (x, y, z) 和本体坐标 (x'_1, x'_2, x'_3) 之间的变换关系可以按照(23.7)求得。质点的本体坐标是不变的,而且就重合于原来的空间坐标。所以,问题实际上是求刚体转动后的质点空间坐标 (x, y, z) 与刚体转动前的质点空间坐标 (x'_1, x'_2, x'_3) 之间的关系。

首先,对应于角位移 φk 的变换矩阵是

$$A_\varphi = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

其次,对应于角位移 θn 的变换矩阵,在图 6-8(a)的 $Ox_1x_2x_3$ 坐标系中是

$$A_\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

但既然这不是空间坐标系中的表达式,我们不能直接引用。为引用这个 A_θ , 必须先把质点的空间坐标变换为图 6-8(a)的 $Ox'_1x'_2x'_3$ 坐标系中的坐标,这相当于坐标系不变而对质点施行角位移为 $-\varphi k$ 的转动。与此相应的变换矩阵是 A_φ 的逆矩阵 A_φ^{-1} 。这时才可引用 A_θ 。引用过 A_θ 之后,仍然要把质点的坐标变换回空间坐标,与此相应的变换矩阵又是 A_φ 。总起来说,对应于角位移 θn 的变换矩阵,在空间坐标系中是 $A_\varphi A_\theta A_\varphi^{-1}$ 。

最后,对应于角位移 ψk 的变换矩阵,在图 6-8(b)的 $Ox_1x_2x_3$ 坐标系中是

$$A_\psi = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

这同样不能直接引用。仿照上面的讨论,在空间坐标系中,对应的变换矩阵是 $(A_\psi A_\varphi) A_\theta (A_\varphi^{-1} A_\psi^{-1})$ 。

综合起来,

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &= (A_\varphi A_\theta A_\psi A_\varphi^{-1} A_\theta^{-1} A_\psi^{-1}) (A_\varphi A_\theta A_\psi^{-1}) A_\varphi \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = A_\varphi A_\theta A_\psi \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \cos \theta \sin \psi \\ \sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \cos \theta \sin \psi \\ \sin \theta \sin \psi \\ -\cos \varphi \sin \psi - \sin \varphi \cos \theta \cos \psi & \sin \varphi \sin \theta \\ -\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \theta \cos \psi & -\cos \varphi \sin \theta \\ \sin \theta \cos \psi & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{23.13}$$

逆变换矩阵显然应是 $A_{-\varphi} A_{-\theta} A_{-\psi}$, 即

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \cos \theta \sin \psi \\ -\cos \varphi \sin \psi - \sin \varphi \cos \theta \cos \psi \\ \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \cos \theta \sin \psi & \sin \theta \sin \psi \\ -\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \theta \cos \psi & \sin \theta \cos \psi \\ -\cos \varphi \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{23.14}$$

(23.14)的变换矩阵正是(23.13)的变换矩阵的转置矩阵(“转置”是说行成了列,而列成了行)。其实,这是预料之中的,因为正交矩阵的逆矩阵总是等于其转置矩阵的。

根据(23.9)和(23.10),用欧拉角 φ, θ, ψ 描述的变换(23.13),其总效果可以归结为单个角位移 $\Phi(\alpha i + \beta j + \gamma k)$, 其中

$$\begin{cases} \Phi = 2 \cos^{-1} \left[\cos \frac{\varphi + \psi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \right], & \alpha \sin \frac{\Phi}{2} = -\cos \frac{\varphi - \psi}{2} \sin \frac{\theta}{2}, \\ \beta \sin \frac{\Phi}{2} = \sin \frac{\varphi - \psi}{2} \sin \frac{\theta}{2}, & \gamma \sin \frac{\Phi}{2} = -\sin \frac{\varphi + \psi}{2} \sin \frac{\theta}{2}. \end{cases} \tag{23.15}$$

刚体在空间中转动的角速度 ω 也可用欧拉角的时间变化率(广义速度)表出。分别以 k, k' 和 n 表示 Oz, Ox'_1 和 ON 方向的单位矢量,本体坐标系是由空间坐标系相继作三次转动而形成,三次转动的角速度为 $\dot{\varphi}k, \dot{\theta}n$ 和 $\dot{\psi}k'$ 。根据角速度的矢量合成法

则,当定点运动刚体相对于空间坐标系 $Oxyz$ 的欧拉角是 φ 、 θ 和 ψ 时,它对这个坐标系的角速度是

$$\omega = \dot{\varphi}\mathbf{k} + \dot{\theta}\mathbf{n} + \dot{\psi}\mathbf{k}'. \quad (23.16)$$

以 \mathbf{i}' 和 \mathbf{j}' 表示本体坐标系中 Ox_1' 和 Ox_2' 方向的单位矢量,容易看出 \mathbf{k} 和 \mathbf{n} 在本体坐标系 $Ox_1'x_2'x_3'$ 中的分量式为

$$\mathbf{k} = \sin\theta \sin\psi \mathbf{i}' + \sin\theta \cos\psi \mathbf{j}' + \cos\theta \mathbf{k}', \quad (23.17)$$

$$\mathbf{n} = \cos\psi \mathbf{i}' - \sin\psi \mathbf{j}'. \quad (23.18)$$

把(23.17)和(23.18)代入(23.16),并把 ω 的表达式整理成 $\omega = \omega_1\mathbf{i}' + \omega_2\mathbf{j}' + \omega_3\mathbf{k}'$ 的形式,就得到角速度在本体坐标系中的分量是

$$\begin{cases} \omega_1 = \dot{\theta} \cos\psi + 0 + \dot{\varphi} \sin\theta \sin\psi, \\ \omega_2 = -\dot{\theta} \sin\psi + 0 + \dot{\varphi} \sin\theta \cos\psi, \\ \omega_3 = 0 + \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos\theta. \end{cases} \quad (23.19)$$

注意: 本书用下标1,2,3来强调本体坐标系中的矢量分解。

这就是用广义坐标 φ 、 θ 和 ψ 以及广义速度 $\dot{\varphi}$ 、 $\dot{\theta}$ 和 $\dot{\psi}$ 表示的角速度在本体坐标系中的分量式,称为**欧拉运动学方程**。当然,我们也可以写出角速度在其它坐标系(例如空间坐标系)中的分量式,但是,在其它坐标系中,刚体上各点的坐标随时间而变,从而惯量张量(在刚体动力学中十分重要的一个张量,见后)随时间而变,这与本体坐标系中刚体上各点的坐标不随时间变化(从而惯量张量不变)相比,无疑要复杂得多,所以角速度在其它坐标系中的分量表示比较少用。

读者不难把(23.19)翻转过来,用 ω 表出欧拉角的时间变化率:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \omega_1 \cos\psi - \omega_2 \sin\psi, \\ \dot{\varphi} = \omega_1 \csc\theta \sin\psi + \omega_2 \csc\theta \cos\psi, \\ \dot{\psi} = -\omega_1 \cot\theta \sin\psi - \omega_2 \cot\theta \cos\psi + \omega_3. \end{cases} \quad (23.20)$$

欧拉运动学方程(23.19)也可用矩阵方法导出:如(23.16)所指出, ω 由 $\dot{\varphi}\mathbf{k}$ 、 $\dot{\theta}\mathbf{n}$ 和 $\dot{\psi}\mathbf{k}'$ 组成,其中 $\dot{\psi}\mathbf{k}'$ 在本体坐标系中的分量是 $(0,0,\dot{\psi})$,但对于 $\dot{\varphi}\mathbf{k}$,只知道它在空间坐标系中的分量是 $(0,0,\dot{\varphi})$,还需要把它变换到本

体坐标系。这相当于坐标系不变而对矢量 $\dot{\varphi}k$ 施行转动 $A_{-\varphi}A_{-\theta}A_{\varphi}$ 。这样， $\dot{\varphi}k$ 在体坐标系中成为

$$A_{-\varphi}A_{-\theta}A_{\varphi} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = A_{-\varphi}A_{-\theta} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \sin \theta \sin \varphi \\ \dot{\varphi} \sin \theta \cos \varphi \\ \dot{\varphi} \cos \theta \end{bmatrix}.$$

同理， $\dot{\theta}n$ 在体坐标系中成为

$$A_{-\varphi}A_{-\theta} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = A_{-\varphi} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \cos \varphi \\ -\dot{\theta} \sin \varphi \\ 0 \end{bmatrix}.$$

这样， ω 在体坐标系中的表达式是

$$\omega = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \sin \theta \sin \varphi \\ \dot{\varphi} \sin \theta \cos \varphi \\ \dot{\varphi} \cos \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\theta} \cos \varphi \\ -\dot{\theta} \sin \varphi \\ 0 \end{bmatrix}.$$

这正是(23.19)。

我们还可以求得 ω 在空间坐标系中的表达式：

$$\omega = A_{-\varphi}A_{-\theta} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} + A_{-\varphi} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi \\ \dot{\varphi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi \\ \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\varphi} \end{bmatrix}.$$

§ 24. 刚体动力学

(1) 刚体的角动量和动能

为了计算方便，暂且把刚体看作由分立的质点组成。

首先考虑定点运动刚体的角动量。取此定点 O 为原点，刚体的角动量是各质点角动量之和， $L = \sum_i r_i \times m_i v_i$ 。考虑到 $v_i = \omega \times r_i$ ，

$$\begin{aligned} L &= \sum_i m_i r_i \times (\omega \times r_i) = \sum_i m_i [r_i^2 \omega - (r_i \cdot \omega) r_i] \\ &= \sum_i m_i [(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)(\omega_x i + \omega_y j + \omega_z k) \end{aligned}$$

$$- (x_i \omega_x + y_i \omega_y + z_i \omega_z)(x_i \mathbf{i} + y_i \mathbf{j} + z_i \mathbf{k})]$$

由此立即得到 L 的分量式

$$\begin{cases} L_x = I_{11}\omega_x - I_{12}\omega_y - I_{13}\omega_z, \\ L_y = -I_{21}\omega_x + I_{22}\omega_y - I_{23}\omega_z, \\ L_z = -I_{31}\omega_x - I_{32}\omega_y + I_{33}\omega_z, \end{cases} \quad (24.1)$$

其中

$$I_{11} = \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2), \quad I_{22} = \sum_i m_i (z_i^2 + x_i^2),$$

$$I_{33} = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

分别是刚体对于 x 轴、 y 轴和 z 轴的转动惯量；

$$I_{12} = I_{21} = \sum_i m_i x_i y_i, \quad I_{13} = I_{31} = \sum_i m_i x_i z_i,$$

$$I_{23} = I_{32} = \sum_i m_i y_i z_i$$

则叫作惯量积。这九个系数组成对点 O 的所谓**惯量张量**，把这九个元素排成三行三列矩阵

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_{11} & -I_{12} & -I_{13} \\ -I_{21} & I_{22} & -I_{23} \\ -I_{31} & -I_{32} & I_{33} \end{bmatrix}, \quad (24.2)$$

并把角动量的三个分量和角速度的三个分量写成列矩阵

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}, \quad (24.3)$$

就可以把(24.3)改写成简洁的矩阵关系式

$$\mathbf{L} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}, \quad (24.4)$$

其次，考虑定点运动刚体的动能，它是各质点动能之和，

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2 \quad (24.5)$$

以 $\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i$ 代入(24.5), 得

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [m_i \boldsymbol{v}_i \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i)] \\ &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \sum_{i=1}^n (\boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i) \\ &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{L} \end{aligned} \quad (24.6)$$

定点运动刚体的动能等于其角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 和刚体对定点的角动量 \boldsymbol{L} 标积之半. (24.6)也可写成

$$T = \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\omega}} \boldsymbol{I} \boldsymbol{\omega} \quad (24.7)$$

其中 $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ 是 $\boldsymbol{\omega}$ 的转置矩阵.

现在, 我们考虑刚体一般运动的动能. 根据(23.1), 可将刚体内第 i 质点的速度 \boldsymbol{v}_i 表为

$$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i, \quad (24.8)$$

其中 \boldsymbol{v}_0 为基点 O 的速度, \boldsymbol{r}_i 是 i 点相对于 O 点的位矢. 于是动能

$$\begin{aligned} T &= \sum_i \frac{1}{2} m_i \boldsymbol{v}_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i)^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_i m_i \right) \boldsymbol{v}_0^2 + \sum_i m_i \boldsymbol{v}_0 \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i) \\ &\quad + \sum_i \frac{1}{2} m_i (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i)^2 \\ &= \frac{1}{2} m \boldsymbol{v}_0^2 + (\boldsymbol{v}_0 \times \boldsymbol{\omega}) \cdot \sum_i m_i \boldsymbol{r}_i + \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\omega}} \boldsymbol{I} \boldsymbol{\omega}. \end{aligned} \quad (24.9)$$

其中第二项在选取质心为基点时为零 (因为 $\sum m_i \boldsymbol{r}_i = 0$). 此

外, 如果 $\boldsymbol{\omega}$ 平行于 \boldsymbol{v}_0 或 $\boldsymbol{v}_0 = 0$, 此项也为零. 而第一项为平移动能, 其形式和全部质量集中在基点时的形式相同. 第三项是以

角速度 ω 绕通过基点的轴转动的转动动能。

这样，刚体的动能可分解为刚体质心的平移动能和刚体绕质心的转动动能两项之和。注意，不能说刚体的动能是全部质量集中在基点的平移动能与绕基点转动动能之和，因为(24.9)式中第二项一般不为零。

以上应用了分立质点的刚体模型来计算惯量张量的矩阵元。对于连续的刚体，应把求和换成积分，即

$$\begin{aligned} I_{11} &= \int (y^2 + z^2) dm, \quad I_{22} = \int (z^2 + x^2) dm, \quad I_{33} = \int (x^2 + y^2) dm, \\ I_{12} &= I_{21} = - \int xy dm, \quad I_{13} = I_{31} = - \int xz dm, \quad I_{23} = I_{32} = - \int yz dm. \end{aligned} \quad (24.10)$$

(2) 惯量张量 惯量椭球

回到(24.2)，惯量张量的矩阵表示是

$$I = \begin{bmatrix} I_{11} & -I_{12} & -I_{13} \\ -I_{21} & I_{22} & -I_{23} \\ -I_{31} & -I_{32} & I_{33} \end{bmatrix}.$$

这个矩阵的各个元素的定义中都含有刚体质点的坐标。因此，矩阵元的值跟采用的坐标系有关。不仅如此，除非采用本体坐标系，否则，在刚体转动过程中，矩阵元的值也要变。对于本体坐标系，刚体的质点的坐标不变，惯量张量的各元素的值不变。在各种本体坐标系之中，有一种主轴坐标系尤其重要，介绍如下。

惯量张量的矩阵是实对称矩阵，即每一元素都是实数，且行与列对换并不改变矩阵。从线性代数知道，适当地转动坐标系，总可以使实对称矩阵对角化（不在对角线上的元素都等于零，参看本节例题）。使惯量张量对角化的坐标系的三根互相垂直的坐标轴叫作**惯量主轴**，这坐标系 $Ox_1x_2x_3$ 叫作**主轴坐标系**。在主轴坐标系中，惯量张量对角化为

$$\begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix},$$

I_1, I_2 和 I_3 分别是对三根惯量主轴的转动惯量, 叫作主转动惯量. 于是, (24.1) 简化为

$$L_1 = I_1 \omega_1, L_2 = I_2 \omega_2, L_3 = I_3 \omega_3. \quad (24.11)$$

如果角速度 ω 沿某一惯量主轴, 譬如沿 x_1 轴, 即 $\omega_1 \neq 0$, $\omega_2 = 0, \omega_3 = 0$, 则由(24.10)得 $L_1 = I_1 \omega_1 \neq 0, L_2 = 0, L_3 = 0$. 这是说 \mathbf{L} 与 ω 方向一致, $\mathbf{L} = I\omega$. 但在一般情况下, 从(24.10)容易看出, 刚体的 $L_1:L_2:L_3$ 并不等于 $\omega_1:\omega_2:\omega_3$, 即 \mathbf{L} 与 ω 的方向就不一致, 根本谈不上 $\mathbf{L} = I\omega$. 只有 ω 沿主轴方向的情况下, $\mathbf{L} = I\omega$ 才成立.

在主轴坐标系中, 定点转动的动能(24.6)成为

$$T = \frac{1}{2} (I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2). \quad (24.12)$$

利用欧拉运动学方程(23.19), 可以把主轴坐标系中的 L 的公式(24.11)和 T 的公式(24.12)用欧拉角表出:

$$\begin{cases} L_1 = I_1(\dot{\theta} \cos \phi + \dot{\psi} \sin \theta \sin \phi), \\ L_2 = I_2(-\dot{\theta} \sin \phi + \dot{\psi} \sin \theta \cos \phi), \\ L_3 = I_3(\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta); \end{cases} \quad (24.13)$$

$$T = \frac{1}{2} \{ (I_1 - I_2)(\dot{\theta} \cos \phi + \dot{\psi} \sin \theta \sin \phi)^2 + I_2(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) + I_3(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 \}. \quad (24.14)$$

例 计算匀质正立方体对其一顶点的主转动惯量和惯量主轴的方向.

解 建立坐标系如图 6-9 所示. 设立方体的边长为 a , 质量为 m . 正立方体对 Ox 轴的转动惯量是

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \int (y^2 + z^2) dm \\ &= \int_0^a \int_0^a \int_0^a (y^2 + z^2) \frac{m}{a^3} dx dy dz \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{3} m a^2. \quad (1)$$

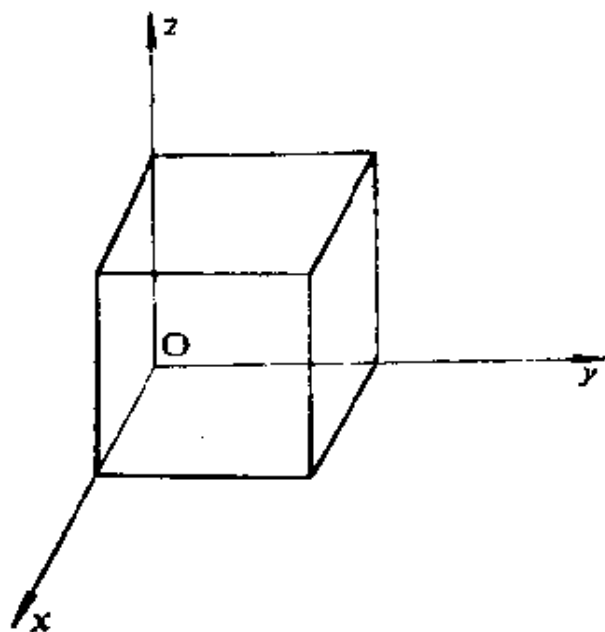


图 6-9

用同样方法可以求出

$$I_{22} = I_{33} = \frac{2}{3} m a^2. \quad (2)$$

刚体对 xy 平面的惯量积

$$\begin{aligned} I_{12} &= \int xy dm = \int_0^a \int_0^a \int_0^a xy \frac{m}{a^3} dx dy dz \\ &= \frac{1}{4} m a^2. \end{aligned} \quad (3)$$

由于对称性

$$I_{13} = I_{23} = \frac{1}{4} m a^2. \quad (4)$$

因而惯量张量为

$$I = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} m a^2. \quad (5)$$

利用惯量主轴的性质：当 ω 沿主轴方向时，角动量 L 的方向也沿该主轴。设主轴方向的单位矢量为 $n = \alpha i + \beta j + \gamma k$ ，则 $\omega = \omega \alpha$ ， $L = I\omega = I\omega \alpha$ ，运用(24.4)

$$L = I\omega \alpha = I\omega = I\omega \alpha,$$

可得

$$I\alpha = I\alpha,$$

即

$$(I - IE)\alpha = 0, \quad (6)$$

其中 E 是单位矩阵(对角线上各元素都是 1, 其余元素为零), 因此 α 为非零解的条件是

$$|I - IE| = 0. \quad (7)$$

设 $I = kma^2$, 于是 k 满足方程

$$\begin{vmatrix} \frac{2}{3} - k & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} - k & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} - k \end{vmatrix} = 0. \quad (8)$$

为计算简便起见, 记 $x = 2/3 - k$, $b = -1/4$, 上式化为

$$\begin{vmatrix} x & b & b \\ b & x & b \\ b & b & x \end{vmatrix} = 0.$$

展开行列式后得:

$$(x - b)^2(x + 2b) = 0. \quad (9)$$

由此求得三个根: $x_1 = x_2 = b$, $x_3 = -2b$, 也就是 $k_1 = k_2 = 11/12$, $k_3 = 1/6$. 于是主转动惯量是

$$I_1 = I_2 = \frac{11}{12} ma^2, \quad I_3 = \frac{1}{6} ma^2. \quad (10)$$

为求主轴的方向, 将 I 值代入(6)式.

先代单根 I_3 , 得

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha^{(3)} \\ \beta^{(3)} \\ \gamma^{(3)} \end{bmatrix} = 0, \quad (11)$$

这个矩阵式包括三个方程,但独立的只有两个. 解得

$$\alpha^{(3)}:\beta^{(3)}:\gamma^{(3)} = 1:1:1. \quad (12)$$

因 \mathbf{n} 是单位矢量, $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, 于是

$$\alpha^{(3)} = \beta^{(3)} = \gamma^{(3)} = 1/\sqrt{3}. \quad (13)$$

此方向正是立方体对角线(通过 O 点)的方向.

将重根 $l_1 = l_2$ 代入(6)式,得

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = 0, \quad (14)$$

这个矩阵式包括三个方程,但真正独立的只有一个,即

$$\alpha + \beta + \gamma = 0, \quad (15)$$

该式说明 \mathbf{n} 方向 (α, β, γ) 和立方体对角线方向 $(1, 1, 1)$ 正交,也就是说,与对角线方向垂直的任意方向都是主轴方向. 我们可以从这些方向中任取两个相互垂直的方向作为主方向. 例如取

$$\begin{aligned} \alpha^{(1)}:\beta^{(1)}:\gamma^{(1)} &= -1:1:0, \\ \alpha^{(2)}:\beta^{(2)}:\gamma^{(2)} &= 1:1:-2. \end{aligned} \quad (16)$$

为了形象化地描述张量,我们可以引入张量椭球的概念,对于惯量张量,则是惯量椭球.

在刚体中,通过点 O,任取一直线,设其方向余弦为 α, β, γ . 此直线上的单位矢量 $\mathbf{n} = \alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j} + \gamma\mathbf{k}$. 试求刚体对此直线的转动惯量 I .

参看图 6-6,相对于 O 的位矢为 $\mathbf{r}_i = x_i\mathbf{i} + y_i\mathbf{j} + z_i\mathbf{k}$ 的质点与此直线的垂直距离是 $|\mathbf{r}_i - (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}|$. 所以,

$$\begin{aligned} I &= \sum_i m_i [|\mathbf{r}_i - (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}|^2] \\ &= \sum_i m_i [r_i^2 - 2(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{n})^2 + (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{n})^2 n^2] \\ &= \sum_i m_i [r_i^2 - (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{n})^2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_i m_i [x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 - (\alpha x_i + \beta y_i + \gamma z_i)^2] \\
&= \sum_i m_i [(\beta^2 + \gamma^2)x_i^2 + (\gamma^2 + \alpha^2)y_i^2 + (\alpha^2 + \beta^2)z_i^2 \\
&\quad - 2\alpha\beta x_i y_i - 2\alpha\gamma x_i z_i - 2\beta\gamma y_i z_i] \\
&= I_{11}\alpha^2 + I_{22}\beta^2 + I_{33}\gamma^2 - 2I_{12}\alpha\beta - 2I_{13}\alpha\gamma - 2I_{23}\beta\gamma.
\end{aligned} \tag{24.15}$$

现在,在此直线上取一点,使其与点O的距离 $= 1/\sqrt{I}$, 则此点的坐标为 $x = \alpha/\sqrt{I}$, $y = \beta/\sqrt{I}$, $z = \gamma/\sqrt{I}$. 以此代入(24.15)以消去 α, β, γ , 则

$$\begin{aligned}
1 &= I_{11}x^2 + I_{22}y^2 + I_{33}z^2 - 2I_{12}xy - 2I_{13}xz - 2I_{23}yz \\
&= F(\mathbf{r}).
\end{aligned} \tag{24.16}$$

这样,在一切方向,按上面方法所求得的点联成一个曲面,其方程如(24.16). 从解析几何知道这曲面是椭球面,就称作在点O的**惯量椭球**. 惯量椭球以十分形象的方式给出刚体对于通过该点的一切直线的转动惯量 $I = 1/(x^2 + y^2 + z^2)$.

对于主轴坐标系,惯量椭球(24.16)简化为

$$F(\mathbf{r}) = I_1 x_1^2 + I_2 x_2^2 + I_3 x_3^2 = 1. \tag{24.17}$$

由此看出,惯量椭球的几何主轴就沿着惯量主轴.

惯量椭球显然与刚体相对固定. 在刚体坐标系中,不管刚体怎样转动,惯量椭球的方程不变. 在其他情况下,惯量椭球的方程随着刚体的转动而变,虽然这椭球本身在刚体里不变.

惯量椭球还有如下**重要性质**: 设刚体的角速度为

$$\boldsymbol{\omega} = \alpha\omega\mathbf{i} + \beta\omega\mathbf{j} + \gamma\omega\mathbf{k}.$$

它与惯量椭球的交点是 $x = \alpha/\sqrt{I}$, $y = \beta/\sqrt{I}$, $z = \gamma/\sqrt{I}$. 在这点,椭球的法线方向沿着

$$\begin{aligned}
\nabla F(\mathbf{r}) &= \mathbf{i}(2I_{11}x - 2I_{12}y - 2I_{13}z) + \mathbf{j}(-2I_{21}x + 2I_{22}y \\
&\quad - 2I_{23}z) + \mathbf{k}(-2I_{31}x - 2I_{32}y - 2I_{33}z) \\
&= 2\{\mathbf{i}(I_{11}\omega_x - I_{12}\omega_y - I_{13}\omega_z) + \mathbf{j}(-I_{21}\omega_x + I_{22}\omega_y \\
&\quad - I_{23}\omega_z) + \mathbf{k}(-I_{31}\omega_x - I_{32}\omega_y + I_{33}\omega_z)\}
\end{aligned}$$

$$-I_{23}\omega_x) + k(-I_{31}\omega_x - I_{32}\omega_y + I_{33}\omega_z)\} / \omega\sqrt{I}.$$

引用(24.1), 椭球的法线方向沿着 $\nabla P(\mathbf{r}) = (2/\omega\sqrt{I})\mathbf{L}$, 正是与这角速度相应的角动量 \mathbf{L} 的方向.

(3) 欧拉方程

现在, 我们运用达朗伯原理研究刚体的运动定律.

自由刚体可以有六个独立的虚位移. 这里不妨取质心的虚位移 $\delta\mathbf{r}_0$ 和刚体绕质心转动的虚角位移 $\delta\varphi\mathbf{n}$ 共计六个分量. 按照(23.1), 刚体里第 i 质点的虚位移是

$$\delta\mathbf{r}_i = \delta\mathbf{r}_0 + \mathbf{n}\delta\varphi \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0). \quad (24.18)$$

根据达朗伯原理,

$$\sum_{i=1}^n (\mathbf{F}_i - m_i\ddot{\mathbf{r}}_i) \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0, \quad (24.19)$$

$$\begin{aligned} \text{即} \quad & \sum_{i=1}^n (\mathbf{F}_i - m_i\ddot{\mathbf{r}}_i) \cdot [\delta\mathbf{r}_0 + \mathbf{n}\delta\varphi \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0)] \\ & = \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i - \sum_{i=1}^n m_i\ddot{\mathbf{r}}_0 \right) \cdot \delta\mathbf{r}_0 + \left[\sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{F}_i \right. \\ & \quad \left. - \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0) \times m_i\ddot{\mathbf{r}}_i \right] \cdot \delta\varphi\mathbf{n} \\ & = (\mathbf{F} - m\ddot{\mathbf{r}}_0) \cdot \delta\mathbf{r}_0 + (\mathbf{M} - \dot{\mathbf{L}}) \cdot \delta\varphi\mathbf{n} = 0, \quad (24.20) \end{aligned}$$

$$\text{其中} \quad \mathbf{F} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i, \quad m = \sum_{i=1}^n m_i, \quad \mathbf{M} = \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{F}_i,$$

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0) \times m_i\dot{\mathbf{r}}_i.$$

即 \mathbf{F} 表示外力系的主矢, \mathbf{M} 表示以质心 O 为中心的外力系的主矩, \mathbf{L} 表示刚体对质心 O 的角动量. 因为 $\delta\mathbf{r}_0$ 和 $\mathbf{n}\delta\varphi$ 是任意的, 所以

$$m\ddot{\mathbf{r}}_0 = \mathbf{F}, \quad \dot{\mathbf{L}} = \mathbf{M}. \quad (24.21)$$

这样，我们兜回到矢量力学的质心运动定理(7.3)和角动量定理(7.4)。其实，这完全是由于我们运用很一般的虚位移 $\delta \mathbf{r}_i$ 和 $\mathbf{n}\delta\varphi$ ，所以只能获得很泛泛的运动定律，即质心运动定理和角动量定理。如果采用具体的广义坐标例如欧拉角来表达虚位移，就会获得较具体的运动方程。不过，我们暂且撇开这个话题而继续(24.21)的讨论。

特别讨论定点运动。它有三个自由度，不妨取刚体绕该定点的虚角位移 $\mathbf{n}\delta\varphi$ ，质点 i 的虚位移

$$\delta \mathbf{r}_i = \mathbf{n}\delta\varphi \times \mathbf{r}_i. \quad (24.22)$$

达朗伯原理给出

$$(\mathbf{M} - \dot{\mathbf{L}}) \cdot \delta\varphi \mathbf{n} = 0. \quad (24.23)$$

由于 $\mathbf{n}\delta\varphi$ 是任意的，所以

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{M}, \quad (24.24)$$

这里 \mathbf{L} 是相对于定点的角动量， \mathbf{M} 是相对于定点的外力系的主矩。方程(24.24)是对于固定点的角动量定理，用分量形式写出就得到：

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} (+I_{11}\omega_x - I_{12}\omega_y - I_{13}\omega_z) = M_x, \\ \frac{d}{dt} (-I_{21}\omega_x + I_{22}\omega_y - I_{23}\omega_z) = M_y, \\ \frac{d}{dt} (-I_{31}\omega_x - I_{32}\omega_y + I_{33}\omega_z) = M_z. \end{cases} \quad (24.25)$$

这里提供的三个方程，正好足以决定三个转动自由度的运动。

其实，(24.25)隐含着一个麻烦。如果选用的坐标系 $Oxyz$ 是不转动的(坐标轴在空间中的指向不变)，则随着刚体的转动，刚体里每一质点的坐标 (x, y, z) 不停地变化，从而惯量张量不停地变化[参看(24.10)式]。这样一来，在(24.25)的左边，不仅要考虑 ω_x 、 ω_y 和 ω_z 的变化，还要考虑惯量张量的变化，这给计算带来相当大的困难。

针对这个问题，通常采用一种**变通办法**：所研究的 L 虽是“绝对”角动量，却采用本体坐标系（即随刚体一同转动的坐标系） $Ox_1x_2x_3$ 以表出 L 的分量。相对于本体坐标系，刚体里的质点坐标不变，从而惯量张量是常数。仿照(24.1)，

$$\begin{cases} L_1 = +I_{11}\omega_1 - I_{12}\omega_2 - I_{13}\omega_3, \\ L_2 = -I_{21}\omega_1 + I_{22}\omega_2 - I_{23}\omega_3, \\ L_3 = -I_{31}\omega_1 - I_{32}\omega_2 + I_{33}\omega_3. \end{cases} \quad (24.26)$$

拿(24.26)对时间 t 求导，就得到 L 在这坐标系中的时间变化率，或者说，“绝对”动量矩 L 的相对变化率 \dot{L} ，

$$\begin{cases} \dot{L}_1 = +I_{11}\dot{\omega}_1 - I_{12}\dot{\omega}_2 - I_{13}\dot{\omega}_3, \\ \dot{L}_2 = -I_{21}\dot{\omega}_1 + I_{22}\dot{\omega}_2 - I_{23}\dot{\omega}_3, \\ \dot{L}_3 = -I_{31}\dot{\omega}_1 - I_{32}\dot{\omega}_2 + I_{33}\dot{\omega}_3. \end{cases} \quad (24.27)$$

这里，暂且把字母上方的点号和 d/dt 作为两种不同的记号使用，点号表示相对变化率， d/dt 表示“绝对”变化率。

角动量定理(24.24)里的 dL/dt 是“绝对”变化率，(24.27)的相对变化率 \dot{L} 需要加上牵连变化率才等于“绝对”变化率。据(3.1)， L 的牵连变化率为 $\omega \times L$ ，因此，

$$\frac{d}{dt} L = \dot{L} + \omega \times L. \quad (24.28)$$

把(24.28)代入(24.24)，角动量定理(24.24)就改写为 $\dot{L} + \omega \times L = M$ ，即

$$\dot{L} = M + L \times \omega. \quad (24.29)$$

这叫作刚体定点运动的**欧拉方程**。欧拉方程是角动量定理的变通表达式。从物理含义来说，它研究的是**绝对角动量** L 和**绝对角速度** ω ，换句话说，用的是不转动的参考系；但在数学上用分量来表示 L 和 ω 时，却是用**本体坐标系**。

利用(24.26)和(24.27)把欧拉方程(24.29)用分量形式写出，

$$\begin{cases} I_{11}\dot{\omega}_1 - I_{12}\dot{\omega}_2 - I_{13}\dot{\omega}_3 = M_1 + I_{13}\omega_1\omega_2 - I_{12}\omega_1\omega_3 \\ \quad + I_{23}(\omega_2^2 - \omega_3^2) + (I_{22} - I_{33})\omega_2\omega_3, \\ -I_{21}\dot{\omega}_1 + I_{22}\dot{\omega}_2 - I_{23}\dot{\omega}_3 = M_2 + I_{12}\omega_2\omega_3 - I_{23}\omega_2\omega_1 \\ \quad + I_{13}(\omega_3^2 - \omega_1^2) + (I_{33} - I_{11})\omega_1\omega_3, \\ -I_{31}\dot{\omega}_1 - I_{32}\dot{\omega}_2 + I_{33}\dot{\omega}_3 = M_3 + I_{23}\omega_3\omega_1 - I_{13}\omega_3\omega_2 \\ \quad + I_{12}(\omega_1^2 - \omega_2^2) + (I_{11} - I_{22})\omega_1\omega_2. \end{cases}$$

这未免太繁了！让我们约定取主轴坐标系，使所有惯量积为零，上面的方程简化为

$$\begin{cases} I_1\dot{\omega}_1 = M_1 + (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3, \\ I_2\dot{\omega}_2 = M_2 + (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1, \\ I_3\dot{\omega}_3 = M_3 + (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2. \end{cases} \quad (24.30)$$

通常说到刚体定点运动的**欧拉方程**就是指(24.30)。

我们也可以干脆采用随刚体一同转动的参考系，或者简单些说，以刚体自身作为参考系。相对于这参考系，刚体各点的矢径 \mathbf{r} 不变， $\mathbf{v}' = \mathbf{0}$ 从而 $\mathbf{L}' = \mathbf{0}$ ，于是角动量定理应表为“力矩 = 0”。不过，这里说的力矩应该包括由于参考系的转动所引起的惯性力的力矩。刚体里径矢为 \mathbf{r} 而质量为 dm 的质点所受的惯性力有惯性离心力 $-\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})dm$ ，其力矩为 $-\mathbf{r} \times [\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})]dm$ ，还有“切向”惯性力 $-\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}dm$ ，其力矩为

$$-\mathbf{r} \times \left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} \right) dm.$$

这样，相对于随刚体一同转动的参考系，角动量定理应表为

$$\mathbf{0} = \mathbf{M} - \int \mathbf{r} \times [\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})] dm - \int \mathbf{r} \times \left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} \right) dm,$$

读者不难验证，上式右边第二项可改写为

$$\begin{aligned} & -\int [(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})\boldsymbol{\omega} - (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}] dm = -\int [0 - (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}] dm \\ & = -\int [(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})\mathbf{r} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r})\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}] dm \\ & = -\int \boldsymbol{\omega} \times [\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})] dm \\ & = -\boldsymbol{\omega} \times \int \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) dm = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}, \end{aligned}$$

右边第三项可改写为

$$-\int r \times \left(\frac{d\omega}{dt} \times r \right) dm = -\int r \times (\dot{\omega} \times r) dm = -\dot{L},$$

于是,相对于这个转动参考系,角动量定理可表为

$$M - \dot{\omega} \times L - \dot{L} = 0,$$

这正是矢量形式的欧拉方程(24.29).

欧拉方程(24.30)是 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ 的非线性方程,其解算颇为困难,就是说,定点运动刚体所受的力矩已知,要解算它的转动情况是颇为困难的。本章 § 25 和 § 26 将分别解算两种较简单的定点运动。

另一方面,欧拉方程(24.30)作为 M_1, M_2 和 M_3 的方程却是比较简单的,即已知刚体的定点运动情况,解算它所受的力矩还是比较容易的。这里举一个例子。汽车发动机的曲轴(图 6-10)一类的高速转动部件各部分受到巨大的惯性离心力作用。参看图 6-10(a),惯性离心力系的主矢为零(已达静平衡,即重心在转动轴

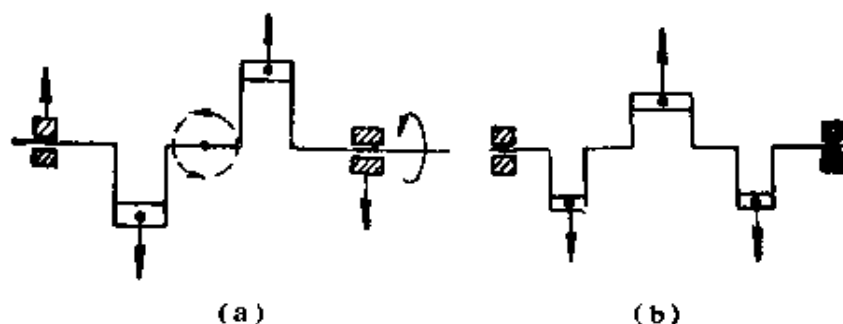


图 6-10

上),但主矩不为零,它有驱使曲轴按虚线箭头方向转动的趋势,这趋势被轴承所抵制,因而轴承与轴之间出现巨大作用力,容易招致机械损伤。如果惯性离心力系不仅主矢为零,而且主矩也为零,如图 6-10(b),将不存在轴承与轴之间的巨大作用力,这种情况叫作**动平衡**。那么,在没有达到动平衡的情况下,轴与轴承之间的作用力怎样计算呢?虽然这是定轴转动,但因研究的是约束力(轴

承对轴的作用力),还得用定点运动的欧拉方程。以轴的一端为原点,取惯量主轴为坐标轴。考虑匀速转动, $\dot{\omega}_1 = \dot{\omega}_2 = \dot{\omega}_3 = 0$, 欧拉方程(24.30)给出

$$\begin{cases} M_1 = (I_1 - I_2)\omega_2\omega_3, \\ M_2 = (I_1 - I_3)\omega_3\omega_1, \\ M_3 = (I_2 - I_1)\omega_1\omega_2. \end{cases} \quad (24.31)$$

这就是轴承对轴的作用力的力矩。如转轴沿着惯量主轴之一, 例如说 $\omega_1 \neq 0, \omega_2 = \omega_3 = 0$, 则从(24.31)解得 $M_1 = M_2 = M_3 = 0$, 即已达到动平衡。这样,动平衡的条件是转动轴沿着惯量主轴。如转动轴并不沿惯量主轴, 则(24.31)给出轴承对轴的作用力所组成的力偶的力矩

$$\begin{aligned} M &= \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2} \\ &= \sqrt{(I_1 - I_2)^2\omega_2^2\omega_3^2 + (I_1 - I_3)^2\omega_3^2\omega_1^2 + (I_2 - I_1)^2\omega_1^2\omega_2^2}. \end{aligned}$$

例如均匀薄圆盘质量 $m = 40$ 千克,半径 $R = 0.2$ 米,安装时误使盘面法向与转轴作 $\theta = 1^\circ$ 的角(见图 6-11, 图中 θ 夸大了), 机器转速为 12,000 转/分, 即 $\omega = 400\pi$ /秒。通过盘心而垂直于盘面的直线是一根惯量主轴, 取作 x'_1 轴, 相应的主转动惯量

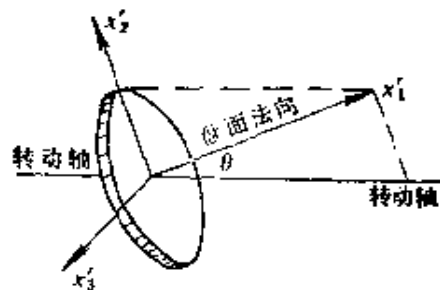


图 6-11

$I_1 = \frac{1}{2} mR^2$ 。盘面上的每一直

径都是惯量主轴,在转动轴与盘面法线构成的平面内,取转动轴在盘面上的投影作为 x'_2 轴,同它垂直的直径作为 x'_3 轴,相应的主

转动惯量 $I_2 = I_3 = \frac{1}{4} mR^2$, 角速度 ω 的分量为 $\omega_1 = \omega \cos \theta$,

$\omega_2 = -\omega \sin \theta, \omega_3 = 0$ 。以具体数值代入(24.31)得

$$M_1 = 0, M_2 = 0,$$

$$M_3 = \frac{1}{4} m R^2 \omega^2 \cos \theta \sin \theta$$

$$= 5.5 \times 10^3 \text{ 千克} \cdot \text{米}.$$

这是两端的轴承对轴的作用力所组成的力偶的力矩, 方向沿 x_3 轴的负向. 如两轴承相距一米, 则每一轴承对轴的作用力 $F = M_3/l$ 竟达 5.5 吨!

(4) 拉格朗日方程

我们也可以越过达朗伯原理, 具体选取欧拉角作为广义坐标, 直接运用拉格朗日方程研究刚体的定点运动. 例如, 主动力全是保守力的情况下, 由(24.14)可写出拉格朗日函数

$$\begin{aligned} L = & \frac{1}{2} [(I_1 - I_2)(\dot{\theta} \cos \phi + \dot{\phi} \sin \theta \sin \phi)^2 \\ & + I_2(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + I_3(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\phi})^2] \\ & - V(\varphi, \theta, \phi). \end{aligned} \quad (24.32)$$

按照拉格朗日方程(11.14)就可得出欧拉角的运动方程.

我们是用欧拉方程或是用拉格朗日方程, 视方便而定.

(5) 动能定理

欧拉方程可说是刚体定点运动的运动方程. 但有些时候, 运用刚体的动能定理会带来计算上的便利.

由(24.6)式可知刚体动能的时间导数是

$$\frac{d}{dt} T = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L} \right) = \frac{1}{2} \left(\dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \mathbf{L} + \boldsymbol{\omega} \cdot \frac{d\mathbf{L}}{dt} \right) \quad (24.33)$$

如果用主轴坐标系, $\dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \mathbf{L}$ 可以写成

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \mathbf{L} = I_1 \dot{\omega}_1 \dot{\omega}_1 + I_2 \dot{\omega}_2 \dot{\omega}_2 + I_3 \dot{\omega}_3 \dot{\omega}_3. \quad (24.34)$$

另一方面, 由于

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \dot{\mathbf{L}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L},$$

所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega} \cdot \frac{d\mathbf{L}}{dt} &= \boldsymbol{\omega} \cdot \dot{\mathbf{L}} + \boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}) = \boldsymbol{\omega} \cdot \dot{\mathbf{L}} \\ &= I_1 \omega_1 \dot{\omega}_1 + I_2 \omega_2 \dot{\omega}_2 + I_3 \omega_3 \dot{\omega}_3.\end{aligned}\quad (24.35)$$

比较(24.34)和(24.35),可知

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \mathbf{L} = \boldsymbol{\omega} \cdot \frac{d\mathbf{L}}{dt}.\quad (24.36)$$

以此代入(24.33)式,定点运动刚体动能的时间变化率是

$$\dot{T} = \boldsymbol{\omega} \cdot \dot{\mathbf{L}}.$$

根据角动量定理, $\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{M}$, 由此得到

$$dT = \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega} dt.\quad (24.37)$$

这就是刚体定点运动的动能定理. 为了看出方程右边的物理意义, 我们把 \mathbf{M} 还原为 $\sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i)$, 并注意到 $\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i$, 于是

得出

$$\mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{v}_i,$$

或者

$$\mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega} dt = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i.\quad (24.38)$$

这是外力所作的功. 有时干脆叫作“外力矩所作的功”, 而把(24.37)式可表述为: 定点运动刚体动能的改变量等于外力矩所作的功.

其实, 从定点运动的欧拉方程(24.30)出发很容易导出定点运动的动能定理. 事实上, 将第一式乘以 $\omega_1 dt$, 第二式乘以 $\omega_2 dt$, 第三式乘以 $\omega_3 dt$, 三者相加给出

$$I_1 \dot{\omega}_1 \omega_1 dt + I_2 \dot{\omega}_2 \omega_2 dt + I_3 \dot{\omega}_3 \omega_3 dt = M_1 \omega_1 dt + M_2 \omega_2 dt + M_3 \omega_3 dt,$$

$$\text{即 } I_1 \omega_1 d\omega_1 + I_2 \omega_2 d\omega_2 + I_3 \omega_3 d\omega_3 = (M_1 \omega_1 + M_2 \omega_2 + M_3 \omega_3) dt.$$

上式右边正是 $M \cdot \omega dt$, 左边 $= d\left(\frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 + \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2\right) = dT$, 这正是刚体定点运动的动能定理。

§ 25. 无外力矩的定点运动 (欧拉-班锁情况)

也许有某些读者会这样想: 既然没有外力矩, 刚体的转动轴线和角速度都会保持不变。这想法并不对, 因为这牵涉到动平衡问题。如果刚体绕惯量主轴转动, 则转动是动平衡的, 不存在驱使转动轴改变方向的趋势, 因而转动轴确实保持不变, 角速度大小也不变。如果刚体并不是绕惯量主轴转动, 则转动不是动平衡的, 存在着驱使转动轴改变方向的趋势, 并且因为没有轴承加以抵制, 这趋势实际上也就实现了, 从而刚体的转动轴是变的。

从角动量定理来看, 在没有外加力矩的条件下, 角动量 L 守恒。我们知道, 除非是绕惯量主轴转动, 否则角动量 L 和角速度 ω 方向并不一致。所以, L 保持守恒并不意味着 ω 也守恒, 亦即并不意味着转动轴不变。

(1) 对称刚体

如果刚体具有通过定点的对称轴, 没有外力矩的定点运动很容易用欧拉方程(24.30)解出。

对称轴必是惯量主轴, 今取作 x_3 轴。由于对称性, 与 x_3 轴垂直的所有直线都是惯量主轴, 今于其中任取互相垂直的两直线作为 x_1 轴与 x_2 轴, 注意相应的主转动惯量 $I_1 = I_2$ 。于是, 欧拉方程(24.30)成为

$$\begin{cases} I_1 \dot{\omega}_1 = (I_1 - I_3) \omega_2 \omega_3, \\ I_1 \dot{\omega}_2 = (I_3 - I_1) \omega_1 \omega_3, \\ I_3 \dot{\omega}_3 = 0. \end{cases} \quad (25.1)$$

由(25.1)的第三式立刻得到

$$\omega_3 = \text{常数},$$

即角速度矢量在对称轴上的投影守恒。

现在还剩下(25.1)的第一式和第二式。第一式对时间 t 微分,再以第二式代入,就可消去 ω_2 :

$$I_1 \dot{\omega}_1 = (I_1 - I_3) \dot{\omega}_2 \omega_3 = -\frac{(I_1 - I_3)^2}{I_1} \omega_1 \omega_3^2,$$

即
$$\dot{\omega}_1 + \frac{(I_1 - I_3)^2}{I_1^2} \omega_1^2 \omega_3 = 0.$$

这是谐振动方程,它的解是

$$\omega_1 = A_1 \cos \left(\frac{I_1 - I_3}{I_1} \omega_3 t + \alpha_1 \right),$$

其中 A_1 和 α_1 是积分常数。同理可从(25.1)的第一式和第二式消去 ω_1 而解得

$$\omega_2 = A_2 \cos \left(\frac{I_1 - I_3}{I_1} \omega_3 t + \alpha_2 \right).$$

(25.1)的第一式和第二式是两个一阶微分方程,应当只有两个积分常数。由此可见,积分常数 $A_1, \alpha_1, A_2, \alpha_2$ 不是独立的。事实上,把解得的 ω_1 和 ω_2 代回(25.1)的第一式或第二式即得 $A_1 = A_2$, $\alpha_1 = \alpha_2 - \pi/2$ 。

这样,(25.1)的解是

$$\begin{cases} \omega_1 = A \cos \left(\frac{I_3 - I_1}{I_1} \omega_3 t + \alpha \right), \\ \omega_2 = A \sin \left(\frac{I_3 - I_1}{I_1} \omega_3 t + \alpha \right), \\ \omega_3 = \text{常数}. \end{cases} \quad (25.2)$$

角速度矢量 ω 在 x_3' 轴(刚体的对称轴)上的投影为常数,而在 $x_1'x_2'$ 平面上的投影描画出圆 $\omega_1^2 + \omega_2^2 = A^2$,这就是说,角速度矢

量的大小不改变,但绕着对称轴旋转而在刚体中描出圆锥(参看图6-13),旋转角速度为 $\omega_3|I_1 - I_3|/I_1$,而

$$\text{周期} = \frac{2\pi}{\omega_3|I_1 - I_3|/I_1} = \frac{2\pi}{\omega_3} \frac{I_1}{|I_1 - I_3|}. \quad (25.3)$$

一个具有实际意义的例子是地球。地球的自转轴(叫作天文地轴)并不与对称轴(叫作地理地轴)相合,因而前者绕后者旋转而描出圆锥。相应地,天文南北极绕地理南北极描出圆周。这现象叫**极移**。极移周期为

$$\frac{2\pi}{\omega} \frac{I_1}{|I_3 - I_1|}.$$

地球自转周期 $2\pi/\omega$ 为1恒星日,而 $I_1/|I_3 - I_1|$ 按椭球体计算约为300,所以地球极移周期约300日即10个月。但地球并非严格的刚体,形状也不准确为椭球,所以极移沿复杂的曲线而不是圆周进行,周期也不是10个月而是14个月。

再说角动量。以(25.2)代入(24.11),并计及 $I_1 = I_2$,

$$\begin{cases} L_1 = I_1 A \cos\left(\frac{I_3 - I_1}{I_1} \omega_3 t + \alpha\right), \\ L_2 = I_1 A \sin\left(\frac{I_3 - I_1}{I_1} \omega_3 t + \alpha\right), \\ L_3 = I_3 \omega_3 = \text{常数}. \end{cases} \quad (25.4)$$

\mathbf{L} 在刚体对称轴上的投影为常数,而在 x_1x_2 平面上的投影描出圆 $L_1^2 + L_2^2 = I_1^2 A^2$ 。这样,角速度矢量也绕着对称轴旋转而在刚体中描出圆锥,旋转角速度也是 $\omega_3|I_1 - I_3|/I_1$ 。我们还要特别指出,角动量矢量与刚体对称轴的夹角不变。

以上是在本体坐标系中进行的讨论。那么,刚体在空间中的运动究竟是怎样的呢?为此,我们应从本体坐标系的描述转入用欧拉角的描述。把(25.2)代入(23.20),

$$\begin{cases} \dot{\theta} = A \cos \left(\frac{I_3 - I_1}{I_1} \omega_3 t + \phi + \alpha \right), \\ \dot{\phi} = \frac{1}{\sin \theta} A \sin \left(\frac{I_3 - I_1}{I_1} \omega_3 t + \phi + \alpha \right), \\ \dot{\psi} = \omega_3 - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} A \sin \left(\frac{I_3 - I_1}{I_1} \omega_3 t + \phi + \alpha \right). \end{cases} \quad (25.5)$$

我们知道，坐标系的选择可以影响到结果的繁简。考虑到角动量守恒，它在空间中取向不变，现在就选它的指向为空间坐标系的 z 轴。刚体对称轴即 x_3' 轴与这 z 轴的夹角 θ 前已指出不变。 $\dot{\theta}$ 始终为零，从(25.5)的第一式看，这要求

$$\phi = \frac{I_3 - I_1}{I_1} \omega_3 t, \quad \alpha = \frac{\pi}{2}.$$

这样，在此种空间坐标系中，(25.5)简化为

$$\dot{\theta} = 0, \quad \dot{\phi} = \frac{I_3 - I_1}{I_1} \omega_3, \quad \dot{\psi} = \frac{I_3 \omega_3}{I_1 \cos \theta}. \quad (25.6)$$

刚体的章动角不变，自转和旋进则是匀速的。

角速度 $\boldsymbol{\omega} = \dot{\phi} \mathbf{k}' + \dot{\psi} \mathbf{k}$ 的大小

$$|\boldsymbol{\omega}| = \sqrt{(\dot{\phi} \mathbf{k}' + \dot{\psi} \mathbf{k})^2} = \sqrt{\dot{\phi}^2 + 2\dot{\phi}\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\psi}^2}$$

不变， $\boldsymbol{\omega}$ 在 z 轴上的投影 $\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}$ 也不变。因此，角速度在空间中绕着角动量 (z 轴) 描出圆锥，如图 6-12。

在拉格朗日函数(24.32)中，置 $I_1 = I_2$ ， $V = 0$ ，并计及 θ 不变，用拉格朗日方程很容易得到(25.6)。请自行一试。

角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 在空间中描画圆锥这一现象是容易理解的。设某一时刻，刚体的即时转动轴是 OO_1 。动量矩 \mathbf{L} 并不沿着即时转动轴，这说明刚体的转动不是动平衡的。既然不是动平衡的，存在着驱使转动轴改变方向的趋势。经过很短时间以后，即时转动轴变为 OO_2 。这时，转动仍然不是动平衡的，转动轴还要改变。不过，由于刚体已自转了一个小角度，所以转动轴的上端并不沿着 O_1O_2 直线继续移动，而是改沿 O_2O_3 移动，经过很短时间以后，即时转

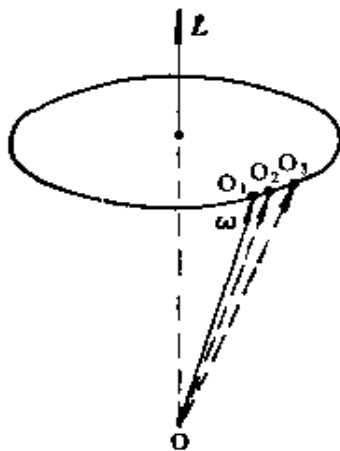


图 6-12

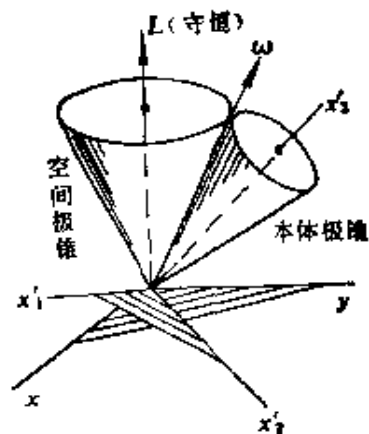


图 6-13

动轴变为 OO_3 (图 6-12)。依此推论, 即时转动轴就描出圆锥。

把 ω 在空间中和在刚体里描画的圆锥综合在一起就得到图 6-13。这里是按照 $I_1 > I_3$ 描画的, 从(25.2)和(25.4)知道 ω 在 L 与对称轴之间, 因而本体极锥与空间极锥外切。如果 $I_3 > I_1$, 则 L 在 ω 与对称轴之间, 空间极锥内切于本体极锥。在两种情况下, 本体极锥都是在空间极锥外无滑动地滚动。

(2) 非对称刚体

对于非对称刚体, 取惯量主轴作本体坐标系的坐标轴, 没有外力矩的定点运动的欧拉方程是

$$\begin{cases} I_1 \dot{\omega}_1 = (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3, \\ I_2 \dot{\omega}_2 = (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1, \\ I_3 \dot{\omega}_3 = (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2. \end{cases} \quad (25.7)$$

这是一组互相耦合的微分方程, 可用消去法求解。

这个问题中的角动量 L 和动能 T 是守恒的, 可以写出

$$(I_1 \omega_1)^2 + (I_2 \omega_2)^2 + (I_3 \omega_3)^2 = J^2, \quad (25.8)$$

$$\frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 + \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2 = T. \quad (25.9)$$

[其实, (25.8)和(25.9)可从(25.7)导出, 读者不妨一试。]从(25.8)

和(25.9)“解出” ω_1 和 ω_2 , 即用 ω_3 表出 ω_1 和 ω_2 , 得

$$\begin{cases} \omega_1^2 = \frac{I_3(I_3 - I_2)\omega_3^2 + 2I_2T - J^2}{I_1(I_2 - I_1)} \\ \omega_2^2 = \frac{I_3(I_1 - I_3)\omega_3^2 + J^2 - 2I_1T}{I_2(I_2 - I_1)}. \end{cases} \quad (25.10)$$

把(25.10)代入(25.7)的第三式就消去了 ω_1 和 ω_2 , 而得到 ω 的微分方程, 这微分方程是可分离变数的. 分离变数再进行积分就求得 ω_3 . 同理可求得 ω_1 和 ω_2 . 不过, 这里遇到的积分是椭圆积分. 从这些椭圆积分并不容易直接看出刚体运动情况. 拉格朗日方程对于这个问题也并不方便. 下面介绍班锁的几何观点, 它能给出刚体运动情况的

清楚图像.

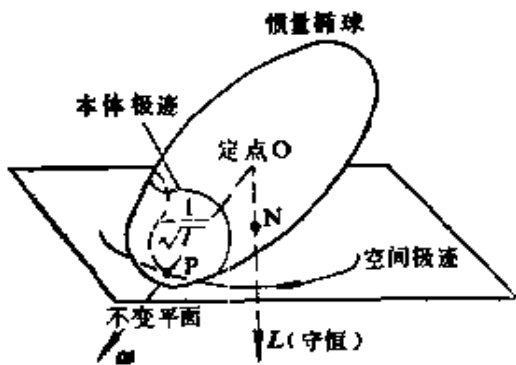


图 6-14

§ 24 介绍过与刚体相对固定的惯量椭球. 它的方程是(24.16), 在主轴坐标系中简化为

$$I_1x_1^2 + I_2x_2^2 + I_3x_3^2 = 1.$$

§ 24(2) 末尾指出, 在角速度 ω 与惯量椭球的交点, 椭球的法

向正是与此 ω 对应的 L 的方向. 换句话说, 在此交点的切平面垂直于角动量 L . 由于角动量守恒, 所以 ω 与椭球交点处的切平面方向不变.

再求这切平面与定点 O 的距离 \overline{ON} .

$$\begin{aligned} \overline{ON} &= \overline{OP} \cdot \frac{L}{L} = \frac{\omega_1}{\sqrt{I}\omega} \frac{I_1\omega_1}{L} + \frac{\omega_2}{\sqrt{I}\omega} \frac{I_2\omega_2}{L} + \frac{\omega_3}{\sqrt{I}\omega} \frac{I_3\omega_3}{L} \\ &= \frac{1}{\sqrt{I}\omega L} (I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2). \end{aligned} \quad (25.11)$$

转动惯量 I 的式子见(24.15), 在主轴坐标系, 简化为

$$I = I_1\alpha^2 + I_2\beta^2 + I_3\gamma^2$$

$$= \frac{1}{\omega^2} (I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2). \quad (25.12)$$

把(25.12)代入(25.11),

$$\overline{ON} = \frac{1}{L} \sqrt{I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2} = \frac{1}{L} \sqrt{2T}. \quad (25.13)$$

对于无外力矩的定点运动,动量矩 L 和动能 T 守恒.于是,惯量椭球在它和即时转动轴交点 P 处的切平面在空间中保持不变的取向,并且与定点 O 保持不变的距离,总之,这切平面是不变的,通常也就称之为**不变平面**.

惯量椭球跟不变的平面相切(在图 6-14 中,读者看切点 P 的视线被椭球阻挡,故用虚线表示),切点的即时速度为零(因为它在即时转动轴上).这样,我们得到无外力矩定点运动的图像:刚体连带其惯量椭球一同运动,惯量椭球在不变平面上作无滑动的滚动,见图 6-14.图中还用虚线描画了切点的空间极迹和本体极迹.这里,图 6-13 基本上仍然适用,只是即时转动轴所描出的锥面不是圆锥而已.

(3) 动平衡的稳定性

设刚体的三个主转动惯量互不相等, $I_3 > I_2 > I_1$. 惯量椭球是三轴椭球.参看图 6-14,如果刚体绕惯量主轴之一转动,则切点 P 重合于点 N ,空间极迹和本体极迹都缩为一点,刚体转动轴线保持不变.这是读者所熟悉的动平衡转动.现在研究动平衡的稳定性问题,就是说,如果转动轴稍稍偏离惯量主轴,这偏离是否能限制在一定范围里不致越来越大?

这里研究转动轴稍稍偏离惯量主轴 x_3 轴的情况.没有外力矩的定点运动的欧拉方程是

$$\begin{cases} I_1 \dot{\omega}_1 = (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3, \\ I_2 \dot{\omega}_2 = (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1, \\ I_3 \dot{\omega}_3 = (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2. \end{cases} \quad (25.14)$$

按照问题的提法, ω_1 和 ω_2 是小量。(25.14) 第三式右边的 $\omega_1\omega_2$ 乘积是高阶小量, 可以略去,

$$I_3\dot{\omega}_3 \approx 0,$$

由此立刻得到 $\omega_3 = \text{常数}$.

现在只剩下(25.14)的第一式和第二式. 仿照本节(1)可消去 ω_2 或 ω_1 而得到 ω_1 或 ω_2 的微分方程

$$\begin{cases} \ddot{\omega}_1 + \left[\frac{(I_3 - I_1)(I_3 - I_2)}{I_1 I_2} \omega_3^2 \right] \omega_1 = 0, \\ \ddot{\omega}_2 + \left[\frac{(I_3 - I_1)(I_3 - I_2)}{I_1 I_2} \omega_3^2 \right] \omega_2 = 0. \end{cases} \quad (25.15)$$

由于 $I_3 > I_2 > I_1$, (25.15) 中括号的值 > 0 , 因而这两个方程是谐振动方程. 这就是说, ω_1 和 ω_2 作谐振动, 它们的值不致越来越大, 所以转动是稳定的.

同理, 如转动轴稍稍偏离惯量主轴 x_1 轴, 则小量 ω_2 和 ω_3 的微分方程是

$$\begin{cases} \ddot{\omega}_2 + \left[\frac{(I_1 - I_2)(I_1 - I_3)}{I_2 I_3} \omega_1^2 \right] \omega_2 = 0, \\ \ddot{\omega}_3 + \left[\frac{(I_1 - I_2)(I_1 - I_3)}{I_2 I_3} \omega_1^2 \right] \omega_3 = 0. \end{cases} \quad (25.16)$$

由于 $I_3 > I_2 > I_1$, (25.16) 中括号的值 > 0 , 即 ω_2 和 ω_3 是作谐振动的, 不致越来越大, 所以转动也是稳定的.

同理, 如转动轴稍稍偏离惯量主轴 x_2 轴, 则小量 ω_1 和 ω_3 的微分方程是

$$\begin{cases} \ddot{\omega}_1 + \left[\frac{(I_2 - I_1)(I_2 - I_3)}{I_3 I_1} \omega_2^2 \right] \omega_1 = 0, \\ \ddot{\omega}_3 + \left[\frac{(I_2 - I_1)(I_2 - I_3)}{I_3 I_1} \omega_2^2 \right] \omega_3 = 0. \end{cases} \quad (25.17)$$

由于 $I_3 > I_2 > I_1$, (25.17) 的括号值 < 0 , 方程(25.17)的解呈指数式

$$e^{\pm \frac{\sqrt{(I_2 - I_1)(I_2 - I_3)}}{I_1 I_2} \omega_2^2 t},$$

这不是谐振动。 ω_1 和 ω_3 可以越来越大，因而转动不是稳定的。

总结起来说，主转动惯量最大或最小的惯量主轴是稳定转动轴。主转动惯量既非最大也非最小的惯量主轴则是不稳定转动轴。这可以用一个简单的实验来证实。取一个平行六面体，例如一本厚书或一盒火柴（预先捆绑好以免散开），把它旋转着抛向空中。如果以它最长的轴线或最短的轴线作为转动轴，可以看到它的转动轴在空中保持不变。如果以它既非最长也非最短的轴线作为转动轴，可以看到它在空中的转动轴发生变化，虽然绕最初轴线的转动也是动平衡的，却因为不稳定而不能实现。读者不妨用图-14的几何观点研究绕惯量主轴的转动的稳定性问题。

§ 26. 对称重刚体的定点运动 (拉格朗日-泊松情况)

具有对称轴的刚体绕着对称轴相当快地自转，对称轴的一端支持在某个O点，这O点不是刚体的重心，刚体便在重力 mg 的力矩的作用下绕点O作定点运动（图6-15）。儿童玩的陀螺就属于这种情况，许多仪表中的回转陀螺也属于这种情况。

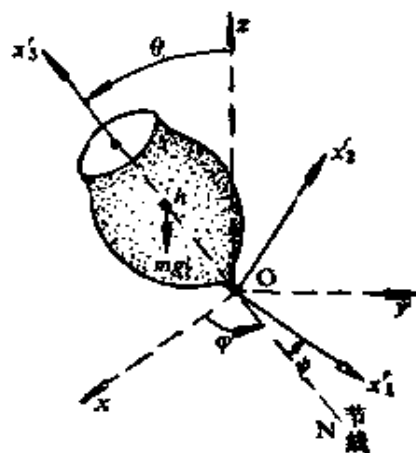


图 6-15

(1) 欧拉方程

定点运动的刚体有三个自由度，取对称轴为体坐标系的 x_3' 轴，取欧拉角 θ, φ, ψ 作为广义坐标（见图6-15）。既然 x_3' 轴是对称轴，主转动惯量 $I_1 = I_2$ 。刚体所受的力矩就是重力的力矩， $M =$

$mgh \sin \theta \mathbf{n}$. 利用 (23.18), $\mathbf{M} = mgh \sin \theta \cos \phi \mathbf{i}' - mgh \sin \theta \sin \phi \mathbf{j}'$.
 于是, 欧拉方程(24.30)成为

$$\begin{cases} I_1 \dot{\omega}_1 = (I_1 - I_3) \omega_2 \omega_3 + mgh \sin \theta \cos \phi, \\ I_3 \dot{\omega}_2 = (I_3 - I_1) \omega_1 \omega_3 - mgh \sin \theta \sin \phi, \\ I_3 \dot{\omega}_3 = 0. \end{cases} \quad (26.1)$$

方程中已出现了欧拉角, 我们不得不运用(23.19)把 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ 用欧拉角表示. 这样一来, (26.1)就成了十分复杂的微分方程组, 很难求解.

通常转而寻找(26.1)的一些第一次积分. 但这些第一次积分很容易从拉格朗日方程得出.

(2) 拉格朗日方程

在(23.32)中, 置 $I_1 = I_2$, $V = mgh \cos \theta$, 即得

$$\begin{aligned} L = & \frac{1}{2} I_1 (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) \\ & + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 - mgh \cos \theta. \end{aligned} \quad (26.2)$$

由于 L 中不显含 φ 和 ψ , 所以广义坐标 φ 和 ψ 是可遗坐标, 相应的广义动量 p_φ 和 p_ψ 守恒, 即

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = (I_1 \sin^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta) \dot{\varphi} + I_3 \dot{\psi} \cos \theta = \text{常量}, \quad (26.3)$$

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) = \text{常量}. \quad (26.4)$$

广义坐标 φ 和 ψ 都是角坐标, 相应的广义动量必是角动量. 因为 φ 和 ψ 分别是刚体绕空间中竖直轴和刚体对称轴的角坐标, 所以广义动量 p_φ 和 p_ψ 分别是刚体相对于空间中竖直轴的角动量 L_z 和相对于对称轴的角动量 L_3 ; L_z 是角动量 \mathbf{L} 在 z 轴上的投影, L_3 是角动量 \mathbf{L} 在 x_3' 轴上的投影.

θ 不是可遗坐标, 相应的拉格朗日方程为

$$I_1 \ddot{\theta} = mgh \sin \theta - (p_\phi - I \dot{\phi} \cos \theta) \dot{\phi} \sin \theta. \quad (26.5)$$

由于 L 不显含时间 t , 哈密顿函数守恒, 并且就是机械能 E ,

$$H = \sum_{a=1}^i p_a \dot{q}_a - L = \frac{1}{2} I (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 + mgh = E. \quad (26.6)$$

(26.3)、(26.4)和(26.6)都是广义坐标的一阶微分方程, 相当于将拉格朗日方程(广义坐标的二阶微分方程)积分了一次, 叫作**第一次积分**. 重写三个第一次积分, 得到

$$\begin{cases} \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta = L_3 / I_3, & (26.7) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} I (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} \frac{L_3^2}{I_3} + mgh \cos \theta = E, & (26.8) \end{cases}$$

$$\begin{cases} I \dot{\phi} \sin^2 \theta + L_3 \cos \theta = L_x. & (26.9) \end{cases}$$

[(26.7)和(26.8)也可从(26.1)导出, 读者不妨一试.]

(3) 解算与阐释

微分方程组 (26.7)–(26.9) 的解算程序如下: 从 (26.8) 和 (26.9) 消去 $\dot{\phi}$ 得 θ 的微分方程(26.10); 从(26.10)解得 $\theta(t)$, 代入 (26.9) 得 $\dot{\phi}$ 的微分方程(26.12); 从(26.12)解得 $\phi(t)$, 代入 (26.7) 得 $\dot{\psi}$ 的微分方程, 从它解得 $\psi(t)$, 下面是具体演算过程.

从(26.8)和(26.9)消去 $\dot{\phi}$ 的结果是

$$\frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \frac{(L_x - L_3 \cos \theta)^2}{I_1 \sin^4 \theta} + mgh \cos \theta + \frac{1}{2} \frac{L_3^2}{I_3} = E.$$

作变数代换 $u = \cos \theta$, $\dot{u} = -\dot{\theta} \sin \theta$, 上式成为

$$\dot{u}^2 = \left(\frac{2E}{I_1} - \frac{L_3^2}{I_1 I_3} - \frac{2mghu}{I_1} \right) (1 - u^2) - \left(\frac{L_x - L_3 u}{I_1} \right)^2 \quad (26.10)$$

把(26.10)右边的三次式记作 $U(u)$,

$$U(u) = \left(\frac{2E}{I_1} - \frac{L_3^2}{I_1 I_3} - \frac{2mghu}{I_1} \right) (1 - u^2) - \left(\frac{L_2 - L_3 u}{I_1} \right)^2.$$

(26.10)两边开方后可以分离变数,其解是

$$t = \int^{(\alpha)} \frac{du}{\sqrt{U(u)}}, \quad (26.11)$$

右边是椭圆积分。(26.11)把 t 表为 u 的函数,原则上可以把它翻转,求得 u 作为 t 的函数。既解得 $u(t)$,代入(26.9)即得

$$\dot{\varphi} = \frac{L_2 - L_3 u}{I_1(1 - u^2)}, \quad (26.12)$$

即
$$\frac{d\varphi}{du} = \dot{\varphi} \frac{dt}{du} = \frac{L_2 - L_3 u}{I_1(1 - u^2)} \frac{1}{\sqrt{U(u)}}.$$

分离变数,各自积分,解得

$$\varphi = \int^{(\alpha)} \frac{L_2 - L_3 u}{I_1(1 - u^2)} \frac{du}{\sqrt{U}}. \quad (26.13)$$

既解得(26.11)和(26.13),代入(26.7)就可求解 ϕ 。

可是,这解是用椭圆积分表出的,不很容易直接看出它们描写怎样的运动。幸好,为了弄清楚这种运动的特征,倒并不一定需要计算这些积分。

先看(26.10). $\dot{u} = -\dot{\theta} \sin \theta$ 是实数,三次式 $U(u)$ 的值必须不为负。为此,考察 $U(u)$ 。

作为三次式,它应当有三个零点(图 6-16),按从小到大的次序记作 u_1, u_2, u_3 。容易看出

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} U(u) = \lim_{u \rightarrow +\infty} (2mgh/I_1)u^3 = +\infty,$$

$$U(+1) = -(L_2 - L_3)^2/I_1^2 \leq 0,$$

可见在区间 $u \geq +1$ 上必有零点。但 $u = \cos \theta$ 应满足 $-1 \leq$

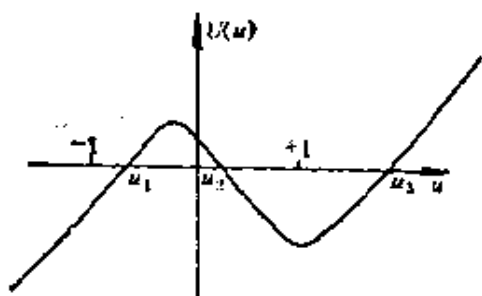


图 6-16

$u \leq +1$, 大于+1的零点是不必考虑的。现在再看三次式 $U(u)$ 在区间 $u < -1$ 有没有零点。请注意,这时 u 已不能再理解为 $\cos\theta$, 因为 $\cos\theta$ 不能小于-1, 显然 $1 - u^2 < 0$, 而

$$\begin{aligned} & \frac{2E}{I_1} - \frac{L_3^2}{I_1 I_3} - \frac{2mghu}{I_1} \\ &= \frac{2}{I_1} \left[\left(E - \frac{L_3^2}{2I_1} - mgh \cos\theta \right) + mgh(\cos\theta - u) \right], \end{aligned}$$

式中 θ 是刚体实际上可能取的任一个 θ 值。于是,利用(26.8),

$$\begin{aligned} & \frac{2E}{I_1} - \frac{L_3^2}{I_1 I_3} - \frac{2mghu}{I_1} \\ &= \frac{2}{I_1} \left[\frac{1}{2} I_1 (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2\theta) + mgh(\cos\theta - u) \right] > 0. \end{aligned}$$

这样,对于 $u < -1$,

$$\begin{aligned} U(u) &= \left(\frac{2E}{I_1} - \frac{L_3^2}{I_1 I_3} - \frac{2mghu}{I_1} \right) (1 - u^2) \\ &\quad - \left(\frac{L_2 - L_3 u}{I_1} \right)^2 < 0, \end{aligned}$$

就是说,在区间 $u < -1$ 没有零点。既然 $u = \cos\theta$ 应满足 $-1 \leq u \leq +1$, 可以断定,对于实际上所能实现的情况,另外两个零点 u_1 和 u_2 必定出现在-1和+1之间,为了满足三次式 $U(u)$ 的值不为负, u 的值就在 u_1 与 u_2 之间变动, $-1 \leq u_1 \leq u \leq u_2 \leq +1$. 相应地, $\pi \geq \theta_1 \geq \theta \geq \theta_2 \geq 0$. 刚体的对称轴的这种“纬度”变动叫作**章动**。(角 θ 叫作章动角.)

再看(26.12). 角 φ 的变动,即刚体对称轴的“经度”变动叫作**旋进**。(角 φ 叫作旋进角.) 这里有三种可能情况: ① $u_1 \leq u \leq u_2 < L_2/L_3$, 则 $\dot{\varphi}$ 始终大于零, 这就是说,进动始终朝同一方向进行,如图 6-17(a). ② $u_1 \leq u \leq u_2 = L_2/L_3$, 则对于 $u_1 \leq u$ (即 $\theta_1 \geq \theta$) 有 $\dot{\varphi} > 0$, 而对于 $u = u_2$ 却有 $\dot{\varphi} = 0$. 即当刚体对称轴抬升到最高的一瞬间,旋进角速度等于零,如图 6-17(b). ③

$u_1 < L_z/L_3 < u_2$, 则对于 $u = u_1$ (即 $\theta = \theta_1$) 有 $\dot{\phi} > 0$, 而对于 $u = u_2$ (即 $\theta = \theta_2$) 却有 $\dot{\phi} < 0$. 即, 刚体对称轴较低时和较高时的旋进方向相反, 如图 6-17 (c).

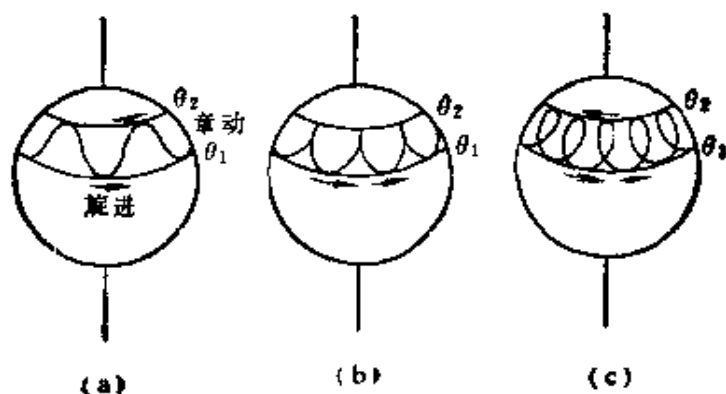


图 6-17

图 6-17 所描画的运动往往使初学力学的人感到困惑。在初学者看来, 重力的力矩应当使刚体倾倒。事实上, 如果刚体没有自转, 重力的力矩确实使刚体倾倒; 如果虽有自转但不够快, 则章动的幅度大, 章动角 θ 的极大值 θ_1 差不多等于 π , 在 θ 第一次接近 θ_1 时, 刚体通常将撞击支持物而倒下, 给人以似乎并无旋进而是一股劲朝下倾倒的印象。可是当它快速自转时, 它却显出图 6-17 所示的运动。重力的力矩为什么不能使快速自转的刚体倾倒呢? 下面尝试用简化的例子回答这个令人困惑的问题。

(4) 简明的解释

参看图 6-18(a)。使陀螺绕它的对称轴旋转, 并把轴的一端支持起来, 开始时陀螺轴是水平的。在图中, 对称轴的这个初始位置重合于 x 轴, 初始动量矩也就沿着 x 轴, 它在竖直的 z 轴上的分量 L_z 为零, 或者说, 陀螺相对于 z 轴的动量矩为零。重力 mg 对支点的力矩 M 按照右手螺旋法则沿 y 轴。

开头阶段, 重力的力矩确实使刚体稍稍向下倾, 如图 6-18

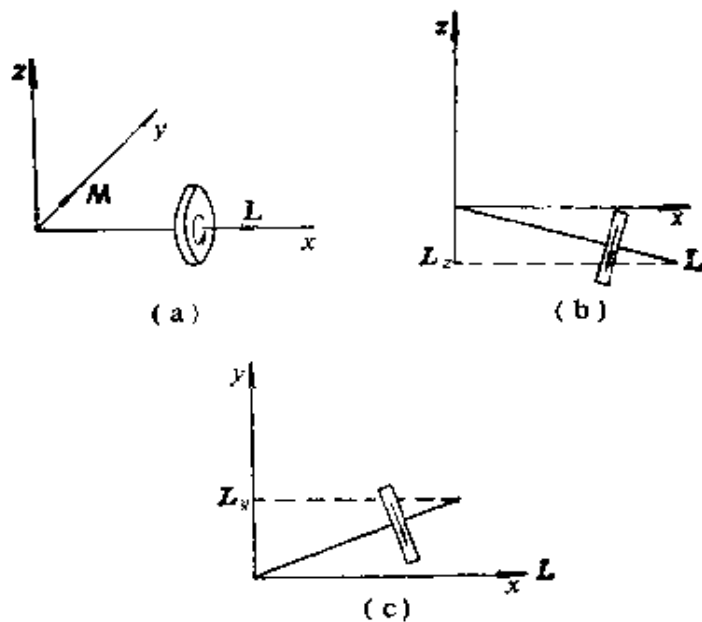


图 6-18

(b). 这一来,角动量 L 就有了 z 分量,而且这分量是负的。可是重力对 z 轴的力矩为零,从而刚体对 z 轴的角动量守恒,应该保持为零。这必定是出现了角动量正的 z 分量以抵消上述负的 z 分量。那么,这个正的 z 分量是怎么回事呢? 它没有其他来源,只可能是陀螺整体绕 z 轴转动,这就是旋进。本段可与(26.9)式相互印证。

旋进了一个小角度后, xy 平面上的投影见图 6-18(c)。这时,角动量 L 又有了 y 分量,而且这分量是正的。可是,进动本身并不提供力矩,它不应当改变 L 的 y 分量。这必定是出现了角动量负的 y 分量以抵消上述正的 y 分量。这个负的 y 分量没有其他来源,只可能是刚体整个绕 y 轴的转动,转向按右手螺旋关系联系于 y 轴的负指向。这转向事实上就是把刚体的自转轴向上(即 z 轴的正向)抬升。本段可与(26.5)式相互印证。

起初,这个上抬趋势还敌不过重力矩的下压趋势,刚体继续向下倾侧。随着倾侧的继续,进动加快;随着旋进的加快,使刚体自转轴上抬的趋势增强,终于在某个时刻达到与重力矩的下压趋势

相等。但是由于惯性,刚体仍然继续下倾。不过,既然上抬趋势已超过重力矩的下压趋势,这下倾是减速的,并终于在某个 θ_1 值停止而开始回升。随着刚体回升,旋进减慢,上抬趋势减弱,终于在某个时刻再次与重力矩的下压趋势相等。仍然由于惯性,刚体继续回升。不过这回升是减速的,并终于在某个 θ_2 值停止回升而又开始下倾。这样,刚体的轴交替地下降和上升形成章动,旋进也相应地交替加速和减速。

简单地说,重力的力矩并不是没有使高速自转的刚体向下倾,但由于动量矩守恒原理,下倾引起旋进,旋进又引起上抬趋势与重力矩的下压趋势相抗衡。

*§ 27. 带电的旋转物体在磁场中的旋进(拉莫尔旋进)

对称自转刚体在重力的力矩作用下的定点运动已在上节解出。它是比较复杂的。带电的旋转物体在磁场中的旋进却能很简便地解出。这种旋进在近代物理中十分重要,比方说,它是各种磁共振理论的基础。

带电的旋转物体具有磁矩,磁矩 μ 平行且正比于角动量 L ,

$$\mu = gL, \quad (27.1)$$

g 称为回转磁比率。

在均匀磁场 B 中,每单位体积磁矩 μ 所受力矩 M 为

$$M = \mu \times B \quad (27.2)$$

于是,依角动量定理,

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= M = \mu \times B \\ &= gL \times B = -gB \times L \end{aligned} \quad (27.3)$$

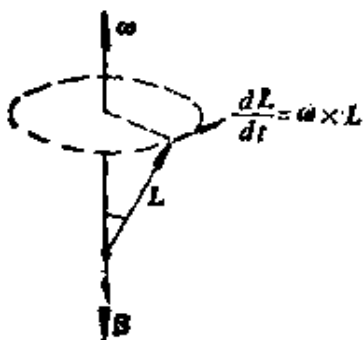


图 6-19

参看图 6-19, (27.3) 意味着矢量 \mathbf{L} 以角速度 $\boldsymbol{\omega} = -g\mathbf{B}$ 在空间中旋进。这种旋进叫作**拉莫尔旋进**。 $|\boldsymbol{\omega}| = |g\mathbf{B}|$ 叫作拉莫尔旋进频率。

现在计算回转磁比率 g 。假定组成该物体的质点的荷质比都是 e/m 。把物体划分为许许多多体积元 $d\tau$ 。如体积元 $d\tau$ 的质量为 dm , 则带电量为 $(e/m)dm$ 。以 \mathbf{v} 表示该体积元的速度, 则该体积元中的电流密度 $\mathbf{j} = \mathbf{v}(e/m)dm/d\tau$ 。于是, 磁矩

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mu} &= \frac{1}{2} \int \mathbf{r} \times \mathbf{j} d\tau = \frac{1}{2} \int \mathbf{r} \times \mathbf{v} \frac{e}{m} \frac{dm}{d\tau} d\tau \\ &= \frac{e}{2m} \int \mathbf{r} \times \mathbf{v} dm = \frac{e}{2m} \mathbf{J}.\end{aligned}$$

与(27.1)比较, 回转磁比率

$$g = \frac{e}{2m}. \quad (27.4)$$

第七章 哈密顿动力学

拉格朗日动力学用广义坐标 $q_\alpha (\alpha = 1, 2, \dots, s)$ 和广义速度 $\dot{q}_\alpha (\alpha = 1, 2, \dots, s)$ 描写力学系统的运动。哈密顿动力学则用广义坐标 $q_\alpha (\alpha = 1, 2, \dots, s)$ 和 (11.15) 所定义的广义动量 $p_\alpha (\alpha = 1, 2, \dots, s)$ 描写力学系统的运动。从量纲上看, 这样作是有利的, 因为:

$$\begin{aligned} [q_\alpha \dot{q}_\alpha] &= [q_\alpha][\dot{q}_\alpha] = [q_\alpha^2/t], \\ [p_\alpha q_\alpha] &= \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} q_\alpha \right] = \left[\frac{L}{\dot{q}_\alpha/t} q_\alpha \right] = [Lt], \end{aligned}$$

前者视 q_α 的量纲而定, 后者则与 q_α 的量纲无关, 总是“能量×时间”的量纲。“能量×时间”的量纲就是以后(33.1)和(34.5)将定义的“作用量”的量纲, 而量子论的量子化条件正是把作用量加以量子化。可见, 哈密顿动力学可作为从古典力学到量子力学的“跳板”。

此外, 哈密顿动力学为统计力学提供了一条基本定理——刘维定理。

§ 28. 哈密顿正则方程

今后我们将限于研究这样一种力学系统, 它只有完整约束, 并且主动力都是具有势能或广义势能的, 总之, 它的动力学方程是拉格朗日方程(11.10)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s), \quad (28.1)$$

(1) 哈密顿正则方程

动力学方程(28.1)是 $q_\alpha (\alpha = 1, 2, \dots, s)$ 的 s 个二阶常微分方程, 它们又可以改写为

$$\dot{p}_\alpha = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s), \quad (28.2)$$

其中 p_α 按定义为

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s). \quad (28.3)$$

这样, 力学系统的动力学方程又可以归结为 $2s$ 个一阶微分方程(28.2)和(28.3).

现在尝试改用广义坐标 $q_\alpha (\alpha = 1, 2, \dots, s)$ 和广义动量 $p_\alpha (\alpha = 1, 2, \dots, s)$ 以代替 q_α 和 \dot{q}_α , 这意思是说, 把拉格朗日函数 $L(q, \dot{q}, t)$ 看作复合函数

$$L = L[q, \dot{q}(q, p), t]. \quad (28.4)$$

为了得到直接用 q_α 和 p_α 表示的拉格朗日函数 $\bar{L}(q, p, t)$, 应消去 \dot{q}_α . 为此, 从 p_α 的定义式(28.3)“解出”广义速度

$$\dot{q}_\beta = \dot{q}_\beta(q, p, t) \quad (\beta = 1, 2, \dots, s). \quad (28.5)$$

以(28.5)代入(28.4)就得到直接用 q_α 和 p_α 表示的拉格朗日函数

$$\bar{L}(q, p, t) = L[q, \dot{q}(q, p, t), t]. \quad (28.6)$$

下面的问题是把动力学方程(28.2)和(28.3)用 \bar{L} 表出.

按照多元复合函数的偏导数计算规则, 由(28.6)得

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{L}}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} + \sum_{\beta=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\beta} \frac{\partial \dot{q}_\beta}{\partial q_\alpha}, \\ \frac{\partial \bar{L}}{\partial p_\alpha} = \sum_{\beta=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\beta} \frac{\partial \dot{q}_\beta}{\partial p_\alpha} \end{cases} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s). \quad (28.7)$$

注意: 尽管 $\bar{L} = L$, 但 $\partial \bar{L} / \partial q_\alpha \neq \partial L / \partial q_\alpha$. 这是因为在计算偏导数 $\partial \bar{L} / \partial q_\alpha$ 时把 p_α 当作常数, 而在计算偏导数 $\partial L / \partial q_\alpha$ 时把 \dot{q}_α 当作常数, 在偏导数的计算中必须留心这种差别, 否则很容易

发生错误。

把动力学方程(28.2)和(28.3)代入(28.7)即得用 q_α 和 p_α ($\alpha=1, 2, \dots, s$) 表出的动力学方程

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{L}}{\partial q_\alpha} = \dot{p}_\alpha + \sum_{\beta=1}^s p_\beta \frac{\partial \dot{q}_\beta}{\partial q_\alpha}, \\ \frac{\partial \bar{L}}{\partial p_\alpha} = \sum_{\beta=1}^s p_\beta \frac{\partial \dot{q}_\beta}{\partial p_\alpha} \end{cases} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s). \quad (28.8)$$

(28.8)是保守力或有广义势的力作用下并且只有完整约束的力学系统的动力学方程,或者说,(28.8)式反映了这种系统一般的运动规律。可是,在外观上,它含有 $\partial \dot{q}_\beta / \partial q_\alpha$ 和 $\partial \dot{q}_\beta / \partial p_\alpha$,这两种偏导数取决于具体的关系式(28.5),这归根结蒂又取决于广义坐标 q_α 的具体选择。作为一般规律,外观上却取决于具体的选择,这无疑是不恰当的。因此,我们应当设法消除这个内容与外观的不相称。

仔细观察(28.8),右边的累加式分别是

$$\begin{aligned} \sum_{\beta=1}^s p_\beta \frac{\partial \dot{q}_\beta}{\partial q_\alpha} &= \sum_{\beta=1}^s \frac{\partial}{\partial q_\alpha} (p_\beta \dot{q}_\beta), \\ \sum_{\beta=1}^s p_\beta \frac{\partial \dot{q}_\beta}{\partial p_\alpha} &= \sum_{\beta=1}^s \frac{\partial}{\partial p_\alpha} (p_\beta \dot{q}_\beta) - \dot{q}_\alpha. \end{aligned}$$

这样,(28.8)可改写为

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \left(\sum_{\beta=1}^s p_\beta \dot{q}_\beta - \bar{L} \right) = -\dot{p}_\alpha, \\ \frac{\partial}{\partial p_\alpha} \left(\sum_{\beta=1}^s p_\beta \dot{q}_\beta - \bar{L} \right) = \dot{q}_\alpha \end{cases} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s).$$

读者想必还记得,(11.18)已把 $\sum_{\beta=1}^s p_\beta \dot{q}_\beta - L$ 定义为哈密顿函数

H ,因而,(28.8)就成为

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} = -\dot{p}_\alpha, \\ \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} = \dot{q}_\alpha \end{cases} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s). \quad (28.9)$$

这就是说，用广义坐标和广义速度描写运动时，拉格朗日函数 $L(q, \dot{q}, t)$ 起着支配作用，运动的规律表为拉格朗日方程(11.10)；但用广义坐标和广义动量描写运动时，拉格朗日函数不再起支配作用，哈密顿函数 $H(p, q, t)$ 代替它起支配作用，运动的规律表为(28.9)。

注意 哈密顿动力学用广义坐标和广义动量描写运动，所以 H 必须是用广义坐标和广义动量表出的 $H(p, q, t)$ 。第二章一第六章多次用广义坐标和广义速度表出 $H(q, \dot{q}, t)$ ，这种作法对于哈密顿动力学是不合适的。

运动规律(28.9)叫作**哈密顿正则方程**，“正则”是说形式简单而对称。哈密顿正则方程是描写实际运动的 q_α 和 p_α ($\alpha = 1, 2, \dots, s$) 的 $2s$ 个一阶常微分方程；但为了写出这些方程，需要先计算偏导数 $\partial H/\partial q_\alpha$ 和 $\partial H/\partial p_\alpha$ ，这是说，哈密顿函数 $H(p, q, t)$ 中的 p_α 和 q_α ($\alpha = 1, 2, \dots, s$) 描写的是瞬时“冻结”的约束条件所允许的一切可能运动。

(2) 勒让德变换

偏导数的计算，如果不留心，比较容易发生错误。微分式则比较不容易发生错误，这里改用微分式重新推导哈密顿正则方程。

在数学上，拉格朗日函数 $L(q, \dot{q}, t)$ 的微分

$$dL(q, \dot{q}, t) = \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} dq_\alpha + \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} d\dot{q}_\alpha + \frac{\partial L}{\partial t} dt.$$

把动力学方程(28.2)和(28.3)代入上式，得

$$dL = \sum_{\alpha=1}^s \dot{p}_\alpha dq_\alpha + \sum_{\alpha=1}^s p_\alpha d\dot{q}_\alpha + \frac{\partial L}{\partial t} dt.$$

这可说是动力学方程(28.2)和(28.3)的另一表达方式。

虽然 $L(q, \dot{q}, t)$ 与 $\bar{L}(q, p, t)$ 的宗量不同, 它们的微分式是一样的,

$$d\bar{L} = dL = \sum_{\alpha=1}^s \dot{p}_\alpha dq_\alpha + \sum_{\alpha=1}^s p_\alpha d\dot{q}_\alpha + \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (28.10)$$

既然用广义坐标和广义动量描写运动, 而不用广义速度, 那就应当设法消除上式中的 $d\dot{q}_\alpha (\alpha = 1, 2, \dots, s)$ 而引入 $d\dot{p}_\alpha (\alpha = 1, 2, \dots, s)$. 为此, 考察微分式

$$d\left(\sum_{\alpha=1}^s p_\alpha \dot{q}_\alpha\right) = \sum_{\alpha=1}^s \dot{q}_\alpha dp_\alpha + \sum_{\alpha=1}^s p_\alpha d\dot{q}_\alpha.$$

从这式减去(28.10), 即得

$$\begin{aligned} dH \equiv d\left(\sum_{\alpha=1}^s p_\alpha \dot{q}_\alpha - L\right) &= \sum_{\alpha=1}^s (-\dot{p}_\alpha) dq_\alpha \\ &+ \sum_{\alpha=1}^s \dot{q}_\alpha dp_\alpha - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \end{aligned} \quad (28.11)$$

在数学上, 哈密顿函数 $H(p, q, t)$ 的微分

$$dH(p, q, t) = \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} dq_\alpha + \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} dp_\alpha + \frac{\partial H}{\partial t} dt.$$

拿这式跟(28.11)比较, 得到

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} = -\dot{p}_\alpha, \\ \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} = \dot{q}_\alpha, \end{cases} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s),$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \quad (28.12)$$

这就简便地导出了哈密顿正则方程。另外, 我们还得到(28.12), 它指出 H 是否显含时间完全视 L 是否显含时间而定。

利用微分式 $d\left(\sum_{\alpha=1}^s p_\alpha \dot{q}_\alpha\right)$ 把变数从 q, \dot{q}, t 改为 p, q, t , 同时

把起支配作用的函数 L 变换为 $\sum_{\alpha=1}^s p_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} - L$, 这种方法叫作**勒让德变换**。勒让德变换是很有用的, 特别是热力学频繁地加以应用。

(3) 守恒原理

拉格朗日动力学中有广义动量守恒原理和哈密顿函数守恒原理。哈密顿动力学同样也有这些守恒原理。

如哈密顿函数 H 不含有某个广义坐标 q_{β} , 即 $\partial H / \partial q_{\beta} = 0$, 则哈密顿正则方程(28.9)给出 $\dot{p}_{\beta} = 0$, 即广义动量 p_{β} 守恒,

$$p_{\beta} = \text{常数(如 } H \text{ 不含有 } q_{\beta}\text{)}. \quad (28.13)$$

这就是哈密顿动力学中的**广义动量守恒原理**。

§11 的广义动量守恒原理(11.16)的条件是 L 不含有 q_{β} , (28.13) 的条件则是 H 不含有 q_{β} , 这两条件是完全等价的。事实上,

$$H(p, q, t) = \sum_{\alpha=1}^s p_{\alpha} \dot{q}_{\alpha}(p, q, t) - L[q, \dot{q}(p, q, t), t],$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_{\beta}} = \sum_{\alpha=1}^s p_{\alpha} \frac{\partial \dot{q}_{\alpha}}{\partial q_{\beta}} - \left[\frac{\partial L}{\partial q_{\beta}} + \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \frac{\partial \dot{q}_{\alpha}}{\partial q_{\beta}} \right].$$

把广义动量 p_{α} 的定义代入上式右边, 即得

$$\frac{\partial H}{\partial q_{\beta}} = - \frac{\partial L}{\partial q_{\beta}}. \quad (28.14)$$

由此可见, 在 $L(q, \dot{q}, t)$ 和 $H(p, q, t)$ 两者中, 其一不含有广义坐标 q_{β} , 另一必定也不含有 q_{β} 。

不含有 $L(q, \dot{q}, t)$ 和 $H(p, q, t)$ 中的广义坐标 q_{β} 叫作**可遗坐标**。与可遗坐标对应的广义动量 p_{β} 守恒。某一广义动量守恒, 给问题的解算将带来便利, 这对拉格朗日动力学和哈密顿动力学是共同的。但是, 哈密顿动力学更适宜于处理可遗坐标。拉格朗日函数 $L(q, \dot{q}, t)$ 虽然不含有可遗坐标 q_{β} , 但可以含有相应的广义速度 \dot{q}_{β} 这个变数, 问题仍然是 s 个自由度的问题。哈密顿函

数 $H(p, q, t)$ 不仅不含有可遗坐标 q_β , 而且所含的相应广义动量 p_β 是常数, 因此这一个自由度可说已解出, 只要解算其他自由度就行了. 可见在哈密顿动力学中, 可遗坐标才真正是可忽略的.

现在转到哈密顿函数守恒原理. 先计算哈密顿函数 $H(p, q, t)$ 的时间变化率

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{\alpha=1}^i \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \sum_{\alpha=1}^i \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \dot{p}_\alpha + \frac{\partial H}{\partial t}.$$

以哈密顿正则方程(28.9)代入上式右边,

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{\alpha=1}^i (-\dot{p}_\alpha) \dot{q}_\alpha + \sum_{\alpha=1}^i \dot{q}_\alpha \dot{p}_\alpha + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (28.15)$$

这就是说, 哈密顿函数 $H(p, q, t)$ 如果不显含时间, 它就是守恒的. 这可说是哈密顿动力学中的**哈密顿函数守恒原理**.

以(28.12)代入(28.15)的右边,

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \quad (28.16)$$

这就再次得到(11.19)所表述的哈密顿函数守恒原理: 如拉格朗日函数 $L(q, \dot{q}, t)$ 不显含时间, 则哈密顿函数 H 守恒.

此外, §11(5)节曾经证明, 如矢径 r_i 与广义坐标 $q_\alpha (\alpha = 1, 2, \dots, i)$ 的变换式不显含时间,

$$r_i = r_i(q_1, q_2, \dots, q_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

则哈密顿函数 H 就是机械能. 在这种情况下, 哈密顿函数守恒原理就是机械能守恒原理.

(4) 例 题

例 1 用哈密顿正则方程研究图 7-1 的弹簧振子. 质量为 m 的物体在光滑水平面上沿 x 轴运动, 弹簧的劲度系数为 k .

解 本题只有一个自由度. 把弹簧既不伸长也不缩短时物体所在处取作 x 轴的起点, 则弹性势能 $V = \frac{1}{2} kx^2$. 动能 $T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2$.

于是拉格朗日函数

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2. \quad (1)$$

按定义, 广义动量

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m \dot{x}.$$

用广义动量表出广义速度,

$$\dot{x} = \frac{1}{m} p.$$

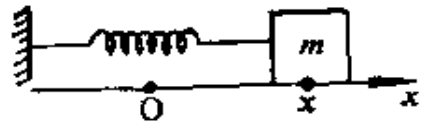


图 7-1

于是, 哈密顿函数

$$\begin{aligned} H = p\dot{x} - L &= \frac{1}{m} p^2 - \left(\frac{1}{2m} p^2 - \frac{1}{2} k x^2 \right) \\ &= \frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} k x^2. \end{aligned} \quad (2)$$

应用哈密顿正则方程, 得到弹簧振子的动力学方程

$$\begin{cases} kx = -\dot{p}, \\ \frac{1}{m} p = \dot{x}. \end{cases}$$

后一式对时间微分一次就能与前一式消去 p , 得

$$m\ddot{x} = -kx. \quad (3)$$

这是著名的谐振子运动方程, 它的解是

$$x = C \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \theta \right),$$

这里 C 和 θ 是积分常数. 相应地

$$p = m\dot{x} = -C \sqrt{km} \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \theta \right).$$

把这里的 x 和 p 代回 (2) 可得 $C = \sqrt{\frac{2E}{k}}$, E 是谐振子的能量. 这样,

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{\frac{2E}{k}} \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \theta \right), \\ p &= -\sqrt{2Em} \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \theta \right). \end{aligned} \quad (4)$$

按“牛顿方式”很容易直接写出运动方程 (3). 事实上, 没有约束条件或

者约束条件比较少的力学系统,用分析力学来求解往往不比“牛顿方式”简便。但是,熟悉一下谐振子的哈密顿函数 $H(p, x)$ 的(2)式,对于学习量子力学是有好处的。

例 2 一根柔软轻绳绕过定滑轮 A, 一端挂着质量 $m_1 = 5$ 千克的物体, 另一端挂着轻滑轮 B。另一根柔软轻绳绕过滑轮 B, 两端分别挂着质量 $m_2 = 3$ 千克和 $m_3 = 2$ 千克的物体。试研究这三个物体的运动情况。设这两根绳都是不可伸长的, 其长度分别为 l_1 和 l_2 。

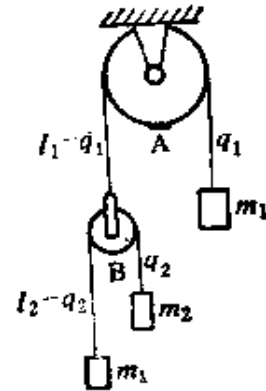


图 7-2

解 本例有两个自由度。取图 7-2 中标明的 q_1 和 q_2 作为广义坐标。

先看质量为 m_1 的那个物体。它的势能 $V_1 = -m_1 g q_1$ (取滑轮 A 轴心处的势能为零); 它的动能

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 \dot{q}_1^2.$$

再看质量为 m_2 的那个物体。它的势能 $V_2 = -m_2 g [(l_1 - q_1) + q_2]$ 。它的动能并不是 $\frac{1}{2} m_2 \dot{q}_2^2$ 。问题在于 \dot{q}_2 只是它相对于滑轮 B 的速度, 它的“绝对”速度应是 $d[(l_1 - q_1) + q_2]/dt$ 即 $\dot{q}_2 - \dot{q}_1$, 因而它的动能

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 (\dot{q}_2 - \dot{q}_1)^2.$$

最后, 看质量为 m_3 的那个物体。它的势能 $V_3 = -m_3 g [(l_1 - q_1) + (l_2 - q_2)]$; 它的动能

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 \left[\frac{d}{dt} (l_1 - q_1 + l_2 - q_2) \right]^2 = \frac{1}{2} m_3 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2.$$

系统的拉格朗日函数

$$\begin{aligned} L = T - V &= \frac{1}{2} m_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{q}_1 - \dot{q}_2)^2 + \frac{1}{2} m_3 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 \\ &\quad + m_1 g q_1 + m_2 g (l_1 - q_1 + q_2) \\ &\quad + m_3 g (l_1 + l_2 - q_1 - q_2) \\ &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2 + m_3) \dot{q}_1^2 - (m_2 - m_3) \dot{q}_1 \dot{q}_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} (m_2 + m_3) \dot{q}_2^2 + (m_1 - m_2 - m_3) g q_1 + (m_2 \\
& - m_3) g q_2 + (m_2 + m_3) g l_1 + m_3 g l_2.
\end{aligned} \tag{1}$$

按定义, 广义动量

$$\begin{cases} p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = (m_1 + m_2 + m_3) \dot{q}_1 - (m_2 - m_3) \dot{q}_2, \\ p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = -(m_2 - m_3) \dot{q}_1 + (m_2 + m_3) \dot{q}_2. \end{cases} \tag{2}$$

从(2)“解出”广义速度 \dot{q}_1 和 \dot{q}_2 , 就是说用 p_1 和 p_2 表出 \dot{q}_1 和 \dot{q}_2 ,

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = \frac{1}{m_1 m_2 + m_1 m_3 + 4m_2 m_3} [(m_2 + m_3) p_1 + (m_2 - m_3) p_2], \\ \dot{q}_2 = \frac{1}{m_1 m_2 + m_1 m_3 + 4m_2 m_3} [(m_2 - m_3) p_1 + (m_1 + m_2 + m_3) p_2]. \end{cases} \tag{3}$$

于是, 系统的哈密顿函数

$$\begin{aligned}
H &= p_1 \dot{q}_1 + p_2 \dot{q}_2 - L \\
&= \frac{(m_2 + m_3) p_1^2 + 2(m_2 - m_3) p_1 p_2 + (m_1 + m_2 + m_3) p_2^2}{m_1 m_2 + m_1 m_3 + 4m_2 m_3} - L.
\end{aligned} \tag{4}$$

本例的 T 是广义速度 \dot{q}_1 和 \dot{q}_2 的二次齐次式. 根据齐次函数的欧拉定理, $p_1 \dot{q}_1 + p_2 \dot{q}_2 = (\partial T / \partial \dot{q}_1) \dot{q}_1 + (\partial T / \partial \dot{q}_2) \dot{q}_2 = 2T$. 因此①

$$\begin{aligned}
H &= p_1 \dot{q}_1 + p_2 \dot{q}_2 - L = 2T - (T - V) = T + V \\
&= \frac{1}{2} (p_1 \dot{q}_1 + p_2 \dot{q}_2) + V \\
&= \frac{(m_2 + m_3) p_1^2 + 2(m_2 - m_3) p_1 p_2 + (m_1 + m_2 + m_3) p_2^2}{2(m_1 m_2 + m_1 m_3 + 4m_2 m_3)} \\
&\quad - (m_1 - m_2 - m_3) g q_1 - (m_2 - m_3) g q_2 \\
&\quad - (m_2 + m_3) g l_1 - m_3 g l_2.
\end{aligned} \tag{5}$$

应用哈密顿正则方程, 得到这两个自由度的动力学方程

$$\begin{cases} -(m_1 - m_2 - m_3) g = -p_1, \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{m_1 m_2 + m_1 m_3 + 4m_2 m_3} [(m_2 + m_3) p_1 + (m_2 - m_3) p_2] = \dot{q}_1. \end{cases} \tag{7}$$

① 不用欧拉定理, 以(3)代入(1), 再以(1)代入(4)也能算出(5).

$$\begin{cases} -(m_2 - m_3)g = -\dot{p}_2 & (8) \\ \frac{1}{m_1 m_2 + m_1 m_3 + 4m_2 m_3} [(m_2 - m_3)p_1 + (m_1 + m_2 + m_3)p_2] = \dot{q}_2 & (9) \end{cases}$$

把(7)和(9)分别对时间 t 微分一次, 然后以(6)和(8)代入就消去广义动量而得到

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = \frac{m_1 m_2 + m_1 m_3 - 4m_2 m_3}{m_1 m_2 + m_1 m_3 + 4m_2 m_3} g = \frac{1}{49} g, \\ \dot{q}_2 = \frac{2m_1 m_2 - 2m_1 m_3}{m_1 m_2 + m_1 m_3 + 4m_2 m_3} g = \frac{10}{49} g. \end{cases} \quad (10)$$

由此可见, \dot{q}_1 与 \dot{q}_2 是常量, 即三个物体分别作匀加速运动, 其加速度各为

$$a_1 = \dot{q}_1 = \frac{1}{49} g,$$

$$a_2 = \dot{q}_2 - \dot{q}_1 = \frac{9}{49} g,$$

$$a_3 = -(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) = -\frac{11}{49} g.$$

第三个物体的加速度向上, 另外两个物体的加速度向下.

例3 质量为 M 的楔子置于光滑的水平桌面上. 楔子底面也是光滑的, 斜面却是粗糙的. 质量为 m 、半径为 R 的圆柱体沿着楔子斜面无滑动地滚下. 求解楔子和圆柱体的运动.

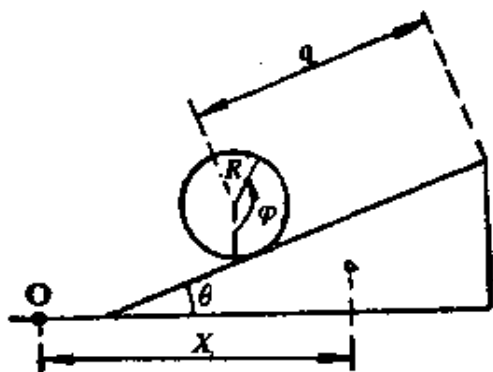


图 7-3

解 楔子可在水平方向运动. 取桌面上的固定点 O 为原点, 把楔子的质心(其实不一定要质心, 改为楔子的任一点都行)相对于 O 点的水平坐标记作 x .

圆柱体可在楔子的斜面上滚动. 把柱轴相对于楔子斜面上端并沿斜边

计算的坐标记作 q , 把圆柱某根半径与竖直向下之间的夹角记作 φ . 无滑动这个约束条件可写为

$$\dot{q} = R\dot{\varphi}.$$

这个运动约束可以积分为

$$q = R\varphi + C, \quad (1)$$

C 是积分常数. (1) 式是完整约束, q 和 φ 不独立.

这个系统有两个自由度, x 和 φ 是两个独立的广义坐标, q 则可通过(1)式用 φ 表出.

主动力是楔子和圆柱体所受的重力, 它们都是势力. 楔子的势能在运动过程中不起变化, 可不考虑. 我们只需要圆柱体的势能,

$$V = -mgq \sin \theta = -mgR\varphi \sin \theta - mgC \sin \theta.$$

上式右边第二项是常数, 拟舍去, 这是因为势能本来就可以加减一个常数.

楔子的动能简单地写作 $\frac{1}{2} M\dot{x}^2$. 至于圆柱体的动能则包括质心的动能 T_0 以及它绕质心的转动动能 T' . T' 很容易写出,

$$T' = \frac{1}{2} I\dot{\varphi}^2,$$

式中 I 是转动惯量, 圆柱绕其对称轴转动的转动惯量 $I = \frac{1}{2} mR^2$. 计算 T_0

的时候要注意, 圆柱体质心的速度不仅是沿斜面的 \dot{q} , 而且还有随着楔子在水平方向运动的速度 \dot{x} , 所以

$$\begin{aligned} T_0 &= \frac{1}{2} m [v^2_{\text{水平}} + v^2_{\text{垂直}}] \\ &= \frac{1}{2} m [(\dot{x} - \dot{q} \cos \theta)^2 + \dot{q}^2 \sin^2 \theta] \\ &= \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 - 2\dot{x}\dot{q} \cos \theta + \dot{q}^2) \\ &= \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 - 2R\dot{x}\dot{\varphi} \cos \theta + R^2\dot{\varphi}^2). \end{aligned}$$

总之, 系统的拉格朗日函数

$$L = T - V = \frac{1}{2} (M + m)\dot{x}^2 - mR\dot{x}\dot{\varphi} \cos \theta + \frac{1}{2} mR^2\dot{\varphi}^2$$

$$+ \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2 + mgR\phi \sin \theta. \quad (2)$$

按定义, 广义动量

$$\begin{cases} p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{X}} = (M + m)\dot{X} - mR\dot{\phi} \cos \theta, \\ p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = -mR\dot{X} \cos \theta + (mR^2 + I)\dot{\phi}. \end{cases} \quad (3)$$

从(3)“解出”广义速度 \dot{X} 和 $\dot{\phi}$,

$$\begin{cases} \dot{X} = \frac{(mR^2 + I)p_x + (mR \cos \theta)p_\varphi}{MmR^2 + m^2R^2 \sin^2 \theta + (M + m)I}, \\ \dot{\phi} = \frac{(mR \cos \theta)p_x + (M + m)p_\varphi}{MmR^2 + m^2R^2 \sin^2 \theta + (M + m)I}. \end{cases} \quad (4)$$

于是, 系统的哈密顿函数

$$\begin{aligned} H &= p_x \dot{X} + p_\varphi \dot{\phi} - L \\ &= \frac{(mR^2 + I)p_x^2 + (2mR \cos \theta)p_x p_\varphi + (M + m)p_\varphi^2}{MmR^2 + m^2R^2 \sin^2 \theta + (M + m)I} - L. \end{aligned}$$

本例的 T 是广义速度 \dot{X} 和 $\dot{\phi}$ 的二次齐次式. 根据齐次函数的欧拉定理, $p_x \dot{X} + p_\varphi \dot{\phi} = 2T$, 因此

$$\begin{aligned} H &= 2T - (T - V) = T + V = \frac{1}{2} (p_x \dot{X} + p_\varphi \dot{\phi}) + V \\ &= \frac{(mR^2 + I)p_x^2 + (2mR \cos \theta)p_x p_\varphi + (M + m)p_\varphi^2}{2[MmR^2 + m^2R^2 \sin^2 \theta + (M + m)I]} \\ &\quad - mgR\phi \sin \theta. \end{aligned} \quad (5)$$

哈密顿函数(5)不含有广义坐标 X , 所以 X 是可遗坐标, 相应的广义动量 p_x 守恒,

$$(M + m)\dot{X} - mR\dot{\phi} \cos \theta = p_x = \text{常数}. \quad (6)$$

在哈密顿函数(5)中, p_x 是常数, 那就只需求解广义坐标 φ 所对应的那一个自由度. 对这自由度应用哈密顿正则方程, 得到

$$\begin{cases} -mgR \sin \theta = -\dot{p}_\varphi \\ \frac{(mR \cos \theta)p_x + (M + m)p_\varphi}{MmR^2 + m^2R^2 \sin^2 \theta + (M + m)I} = \dot{\phi} \end{cases} \quad (7)$$

$$\frac{(mR \cos \theta)p_x + (M + m)p_\varphi}{MmR^2 + m^2R^2 \sin^2 \theta + (M + m)I} = \dot{\phi} \quad (8)$$

(8)式对时间微分一次, 再以(7)式代入就消去 \dot{p}_φ ,

$$\ddot{\varphi} = \frac{(M+m)mgR \sin \theta}{MmR^2 + m^2R^2 \sin^2 \theta + (M+m)I} \quad (9)$$

(9)指出圆柱体的滚动是匀加速的,角加速度的值由(9)的右边给出.

(9)式对时间积分一次,

$$\dot{\varphi} = \frac{(M+m)mR \sin \theta}{MmR^2 + m^2R^2 \sin^2 \theta + (M+m)I} g t + \omega_0, \quad (10)$$

ω_0 是初始角速度. 以(10)代入(6),得楔子水平方向运动速度

$$\dot{x} = \frac{1}{M+m} p_x + \frac{mR}{M+m} \omega_0 \cos \theta + \frac{m^2R^2 \sin \theta \cos \theta}{MmR^2 + m^2R^2 \sin^2 \theta + (M+m)I} g t.$$

例 4 半径为 R 的圆盘竖直放置. 一根长为 $l + R\pi/2$ 的不可伸长的轻绳,上段绕在圆盘边缘上,上端固定在圆盘最高点,如图 7-4 所示. 绳的下端系着质量为 m 的质点. 导出质点的运动方程,并求小振动的频率.

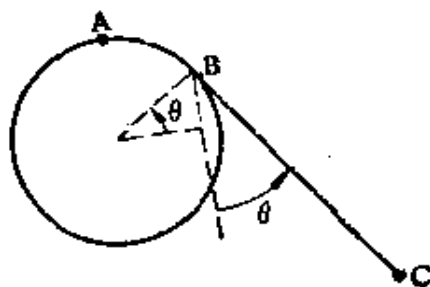


图 7-4

解 本例只有一个自由度, θ 就是适当的广义坐标.

绳的 AB 段长为 $R\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$, 因

而 BC 段的长为 $\left(l + \frac{\pi}{2}R\right) - R\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ 即 $l + R\theta$. 质点的动能为

$$T = \frac{1}{2} m(l + R\theta)^2 \dot{\theta}^2,$$

若以圆盘圆心为计算零点,则质点的势能为

$$V = mgR \sin \theta - mg(l + R\theta) \cos \theta.$$

拉格朗日函数

$$L = T - V = \frac{1}{2} m(l + R\theta)^2 \dot{\theta}^2 - mgR \sin \theta + mg(l + R\theta) \cos \theta. \quad (1)$$

按定义,广义动量

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m(l + R\theta)^2 \dot{\theta}.$$

从上式“解出”广义速度

$$\dot{\theta} = \frac{1}{m(l + R\theta)^2} p.$$

于是,哈密顿函数

$$\begin{aligned} H = p\dot{\theta} - L &= \frac{1}{m(l + R\theta)^2} p^2 - L \\ &= \frac{1}{2m(l + R\theta)^2} p^2 + mgR \sin \theta - mg(l + R\theta) \cos \theta, \end{aligned} \quad (2)$$

应用哈密顿正则方程,得到

$$\left\{ \begin{aligned} -\frac{R}{m(l + R\theta)^3} p^2 + mg(l + R\theta) \sin \theta &= -\dot{p}, \end{aligned} \right. \quad (3)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{m(l + R\theta)^2} p &= \dot{\theta}, \end{aligned} \right. \quad (4)$$

由(4), $p = m(l + R\theta)^2 \dot{\theta}$. 以此代入(3),

$$\frac{d}{dt} [m(l + R\theta)^2 \dot{\theta}] = mR(l + R\theta) \dot{\theta}^2 - mg(l + R\theta) \sin \theta. \quad (5)$$

$$\text{即} \quad m(l + R\theta)^2 \ddot{\theta} + mR(l + R\theta) \dot{\theta}^2 = -mg(l + R\theta) \sin \theta. \quad (6)$$

这就是质点的运动方程.

改写 θ ,

$$\theta = \frac{d\dot{\theta}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \frac{d\dot{\theta}}{d\theta} = \frac{1}{2} \frac{d\dot{\theta}^2}{d\theta}.$$

于是,(6)成为

$$\frac{d}{d\theta} \left[\frac{1}{2} m(l + R\theta)^2 \dot{\theta}^2 \right] = \frac{d}{d\theta} [-mgR \sin \theta + mg(l + R\theta) \cos \theta],$$

从而得到运动方程(5)的第一次积分

$$\frac{1}{2} m(l + R\theta)^2 \dot{\theta}^2 + mgR \sin \theta - mg(l + R\theta) \cos \theta = C, \quad (7)$$

式中积分常数 C 取决于初始条件. 其实,(7)不过是机械能守恒的表示式. 因为本例的 H 就是机械能,而且 H 不显含时间,所以机械能得以守恒.

对于小振动, θ , $\dot{\theta}$ 和 $\ddot{\theta}$ 都是小量. 在运动方程(6)中略去二阶以及二阶以上的小量,并以 θ 代替 $\sin \theta$,

$$ml^2 \ddot{\theta} = -mgl\theta,$$

即
$$I\ddot{\theta} + g\theta = 0.$$

这是谐振动方程, 它的角频率

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}},$$

而频率则是 $\frac{1}{2\pi} \omega$.

本例如果按“牛顿方式”求解, 需要一定的洞察力. 事实上, 选取平移坐标系, 其原点随着绳与圆盘的切点移动, 相对于这个平移坐标系原点的角动量定理正是(5), 该式右边两项分别是惯性力和重力的力矩. 至于按分析力学方式, 只要按部就班作下去, 就可以顺利地导出动力学方程.

例 5 细杆长为 l 、质量为 M , 静止在光滑水平面上, 有一质量为 m 的质点沿着与杆垂直的方向, 以速度 v_0 向杆的 A 端运动, 并发生完全无弹性碰撞, 碰后粘在 A 端(图 7-5), 试求此系统碰后的运动情况.

解 碰后, 质点粘在杆的 A 端. 设此系统的质心在 C 点, 则由质心的定义可知

$$\overline{AC} = \frac{M}{M+m} \frac{l}{2},$$

$$\overline{BC} = \frac{m}{M+m} \frac{l}{2} + \frac{l}{2} = \frac{l}{2} \frac{M+2m}{M+m}.$$

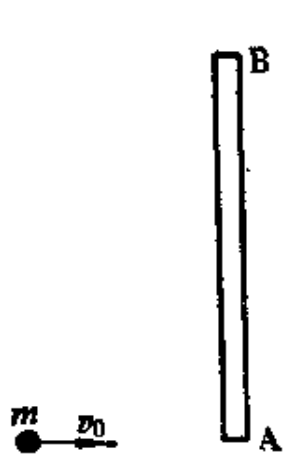


图 7-5

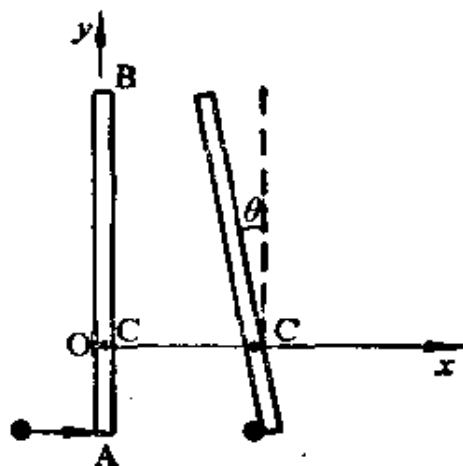


图 7-6

取碰撞刚完成的那个瞬间作为计时的起点 $t = 0$. 取静止参考系, 而以

质心在 $t = 0$ 的位置为坐标原点 O ，质心在这静止参考系中的坐标记作 $x_c(t), y_c(t)$ 。

系统作平面运动，有三个自由度，取质心坐标 x_c 及 y_c 和绕质心的转角 θ 为广义坐标(图 7-6)，系统的动能为

$$T = \frac{1}{2} (M + m)(\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2) + \frac{1}{2} I_M \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_m \dot{\theta}^2,$$

式中 I_M 和 I_m 分别是细杆和质点对质心 C 的转动惯量，

$$I_M = \frac{1}{12} M l^2 + M \frac{m^2}{(M + m)^2} \frac{l^2}{4},$$

$$I_m = m \left(\frac{M}{M + m} \right)^2 \frac{l^2}{4},$$

这样，

$$T = \frac{1}{2} (M + m)(\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2) + \frac{1}{2} \cdot \frac{l^2}{12} \frac{M^2 + 4Mm}{M + m} \dot{\theta}^2.$$

若以水平面上的势能为势能的零点，则系统的势能 V 恒为零。从而拉格朗日函数

$$L = T - V.$$

按定义，广义动量

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_c} = (M + m)\dot{x}_c,$$

$$p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_c} = (M + m)\dot{y}_c,$$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{l^2}{12} \frac{M^2 + 4Mm}{M + m} \dot{\theta}.$$

从上式解出广义速度

$$\dot{x}_c = \frac{p_x}{M + m},$$

$$\dot{y}_c = \frac{p_y}{M + m},$$

$$\dot{\theta} = \frac{12(M + m)}{l^2 M(M + 4m)} p_\theta.$$

于是,哈密顿函数

$$H = p_x \dot{x}_C + p_y \dot{y}_C + p_\theta \dot{\theta} - L.$$

在本例中, T 是广义速度 \dot{x}_C, \dot{y}_C 及 $\dot{\theta}$ 的二次齐次式。而根据齐次函数的欧勒定理,

$$p_x \dot{x}_C + p_y \dot{y}_C + p_\theta \dot{\theta} = 2T,$$

因此

$$\begin{aligned} H &= 2T - (T - V) = T + V \\ &= \frac{1}{2} (p_x \dot{x}_C + p_y \dot{y}_C + p_\theta \dot{\theta}) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{p_x^2}{M+m} + \frac{p_y^2}{M+m} + \frac{12}{l^2} \frac{(M+m)}{M(M+4m)} p_\theta^2 \right). \end{aligned}$$

应用哈密顿正则方程。首先, x_C, y_C 和 θ 全部是可遗坐标, 所以广义动量 p_x, p_y, p_θ 全都各自守恒。其次, 由另一半正则方程,

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial p_x} = \dot{x}_C, \\ \frac{\partial H}{\partial p_y} = \dot{y}_C, \\ \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \dot{\theta}, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} p_x = (M+m)\dot{x}_C, \\ p_y = (M+m)\dot{y}_C, \\ p_\theta = \frac{l^2 M(M+4m)}{12(M+m)} \dot{\theta}. \end{cases}$$

既然 p_x, p_y 和 p_θ 守恒, 由初始条件知

$$\begin{cases} p_x = (M+m)\dot{x}_C = mv_0, \\ p_y = (M+m)\dot{y}_C = 0, \\ p_\theta = \frac{l^2 M(M+4m)}{12(M+m)} \dot{\theta} = mv_0 \sqrt{AC} \\ = \frac{l}{2} \frac{mM}{M+m} v_0, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} \dot{x}_C = \frac{m}{M+m} v_0, \\ \dot{y}_C = 0, \quad y_C = \text{常数} = 0, \\ \dot{\theta} = \frac{6mv_0}{l(M+4m)}. \end{cases}$$

这说明碰撞以后系统的质心以 $mv_0/(M+m)$ 匀速向右运动,同时系统绕质心以匀角速 $\dot{\theta}$ 转动. 本例至此已解毕,下面补充讨论一下能量问题.

哈密顿函数 H 不显含 t , 系统有能量积分

$$E = \frac{1}{2} (M+m) \dot{x}_c^2 + \frac{1}{2} (I_M + I_m) \dot{\theta}^2.$$

将上面求出的 \dot{x}_c 及 $\dot{\theta}$ 代入,

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} (M+m) \left(\frac{m}{M+m} v_0 \right)^2 \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{l^2}{12} \frac{M^3 + 4Mm}{M+m} \right) \times \left[\frac{6mv_0}{l(M+m)} \right]^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{m^2}{M+m} v_0^2 + \frac{3}{2} \frac{Mm^3 v_0^2}{(M+m)(M+4m)} \\ &= \frac{2m^2 v_0^2}{M+4m}. \end{aligned}$$

因为 $M+4m > 4m$, 所以

$$E = \frac{2m^2 v_0^2}{M+4m} < \frac{1}{2} m v_0^2.$$

碰撞以后,系统的机械能 E 守恒,但这 E 却小于系统原来的机械能 $mv_0^2/2$,这又是为什么呢?

从上面 5 个例题看来,哈密顿动力学不如拉格朗日动力学简便. 在拉格朗日动力学中,从拉格朗日函数可以直接写出动力学方程即拉格朗日方程. 在哈密顿动力学中,必须从拉格朗日函数转到哈密顿函数,才可写出动力学方程即哈密顿正则方程,从哈密顿正则方程消去广义动量的结果其实不过是从另一条路径达到拉格朗日方程,这样作是绕了一个大圈子. 在直接解算方面,哈密顿动力学确实不见得有什么优点. 本章初已指出,哈密顿动力学的优点之一是便于量子化. 哈密顿动力学还有一个优点,在变数的变换中比较自由: 拉格朗日动力学采用的变数 q_α 和 \dot{q}_α ($\alpha = 1, 2, \dots, s$) 并不对等,只能对广义坐标 q_α 进行变换,而广义速度 \dot{q}_α 随之而变. 哈密顿动力学采用的变数 p_α 和 q_α ($\alpha = 1, 2, \dots,$

$s)$ 是完全对等的,不仅可以对广义坐标 q_a 进行变换,而且可以把 p_a 和 q_a 一起变换,见后面 § 35.

*§ 29. 刘维定理

哈密顿动力学用广义坐标和广义动量来描写力学系统的运动. 拿上节例 1 一个自由度的谐振子来说, 它的运动用一个广义坐标 x 和一个广义动量 p 来描写. 它在某一时刻的状况用该时刻它的 x 和 p 值表示, 或者说, 用 xp 平面上的一个点表示. 随着时间的推移, 谐振子的运动状况不断发生变化, 它在 xp 平面上的代表点也随时间而变, 从而描出一条曲线. 由该例的 (2) 式可知, xp 平面上的代表点描出的曲线是椭圆. 这个 xp 平面叫作相平面, 代表点在相平面上描出的曲线叫作相轨道.

例 光滑桌面上有一弹簧振子, 弹簧的劲度系数为 k , 弹簧一端固定, 另一端系有质量为 m 的质点, 质点沿着弹簧纵向振动. 求此振子的相图.

解 由 § 28 例题 1 可知振子的动力学方程为

$$\begin{cases} kx = -\dot{p} & (1) \\ \frac{1}{m} p = \dot{x} & (2) \end{cases}$$

式中 x 为质点的广义坐标, p 为广义动量. 由 (1) 得

$$kx = -\dot{p} = -\frac{dp}{dx} \dot{x} = -\frac{p}{m} \frac{dp}{dx}, \quad (3)$$

即

$$mkx dx = -p dp,$$

两边积分得相平面上的椭圆族

$$mkx^2 + p^2 = \text{常量}. \quad (4)$$

(4) 式的常量由初始条件决定. 对于给定的初始条件 $t = 0, x = x_0, p = p_0$, 椭圆方程成为

$$mkx^2 + p^2 = mkx_0^2 + p_0^2.$$

这是经过相平面上点 (x_0, p_0) 的椭圆曲线.

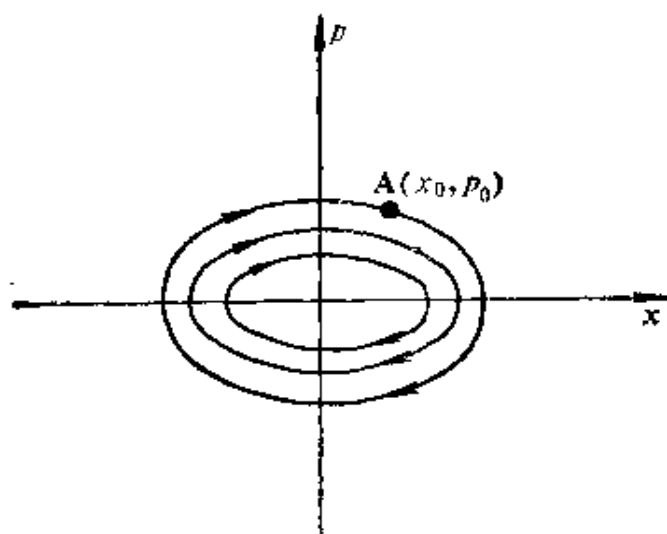


图 7-7

在上半平面, $p > 0$, 从(2)可知 $\dot{x} > 0$, 即 x 增大, 相点 A 向右移动; 在下半平面 $p < 0$, 从(2)知 x 减小, 相点 A 向左移。这样, 相点在椭圆(4)上按顺时针方向运行, 如图 7.7 所示。

相轨道(4)是闭合曲线, 相点在其上每运行一周, x 和 p 的值各自重复变化一次, 这正是理想的弹簧振子运动周期性的反映。不过, 实际的弹簧振子总是受到阻力作用, 其振幅随着时间的流逝而减小, 其相轨道不再是闭合曲线而是逐渐收缩的螺旋曲线。

多自由度的情况也可类似地处理。对于 s 个自由度的力学系统, 我们把广义坐标 $q_\alpha (\alpha = 1, 2, \dots, s)$ 和广义动量 $p_\alpha (\alpha = 1, 2, \dots, s)$ 当作直角坐标而构成 $2s$ 维的空间叫作相空间。该力学系统在某一时刻的状况可由相空间中的一个点表示。随着时间的推移, 相空间中的代表点描出的曲线形成相轨道, 换句话说, 相轨道给出力学系统随时间的演变过程。

从原则上说, 给定了力学系统的初始状况, 该系统其后的运动就由动力学方程 (牛顿运动方程、拉格朗日方程或哈密顿正则方程) 完全确定。从相空间的观点看来, 这就是说, 以相空间中某一点为出发点的相轨道, 由动力学方程 (这里比较恰当的是哈密顿正则方程) 所完全确定。但是, 如果系统的自由度数比较大, 动力学

方程组的具体解算可能很困难，特别是，如果力学系统比较错综复杂(比如说一定量的气体)，根本不可能给出系统中每一个成员的初始条件。换句话说，对于大数目粒子的集合，我们不能断定相空间中究竟哪一点准确地代表系统的状况。代替的办法是：我们只能考虑各种可能的代表点，其中每一点都代表力学系统的一种**可能的状况**。实质上，这是考虑处于给定约束条件下许许多多性质完全相同的力学系统，这些性质完全相同的力学系统构成一个**系综**；相空间中每一个代表点对应于系综中某一个力学系统的状况，代表点的相轨道对应于该系统的演变；各种可能的代表点则对应于系综中所有力学系统的状况，各种可能的相轨道则对应于系综的演变。这就是统计力学的起点。

现在介绍统计力学的一条基本的定理——刘维定理。

不妨认为相空间中的代表点足够众多，以致可以定义**相空间中代表点的密度** ρ 如下：在相空间的体积元 dv 中，代表点的个数 dN ，或者说，相应的力学系统个数 dN ，由

$$dN = \rho dv \quad (29.1)$$

给出，这里相空间体积元 dv 是

$$dv = dq_1 dq_2 \cdots dq_n dp_1 dp_2 \cdots dp_n \quad (29.2)$$

当然，这体积元必须充分大，足以包含大数目的代表点，才谈得上密度。另一方面，这体积元又必须充分小，这样才可以把密度 ρ 看作相空间中的连续函数。

通过相空间中任给一点的相轨道，由哈密顿正则方程唯一地确定，所以相轨道是不可能相交的。

随着时间的运转，系综的所有代表点各沿着互不相交的相轨道不停地从相空间的一个区域转移到另一个区域。**刘维定理**是说：代表点在相空间中运动时，密度 ρ 不变。证明如下。

密度 $\rho(p, q, t)$ 作为广义动量、广义坐标以及时间的函数，其时间变化率

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^i \left(\frac{\partial\rho}{\partial p_{\alpha}} \dot{p}_{\alpha} + \frac{\partial\rho}{\partial q_{\alpha}} \dot{q}_{\alpha} \right). \quad (29.3)$$

从物理上说，上式右边第一项是单纯由于时间运转引起的密度变化率，后面的求和则是代表点在相空间中运动所引起的密度变化率。

现在具体计算 $\partial\rho/\partial t$ 。在相空间中取体积元 dv ，它由 $2s$ 对曲面围成，这 $2s$ 对曲面是 $q_1, q_1 + dq_1; \dots; q_s, q_s + dq_s; p_1, p_1 + dp_1; \dots; p_s, p_s + dp_s$ 。先研究通过一对曲面 $q_1, q_1 + dq_1$ 进出 dv 的代表点数。把体积元(29.2)改写成

$$dv = dA_1 dq_1 \quad (dA_1 = dq_2 \dots dq_s dp_1 \dots dp_s),$$

由此可见，这对曲面的面积各是 dA_1 。 \dot{q}_1 是相空间中代表点速度的垂直于曲面 q_1 的分量，于是每单位时间通过曲面 q_1 进入的代表点数是

$$[\rho \dot{q}_1 dA_1]_{q_1},$$

而每单位时间通过曲面 $q_1 + dq_1$ 离开的代表点数是

$$[\rho \dot{q}_1 dA_1]_{q_1 + dq_1}.$$

这样，由于一进一出所造成的代表点数的净增量

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial t} &= [\rho \dot{q}_1 dA_1]_{q_1} - [\rho \dot{q}_1 dA_1]_{q_1 + dq_1} \\ &= - \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (\rho \dot{q}_1 dq) \right] dA_1 = - \frac{\partial}{\partial q_1} (\rho \dot{q}_1) dv. \end{aligned}$$

从而密度的增量

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = \frac{1}{dv} \frac{\partial N_1}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial q_1} (\rho \dot{q}_1).$$

通过其他曲面进出 dv 的代表点数可用类似办法加以考虑，结果

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= - \sum_{\alpha=1}^i \left[\frac{\partial}{\partial q_{\alpha}} (\rho \dot{q}_{\alpha}) + \frac{\partial}{\partial p_{\alpha}} (\rho \dot{p}_{\alpha}) \right] \\ &= - \sum_{\alpha=1}^i \left(\frac{\partial \rho}{\partial q_{\alpha}} \dot{q}_{\alpha} + \rho \frac{\partial \dot{q}_{\alpha}}{\partial q_{\alpha}} + \frac{\partial \rho}{\partial p_{\alpha}} \dot{p}_{\alpha} + \rho \frac{\partial \dot{p}_{\alpha}}{\partial p_{\alpha}} \right). \quad (29.4) \end{aligned}$$

以(29.4)代入(29.3)得到密度的时间变化率

$$\frac{d\rho}{dt} = - \sum_{\alpha=1}^s \rho \left(\frac{\partial \dot{q}_\alpha}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial \dot{p}_\alpha}{\partial p_\alpha} \right).$$

以哈密顿正则方程(28.9)代入上式,

$$\frac{d\rho}{dt} = - \sum_{\alpha=1}^s \rho \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_\alpha \partial p_\alpha} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_\alpha \partial q_\alpha} \right) = 0.$$

这就证明了刘维定理。

刘维定理是统计力学的基本的定理。它是 $2s$ 维的相空间中的定理, 在普通空间或 s 维的位形空间(把 s 个广义坐标 q_α 作为直角坐标构成的空间)中并不存在类似的定理。因此, 在统计力学讨论系综时需要运用哈密顿动力学而不用拉格朗日动力学。

*§ 30. 位力定理

还有一个带有统计性质的定理叫作位力定理。

设力学系统中所有质点的矢径和动量都是有界的(即是说, 在一切时刻保持小于某个有限值), 定义量 S ,

$$S = \sum_{i=1}^n \mathbf{K}_i \cdot \mathbf{r}_i. \quad (30.1)$$

S 的时间变化率

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \sum_{i=1}^n (\mathbf{K}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i + \dot{\mathbf{K}}_i \cdot \mathbf{r}_i) = \sum_{i=1}^n (m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i + \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i) \\ &= 2T + \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i, \end{aligned} \quad (30.2)$$

拿上式各项在时间间隔 τ 内进行平均, 并用 $\langle \quad \rangle$ 表示这种平均, 即

$$\left\langle \frac{dS}{dt} \right\rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{dS}{dt} dt = \frac{S(\tau) - S(0)}{\tau}. \quad (30.3)$$

如果系统的运动是周期性的, τ 是周期的某个整倍数, 则 $S(\tau) =$

$S(0)$, 上式右边为零。即使运动不是周期性的, 只要取 τ 足够长, 由于 S 有界, (30.3) 右边可以任意地小。于是, 由 (30.2) 得

$$0 = \langle 2T \rangle + \left\langle \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i \right\rangle,$$

即
$$\langle T \rangle = -\frac{1}{2} \left\langle \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i \right\rangle. \quad (30.4)$$

克劳修斯把上式右边的平均值叫作均位力积, 所以上式叫作**位力定理**。

如果作用力具有势能 V , 位力定理 (30.4) 可写成

$$\langle T \rangle = \frac{1}{2} \left\langle \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \cdot \nabla_i V \right\rangle, \quad (30.5)$$

其中 ∇_i 是算符 $i\partial/\partial x_i + j\partial/\partial y_i + k\partial/\partial z_i$ 。

特别说一说两粒子系统, 它们的相互作用力 F 是有心力, 遵守 r^n 定律, 即 $V = kr^{n+1}$, 则

$$\mathbf{r} \cdot \nabla V = r \frac{dV}{dr} = k(n+1)r^{n+1} = (n+1)V,$$

因而位力定理成为

$$\langle T \rangle = \frac{n+1}{2} \langle V \rangle. \quad (30.6)$$

对于平方反比有心力, $n = -2$, (30.6) 成为

$$\langle T \rangle = -\frac{1}{2} \langle V \rangle. \quad (30.7)$$

下面用两个具体例子验证 (30.7) 形式的位力定理。

例 1 玻尔关于氢原子结构的圆轨道理论认为, 氢原子的一个价电子围绕氢核作圆轨道运动。氢核与电子之间的静电引力就是使电子作圆周运动的向心力。为计算简便, 静电引力 e^2/r^2 采用静电单位制,

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{e^2}{r^2},$$

这里 e 是电子电荷。上式两边同乘以 $r/2$, 即得

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \frac{e^2}{r} = -\frac{1}{2} \left(-\frac{e^2}{r} \right),$$

即
$$T = -\frac{1}{2} V.$$

本例的 T 和 V 都不随时间而变, 无需对时间平均。

例 2 平方反比有心引力作用下的运动, 或者说, 行星运动, 已在 § 15 (2) 解出。轨道可以是椭圆、抛物线或双曲线的一支, 其中只有椭圆运动是有界的。椭圆运动的轨道方程见(15.14)。为计算简便, 这里考虑 $m \ll M$ 的情况, 即 $m' = \frac{Mm}{M+m} \approx m$ 的情况, 只要适当选取极轴的方向就可使(15.14)中的 $C = 0$,

$$\rho = \frac{\frac{h^2}{k^2}}{1 + \epsilon \cos \varphi}, \quad (1)$$

式中 ϵ 是离心率 $\sqrt{1 + \frac{E^2 h^2}{k^4 m}}$ 。

先计算动能。

$$\dot{\rho} = \frac{\epsilon \left(\frac{h^2}{k^2} \right) \sin \varphi}{(1 + \epsilon \cos \varphi)^2} \dot{\varphi} = \frac{\epsilon k^2 \rho^2 \sin \varphi}{h^2} \dot{\varphi}.$$

由(15.7) $\dot{\varphi} = h/\rho^2$, 代入上式右边,

$$\dot{\rho} = \frac{\epsilon k^2 \sin \varphi}{h}. \quad (2)$$

至于

$$\rho \dot{\varphi} = \rho \frac{h}{\rho^2} = \frac{h}{\rho} = \frac{k^2}{h} (1 + \epsilon \cos \varphi).$$

于是, 动能

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2) = \frac{1}{2} m \frac{k^4}{h^2} (1 + 2\epsilon \cos \varphi + \epsilon^2). \quad (3)$$

再计算势能。按(15.13),

$$V = -\frac{m k^2}{\rho} = -m \frac{k^4}{h^2} (1 + \epsilon \cos \varphi). \quad (4)$$

现在还要分别计算 V 和 T 在一个周期 τ 上的时间平均值。先说势能 V

的时间平均值,

$$\langle V \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} V dt = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} -\frac{mk^2}{h^2} (1 + e \cos \varphi) dt,$$

由(15.7), $dt = (\rho^2/h)d\varphi$, 以此代入上式右边, 可把对 t 的积分化为对 φ 的积分,

$$\begin{aligned} \langle V \rangle &= -\frac{mk^2}{\tau h^2} \cdot 2 \int_0^{\pi} (1 + e \cos \varphi) \cdot \frac{\frac{h^2}{k^2}}{(1 + e \cos \varphi)^2} d\varphi \\ &= -\frac{2mh}{\tau} \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{1 + e \cos \varphi} \\ &= -\frac{2mh}{\tau} \frac{2}{\sqrt{1-e^2}} \left[\operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{\sqrt{1-e^2}}{1+e} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right) \right]_0^{\pi} \\ &= -\frac{2mh\pi}{\tau \sqrt{1-e^2}} \end{aligned} \quad (5)$$

再说动能 T 的时间平均值

$$\begin{aligned} \langle T \rangle &= \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} T dt = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \frac{1}{2} m \frac{k^4}{h^2} (1 + 2e \cos \varphi + e^2) dt \\ &= \frac{mk^4}{2\tau h^2} \cdot 2 \int_0^{\pi} (1 + 2e \cos \varphi + e^2) \frac{\frac{h^2}{k^2}}{(1 + e \cos \varphi)^2} d\varphi \\ &= \frac{mh}{\tau} \int_0^{\pi} \frac{2(1 + e \cos \varphi) - (1 - e^2)}{(1 + e \cos \varphi)^2} d\varphi \\ &= \frac{mh}{\tau} \int_0^{\pi} \left\{ \frac{2}{1 + e \cos \varphi} - \frac{1 - e^2}{(1 + e \cos \varphi)^2} \right\} d\varphi \\ &= \frac{mh}{\tau} \left\{ 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{1-e^2}} \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{\sqrt{1-e^2}}{1+e} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left[\frac{-e \sin \varphi}{1 + e \cos \varphi} + \frac{2}{\sqrt{1-e^2}} \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{\sqrt{1-e^2}}{1+e} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right) \right] \right\}_0^{\pi} \\ &= \frac{mh}{\tau} \left\{ \frac{2}{\sqrt{1-e^2}} \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{\sqrt{1-e^2}}{1+e} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right) + \frac{e \sin \varphi}{1 + e \cos \varphi} \right\}_0^{\pi} \\ &= \frac{mh\pi}{\tau \sqrt{1-e^2}} \end{aligned} \quad (6)$$

比较(5)和(6),

$$\langle T \rangle = -\frac{1}{2} \langle V \rangle.$$

读者如果把 \mathbf{r} 和 \mathbf{a} 的具体表示式代入(5)和(6), 还可以验明, $\langle T \rangle = -E'$, $\langle V \rangle = 2E'$.

下面一个例题是位力定理的应用.

例 3 试用位力定理推导理想气体的压强方程.

解 对于理想气体, 只需考虑容器壁对气体的压力的维里. 就壁上的一个面积元 dS 而论, 压力是 $p dS$, 因为 p 沿着壁的法线而指向容器内部, 所以这压力也可改写为 $-p dS$, 这 dS 通常理解为沿着法线而指向容器外部. 这压力的维里是 $-\frac{1}{2}(-p dS) \cdot \mathbf{r}$. 总的均位力积是

$$-\frac{1}{2} \left\langle \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i \right\rangle = \frac{1}{2} \oint_{\sigma} p \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S}.$$

应用矢量分析的高斯定理, 上式的闭合面上的面积分可化为容器的体积 V (注意不要把这 V 误会为势能) 上的体积积分

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \left\langle \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i \right\rangle &= \frac{1}{2} \int_V p \nabla \cdot \mathbf{r} dV = \frac{3}{2} p \int_V dV \\ &= \frac{3}{2} pV. \end{aligned} \quad (1)$$

于是, 由位力定理(30.4),

$$\begin{aligned} \left\langle \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right\rangle &= \frac{3}{2} pV, \\ p &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{V} \left\langle \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right\rangle. \end{aligned} \quad (2)$$

这就是理想气体的压强公式.

每个气体分子的平均动能正比于绝对温度 T (注意不要把这 T 误会为动能), 具体地说, $\left\langle \frac{1}{2} m v^2 \right\rangle = \frac{3}{2} kT$ (这里 k 是玻耳兹曼常数). 因而 $\left\langle \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right\rangle = n \frac{3}{2} kT$, n 是容器中气体分子个数. 这样, (2) 可改写为

$$p = \frac{\pi k T}{V}, \quad (3)$$

这正是理想气体的物态方程 $pV = \pi kT$.

§ 31. 泊松括号

(1) 力学量的时间变化率

哈密顿动力学既然用广义动量和广义坐标来描述力学系统的运动,自然就可把一切力学量 φ 都作为广义动量、广义坐标以及时间的函数表出,如 $\varphi(p, q, t)$.

力学量 $\varphi(p, q, t)$ 的时间变化率

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^i \left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_{\alpha}} \dot{q}_{\alpha} + \frac{\partial\varphi}{\partial p_{\alpha}} \dot{p}_{\alpha} \right).$$

以哈密顿正则方程(28.9)代入上式,

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^i \left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_{\alpha}} \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}} - \frac{\partial\varphi}{\partial p_{\alpha}} \frac{\partial H}{\partial q_{\alpha}} \right). \quad (31.1)$$

(2) 泊松括号

由于(31.1)右边累加项的启示,可以定义力学系统的两个力学量 $\varphi(p, q, t)$ 和 $\phi(p, q, t)$ 的泊松括号 $[\varphi, \phi]$ 如下:

$$[\varphi, \phi] = \sum_{\alpha=1}^i \left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_{\alpha}} \frac{\partial\phi}{\partial p_{\alpha}} - \frac{\partial\varphi}{\partial p_{\alpha}} \frac{\partial\phi}{\partial q_{\alpha}} \right). \quad (31.2)$$

按照定义(31.2),力学量 φ 的时间变化率(31.1)可用泊松括号表为

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + [\varphi, H]. \quad (31.3)$$

就连哈密顿正则方程(28.9)也可用泊松括号表为

$$\dot{p}_{\beta} = [p_{\beta}, H], \quad \dot{q}_{\beta} = [q_{\beta}, H], \quad (31.4)$$

读者不难自己加以验证。

容易算出下列基本的泊松括号的值:

$$[q_\alpha, q_\beta] = 0, [p_\alpha, p_\beta] = 0, [q_\alpha, p_\beta] = \delta_{\alpha\beta}, \quad (31.5)$$

这里 $\delta_{\alpha\beta}$ 是克朗内克符号,

$$\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & (\alpha = \beta), \\ 0 & (\alpha \neq \beta). \end{cases} \quad (31.6)$$

泊松括号的下列性质, 读者不难自行推导.

$$[\varphi, C] = 0 \quad (C \text{ 是常数}), \quad (31.7)$$

$$[\varphi, \varphi] = 0, \quad (31.8)$$

$$[\varphi, \psi] = -[\psi, \varphi], \quad (31.9)$$

$$\left[\varphi, \sum_{i=1}^n C_i \psi_i \right] = \sum_{i=1}^n C_i [\varphi, \psi_i] \quad (31.10)$$

$$[\varphi, \psi_1 \psi_2] = \psi_1 [\varphi, \psi_2] + [\varphi, \psi_1] \psi_2, \quad (31.11)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} \varphi, \psi \right] = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \psi \right] + \left[\varphi, \frac{\partial \psi}{\partial t} \right]. \quad (31.12)$$

例 1 试计算泊松括号 $[L_y, L_x], [L_x, L_z]$ 和 $[L_x, L_y], [L_x, L^2], [L_y, L^2]$ 和 $[L_y, L^2]$. 这里 L 是质点的角动量 $L = r \times K$.

解 本例的 $q_1 = x, q_2 = y, q_3 = z; p_1 = K_x, p_2 = K_y, p_3 = K_z$.

先计算 $[L_y, L_x]$ 即 $[zK_x - xK_z, xK_y - yK_z]$. 利用(31.10),

$$[L_y, L_x] = [zK_x, xK_y] - [zK_x, yK_z] - [xK_z, xK_y] + [xK_z, yK_z]. \quad (1)$$

右边第一个泊松括号用(31.11)加以改写,

$$[zK_x, xK_y] = zx[K_x, K_y] + z[K_x, x]K_y + x[z, K_y]K_x + [z, x]K_yK_x.$$

按照(31.5)及(31.6), 上式右边四个泊松括号中, 只有第二个等于 -1 , 其他均为零. 这样,

$$[zK_x, xK_y] = -zK_y. \quad (2)$$

用同样的办法可算出

$$[zK_x, yK_z] = 0, [xK_z, xK_y] = 0, [xK_z, yK_x] = yK_x. \quad (3)$$

以(2)和(3)代入(1), 即得

$$[L_y, L_x] = yK_x - zK_y = L_z. \quad (4)$$

同理,

$$[L_x, L_x] = L_y, [L_x, L_y] = L_z. \quad (5)$$

现在计算 $\{L_x, L^2\}$.

$$\begin{aligned} \{L_x, L^2\} &= [L_x, L_x^2] + [L_x, L_y^2] + [L_x, L_z^2] \\ &= L_x[L_x, L_x] + \{L_x, L_x\}L_x + L_y\{L_x, L_y\} \\ &\quad + \{L_x, L_y\}L_y + L_z\{L_x, L_z\} + \{L_x, L_z\}L_z \\ &= 0 + 0 + L_x L_x + L_x L_y + L_x(-L_y) + (-L_y)L_x \\ &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

同理,

$$\{L_y, L^2\} = 0, \quad \{L_z, L^2\} = 0. \quad (7)$$

读者还可以自己验算下列泊松括号

$$\begin{cases} [K_x, L_x] = [L_y, K_x] = K_x, & [K_x, L_x] = [L_x, K_x] = K_y, \\ [K_x, L_y] = [L_x, K_y] = K_x, & [K_x, L_x] = [K_y, L_y] = [K_z, L_z] = 0. \end{cases} \quad (8)$$

例2 电磁场中带电质点的哈密顿函数见于(13.10),

$$H = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 + q\varphi,$$

q 是质点的带电量, \mathbf{A} 和 φ 是电磁场的矢势和标势, 试计算泊松括号 $\{x, H\}$, $\{y, H\}$ 和 $\{z, H\}$; $\{p_x, H\}$, $\{p_y, H\}$ 和 $\{p_z, H\}$; $\{v_x, v_y\}$, $\{v_y, v_z\}$ 和 $\{v_z, v_x\}$.

解 先计算 $\{x, H\}$, 利用(31.10),

$$\{x, H\} = \frac{1}{2m} [x, (\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2] + [x, q\varphi(\mathbf{r})].$$

上式右边第二个泊松括号因其中 x 和 $q\varphi(\mathbf{r})$ 都与广义动量无关, 所以按定义为零. 对右边第一个泊松括号应用(31.11),

$$\begin{aligned} \{x, H\} &= \frac{1}{m} (\mathbf{p} - q\mathbf{A}) \cdot [x, \mathbf{p} - q\mathbf{A}] = \frac{1}{m} (\mathbf{p} - q\mathbf{A}) \cdot [x, \mathbf{p}] \\ &= \frac{1}{m} (\mathbf{p} - q\mathbf{A}) \cdot \{i[x, p_x] + j[x, p_y] + k[x, p_z]\}. \end{aligned}$$

按照(31.5), 上式右边的大括号 $= i$. 因此,

$$\{x, H\} = \frac{1}{m} (p_x - qA_x).$$

用同样的办法可算出 $\{y, H\}$ 和 $\{z, H\}$. 这三个结果可合并为

$$[r, H] = \frac{1}{m} (\mathbf{p} - q\mathbf{A}). \quad (1)$$

由(31.3)知道,上式左边即 $d\mathbf{r}/dt$,亦即 \mathbf{v} . 于是,(1)可改写为

$$m\mathbf{v} = \mathbf{p} - q\mathbf{A}. \quad (2)$$

现在计算 $[p_x, H]$.

$$\begin{aligned} [p_x, H] &= \frac{1}{2m} [p_x, (\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2] + [p_x, q\varphi] \\ &= \frac{1}{m} (\mathbf{p} - q\mathbf{A}) \cdot [p_x, \mathbf{p} - q\mathbf{A}] - q \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ &= \mathbf{v} \cdot \{ [p_x, \mathbf{p}] - [p_x, q\mathbf{A}] \} - q \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ &= -\mathbf{v} \cdot [p_x, q\mathbf{A}] - q \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ &= q\mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} - q \frac{\partial \varphi}{\partial x}. \end{aligned}$$

用同样的办法可算出 $[p_y, H]$ 和 $[p_z, H]$. 这三个结果可合并为

$$[\mathbf{p}, H] = -q\nabla\varphi + q\nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}). \quad (3)$$

由(31.3)知道,上式左边即 $d\mathbf{p}/dt$,根据(2)式,亦即 $m d\mathbf{v}/dt + q d\mathbf{A}/dt$. 于是,(3)可改写为

$$\begin{aligned} m \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= -q\nabla\varphi + q\nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) - q \frac{d\mathbf{A}}{dt} \\ &= -q\nabla\varphi + q\nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) - q \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - q(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A} \\ &= q \left[-\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A} \right] \\ &= q \left[-\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \right] \\ &= q[\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}]. \end{aligned}$$

上式右边正是作用于带电质点的电场力和磁场力.

读者还可以自己验算下列泊松括号

$$\begin{cases} [v_y, v_z] = \frac{1}{m^2} [p_y - qA_y, p_z - qA_z] = \frac{1}{m^2} qB_{yz} \\ [v_x, v_z] = \frac{1}{m^2} qB_{xz}, \quad [v_x, v_y] = \frac{1}{m^2} qB_{xy}. \end{cases} \quad (4)$$

(3) 雅可俾恒等式

这里要证明雅可俾恒等式

$$[\varphi, [\psi, \theta]] + [\psi, [\theta, \varphi]] + [\theta, [\varphi, \psi]] = 0. \quad (31.13)$$

首先,不难看出,如把(31.13)左端按照定义展开,则每一项都是函数 φ 、 ψ 和 θ 之一的二阶偏导数与另外两个函数的一阶偏导数的乘积。据此,我们说(31.13)的左边是 φ 、 ψ 和 θ 的二阶偏导数的线性齐次函数。

试把含有 θ 的二阶偏导数的项集合起来。这些项只能来自 $[\varphi, [\psi, \theta]]$ 和 $[\psi, [\theta, \varphi]]$ 。现在把泊松括号 $[\psi, \theta]$ 和 $[\varphi, \theta]$ 分别看作线性微分算符 D_1 和 D_2 作用于 θ 的结果,即

$$[\psi, \theta] = D_1\theta, D_1 \equiv \sum_{\alpha=1}^s \left(\frac{\partial \psi}{\partial q_\alpha} \frac{\partial}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial \psi}{\partial p_\alpha} \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \right),$$

$$[\varphi, \theta] = D_2\theta, D_2 \equiv \sum_{\alpha=1}^s \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_\alpha} \frac{\partial}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_\alpha} \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \right).$$

于是,

$$\begin{aligned} [\varphi, [\psi, \theta]] + [\psi, [\theta, \varphi]] &= [\varphi, [D_1\theta]] - [\psi, [D_2\theta]] \\ &= D_2D_1\theta - D_1D_2\theta \\ &= (D_2D_1 - D_1D_2)\theta. \end{aligned}$$

请自行验证, $D_2D_1 - D_1D_2$ 中的二阶偏微分算符互相消去,只剩下一阶偏微分算符。这样,在(31.13)左边含 θ 的二阶偏导数的项互相消去。

同理,(31.13)左边含 φ 的二阶偏导数的项互相消去,含 ψ 的二阶偏导数的项也互相消去。

既然(31.13)的左边是二阶偏导数的线性齐次函数,而所有二阶偏导数又都消去,那么它只能是零。这就是雅可俾恒等式的证明。

接下去,我们要证明泊松定理。

不随时间而变的力学量，或者说，在运动过程中守恒的力学量，叫作**运动积分**。运动积分 φ 应当满足条件 $\frac{d\varphi}{dt} = 0$ ，按照(31.3)，这就是：

$$[\varphi, H] = -\frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (31.14)$$

设有两个运动积分 φ 和 ψ ，它们满足

$$[\varphi, H] = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad [\psi, H] = -\frac{\partial \psi}{\partial t}.$$

在雅可俾恒等式(31.13)中，取哈密顿函数 H 作为 θ ，并以上面两式代入，

$$-\left[\varphi, \frac{\partial \psi}{\partial t}\right] + \left[\psi, \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right] + [H, [\varphi, \psi]] = 0,$$

即
$$[[\varphi, \psi], H] + \frac{\partial}{\partial t} [\varphi, \psi] = 0.$$

与(31.14)比较，就知道 $[\varphi, \psi]$ 也是运动积分。

这样，我们证明了**泊松定理**：如 φ 和 ψ 是两个运动积分，则泊松括号 $[\varphi, \psi]$ 也是运动积分。

不过，这样得到的第三个运动积分 $[\varphi, \psi]$ 有时并没有多少意思。比方，如果 p_1 和 p_2 是两个运动积分，泊松定理告诉我们 $[p_1, p_2]$ 也是运动积分。可是，按照(31.5)， $[p_1, p_2] = 0$ 。拿 0 作为运动积分，并没有什么意思。

有时，泊松定理也能给出有意义的结果。比方，从例 1 可知：如 K_y 和 L_z 是运动积分，则 K_x 也是；如 K_x 和 L_y 是运动积分，则 K_z 也是；如 L_y 和 L_x 是运动积分，则 L_z 也是。比方，从例 2 可知：如 v_y 和 v_x 是运动积分，则 B_z 也是。

(4) 量子力学中的泊松括号

在量子力学中也有泊松括号，它的定义当然不同于(31.2)。不过，基本的泊松括号的值(31.5)以及本节关于泊松括号的关系式

(包括例题中的关系式)在量子力学中仍然成立。

在古典力学中,两个力学量同时具有确定的值并不成为问题。可是,在量子力学中这却是个问题。力学量在量子力学中是用算符或矩阵表示的,两个算符或矩阵的乘积一般是与这两个算符或矩阵的先后次序有关的。两个力学量 X 和 Y 是否可以同时具有确定的值就看它们的量子泊松括号

$$\frac{1}{i\hbar} (XY - YX) \quad (31.15)$$

是否为零。

这样,如果两个力学量的经典泊松括号为零,则它们的量子泊松括号也为零,从而在量子力学中它们是可以同时确定的。比如,按照(31.5),任意两个广义坐标可以同时确定,任意两个广义动量可以同时确定,一个广义坐标和对应的广义动量不能同时确定,一个广义坐标和非对应的广义动量可以同时确定。又比如,按照例1,角动量的任意两个分量不能同时确定,角动量的一个分量和角动量的平方可以同时确定。

作为本章的结束,这里要指出,拉格朗日动力学与哈密顿动力学研究问题的角度颇为不同。为了简便,我们只就完整稳定约束下的保守力学系统进行论述。设系统的自由度为 s ,则拉格朗日动力学在 s 维的位形空间中研究系统的运动,而哈密顿动力学则在 $2s$ 维的相空间中研究系统的运动。

一个 s 维,一个 $2s$ 维,维数翻了一番,人们不免要问,既然 s 维的位形空间已经足够,为什么还要引入 $2s$ 维的相空间呢?人们甚至进一步提出怀疑, s 维的运动怎么可以用 $2s$ 维来研究呢?这多出来的 s 维岂非赘冗?由此不免引起争议。

例如,相空间中的广义动量 P (指 p_α ,而 $\alpha = 1, 2, \dots, s$,下同)是否独立于广义坐标 q (指 q_α ,而 $\alpha = 1, 2, \dots, s$,下同)?有一种意见(以下称为甲方)认为 P 不独立于 q ,对立的意见(以下称

为乙方)则认为 p 独立于 q .

又如相空间中的哈密顿原理:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{\alpha} p_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} - H \right) dt = 0 \quad (31.16)$$

是否成立? 上式也可改写为

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{\alpha} \left\{ \left(\dot{q}_{\alpha} - \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}} \right) \delta p_{\alpha} - \left(\dot{p}_{\alpha} + \frac{\partial H}{\partial q_{\alpha}} \right) \delta q_{\alpha} \right\} dt = 0. \quad (31.17)$$

它与哈密顿正则方程的关系怎样? 这里也有两种意见. 甲方认为相空间哈密顿原理算不上原理, 正则方程的半数是定义而不是动力学定律, 因为

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}} &= \frac{\partial}{\partial p_{\alpha}} \left\{ \sum_{\beta} p_{\beta} \dot{q}_{\beta}(q, p, t) - L[q, \dot{q}(q, p, t), t] \right\} \\ &= \dot{q}_{\alpha} + \sum_{\beta} p_{\beta} \frac{\partial \dot{q}_{\beta}}{\partial p_{\alpha}} - \sum_{\beta} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\beta}} \frac{\partial \dot{q}_{\beta}}{\partial p_{\alpha}} \\ &= \dot{q}_{\alpha} + \sum_{\beta} \left(p_{\beta} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\beta}} \right) \frac{\partial \dot{q}_{\beta}}{\partial p_{\alpha}} = \dot{q}_{\alpha}. \end{aligned}$$

这完全是由于广义动量的定义 (11.15). 另外半数才是动力学定律, 并可以从(31.17)导出. 乙方认为相空间哈密顿原理确是一条原理, 正则方程的全数都是动力学定律, 且可从(31.17)导出.

笔者以为甲方的意见虽不能算错, 但却是停留在拉格朗日动力学而没真正进入哈密顿动力学.

以完整稳定约束下的保守力学系统而论, 拉格朗日动力学和哈密顿动力学都是从一切可能运动中挑选出实际运动.

拉格朗日动力学从一切可能运动的拉格朗日函数 $L(q, \dot{q}, t)$ 出发, 这是力学系统处于任意的广义坐标 q 而具有任意的广义速度 \dot{q} 时的动能与势能之差. 对于给定的 q , 仍然可以有任意的 \dot{q} , 这就是说, q 与 \dot{q} 是互相独立的. 事实上, 一般地说, $L(q, \dot{q}, t)$ 中的 q 并非时间 t 的函数, \dot{q} 也谈不上是 dq/dt . 不过, 一旦进入研

究虚位移亦即对广义坐标进行变分,以寻求实际运动 $q(t)$ 的规律即拉格朗日方程时, \dot{q} 与 q 有着先天的关联, $\dot{q}(t) = dq(t)/dt$, 而 $\delta\dot{q}$ 与 δq 也有着先天的关联 $\delta\dot{q} = d(\delta q)/dt$. 这样, \dot{q} 不再独立于 q , 人们只能在 s 维的位形空间中研究系统的运动.

哈密顿动力学则从一切可能运动的哈密顿函数 $H(q, p, t)$ 出发, 尽管广义动量

$$p_a = \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_a} \quad (31.18)$$

是用 q 与 \dot{q} 定义的, 但既然 q 与 \dot{q} 互相独立, 那么 $H(q, p, t)$ 中的 p 与 q 也是互相独立的, 这大概没有争议. 问题在于下一步, 研究系统的虚运动以寻求实际运动的规律时, q 与 p 是否还互相独立呢?

不同于 q 与 \dot{q} 的情况, q 与 p 并无先天的关联, δp 与 δq 也没有先天的关联. 因此, 既已得到哈密顿函数 $H(q, p, t)$ 之后, 不妨暂且把广义动量 p 的定义 $p_a = \partial L / \partial \dot{q}_a$ 搁置一旁 (这种搁置并不会造成问题, 见下文), 而认为 p 与 q 是互相独立的, 从而在 $2s$ 维的相空间中研究力学系统的运动. 在相空间中, 实际运动遵从相空间中的哈密顿原理 (31.16). 因 δp 与 δq 互相独立, 由 (31.17) 立即得到全数的哈密顿正则方程:

$$\dot{q}_a = \frac{\partial H}{\partial p_a}, \quad (31.19)$$

$$\dot{p}_a = - \frac{\partial H}{\partial q_a}. \quad (31.20)$$

其中 $\dot{q}_a = \partial H / \partial p_a$ 可把原先的定义 (11.15) 又恢复出来:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_a} \left\{ \sum_b p_b \dot{q}_b - H[q, p(q, \dot{q}, t)] \right\} \\ &= p_a + \sum_b \frac{\partial p_b}{\partial \dot{q}_a} \dot{q}_b - \sum_b \frac{\partial H}{\partial p_b} \frac{\partial p_b}{\partial \dot{q}_a} \\ &= p_a + \sum_b \left(\dot{q}_b - \frac{\partial H}{\partial p_b} \right) \frac{\partial p_b}{\partial \dot{q}_a} = p_a \end{aligned} \quad (31.21)$$

可见开始时把(31.18)搁置一旁并无问题。

甲方的观点虽说不错，却只是停留在拉格朗日动力学上，没有真正进入哈密顿动力学。 p 与 q 互相独立，这才可能谈论相空间，这才是哈密顿动力学的观点。它给我们展示了新的天地：正则变换、泊松括号、哈密顿-雅可俾理论等等。

第八章 力学变分原理

牛顿动力学方程、拉格朗日动力学方程、哈密顿动力学方程都是微分方程。本章用另一种形式即变分原理的形式来研究力学系统的动力学。

变分原理是一种极值原理：力学系统的实际运动（静态平衡作为一种特殊的运动状态也包括在内），比起“邻近的各种可能的”运动，总是使某种泛函取极值。变分原理的形式十分紧凑，它不牵涉广义坐标的具体选择，因而在广义坐标变换下，变分原理乃至其推论是不变的。

在力学范围内，变分形式的力学原理当然和其它形式的动力学是等价的。但是，在更广的范围里，这些原本彼此等价的形式却可能不再等价：有的仍然成立，有的需要改造，有的则完全不适合。能够适应更广范围的形式当然被认为具有更大的概括性。变分原理和其它形式的动力学相比就具有更大的概括性。

不仅有限个自由度的力学系统（质点、质点组、刚体等）的动力学方程可用变分原理表出，就是无限个自由度（连续介质等）的动力学也可用变分原理表出，甚至非力学系统（电路、几何光学中的光路、电磁场、基本粒子场等）的动力学理论也可表为变分原理的形式。例如，量子力学可说是在质点力学的哈密顿动力学形式的基础上加以改造（量子化）建立起来的，后来的实验事实表明，电磁场和基本粒子场也需要量子化。这时，只要把质点力学、电磁场和基本粒子场的动力学都表为变分原理形式，质点力学的量子化方法就能直接移植于电磁场和基本粒子场而给出量子电动力学和量子场论。

此外，变分问题的求解比起微分方程的求解，可以适应更广的

函数类。由于计算机的应用，求解变分问题的直接法有了很大发展，所以变分原理除了具有理论上的意义外，还提供了求解实际运动的一条有效途径。

本章论述的变分原理可说是积分形式的变分原理。其实，虚功原理与达朗伯原理中的 δr_i 与 δq_a 也都是一种变分，所以虚功原理与达朗伯原理也可说是变分原理，只不过是微分形式的变分原理。

§ 32. 变分法初步

本节暂时离开分析力学的主线，一般地对变分法作一简略介绍。

(1) 泛 函

质点沿着光滑轨道 $y = y(x)$ 从 A 自由下滑到 B (图 8-1)，所需时间

$$J = \int dt = \int \frac{ds}{v} = \int \frac{ds}{\sqrt{2gy}} = \int_A^B \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}} dx.$$

式中 $y' = \frac{dy}{dx}$ 。如选取另一轨道，从 A

到 B 所需时间 J 即随之而异。这样，时间 J 取决于整个轨道的形状。注意，这里 J 不是取决于 y 的值，而是取决于函数关系 $y = y(x)$ 。

一般地说，一个变数 J ，其值取决于函数关系 $y = y(x)$ ，就叫作函数 $y(x)$ 的泛函，记作 $J\{y(x)\}$ 。

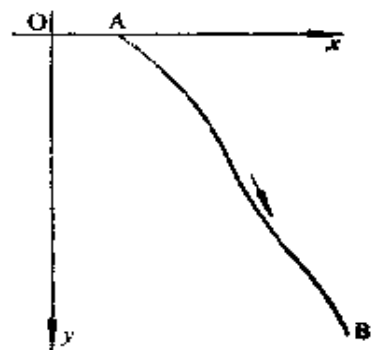


图 8-1

(2) 变分问题

试考察所谓**捷线问题**，即选取适当的轨道 $y = y(x)$ 使质点从 A 自由下滑到 B 所需的时间最短，这就是泛函

$$J[y(x)] = \int_A^B \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}} dx$$

的极值问题。

泛函的极值问题叫作**变分问题**。

函数，如果它定义在闭区间上且是连续的，其极值问题总是有解的。而泛函的极值问题即变分问题的解却未必存在。不过，在力学和物理问题中，常常从问题的提法就可断定是否有解。

(3) 欧拉方程

这里介绍变分问题所必须满足的必要条件——欧拉方程。欧拉方程是微分方程，这样，我们就把变分问题转化为求解微分方程。

先研究较简单的情况。泛函 J 只依赖于单个自变数 x 、单个函数 $y(x)$ 及其导数 $y'(x)$ ，即

$$J[y(x)] = \int_a^b F(x, y, y') dx, \quad (32.1)$$

函数 F 对于 x, y, y' 都是二次连续可导，所以 y 的二阶导数 y'' 是连续的。

设想函数关系 $y(x)$ 稍有变动，从 y 变为 $y + \delta y$ ，这里 δy 称为函数 $y(x)$ 的**变分**。泛函(32.1)的值也随之而变，其**增量**

$$\begin{aligned} J[y + \delta y] - J[y] &= \int_a^b [F(x, y + \delta y, y' + \delta y') \\ &\quad - F(x, y, y')] dx \\ &\approx \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right] dx. \end{aligned}$$

上式右边叫作泛函(32.1)的**变分**(试与函数的微分比较),记作 $\delta J[y]$,

$$\delta J[y] = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right] dx. \quad (32.2)$$

设变分问题有解

$$y = y(x). \quad (32.3)$$

设想 y 从解(32.3)稍稍变动到 $y + \delta y$.现在,我们可把变分 $\delta y(x)$ 改记作 $\epsilon \eta(x)$,其中 ϵ 是一个小参数,而 $\epsilon = 0$ 正好对应于解(32.3).于是,泛函 $J[y + \epsilon \eta]$ 成为参数 ϵ 的函数.既然 $\epsilon = 0$ 对应于解 $y = y(x)$,从函数极值必要条件知

$$\left. \frac{\partial J[y + \epsilon \eta]}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} = 0,$$

即

$$\int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} \eta + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta' \right] dx = 0. \quad (32.4)$$

上式左边与变分 $\delta J[y]$ 只相差一个乘数,所以解(32.3)必须满足的必要条件(32.4)正是 $\delta J[y] = 0$,即

$$\int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right] dx = 0. \quad (32.5)$$

在(32.5)的积分号下,既有 δy 又有 $\delta y'$.利用分部积分法,可以使积分号下只出现 δy :

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' dx &= \int_a^b \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{d}{dx} (\delta y) dx \\ &= \left[\frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \right]_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta y dx. \end{aligned}$$

这样,必要条件(32.5)成为

$$\int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \delta y dx + \left[\frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \right]_a^b = 0.$$

在简单的变分问题中,变分 δy 在端点保持为零(例如图8-1,不

论怎样改变光滑轨道的形状,轨道总是通过点 A 和点 B), 即

$$\delta y|_{x=a} = 0, \delta y|_{x=b} = 0.$$

于是,必要条件成为

$$\int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \delta y dx = 0.$$

上式对任意的 δy 都成立,所以

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0 \quad (32.6)$$

这就是泛函(32.1)取极值的必要条件,叫做这个变分问题的**欧拉方程**.

现在介绍泛函导数的概念. 设函数 $y(x)$ 的变分 δy 只在 $x = x_0$ 的附近不为零(参看图 8-2). 我们把曲线 $y(x)$ 与曲线 $y(x) + \delta y(x)$ 之间所夹的面积记作 $\delta\sigma$. 我们把

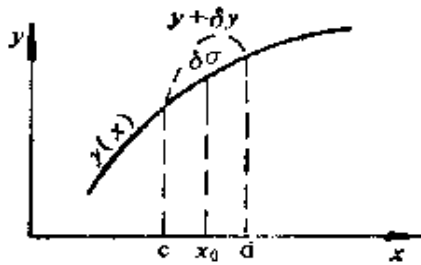


图 8-2

$\delta\sigma \rightarrow 0$ 时泛函 $J(x, y, y')$ 的变分 δJ 与 $\delta\sigma$ 之比的极限, 定义为泛函 J 在点 $x = x_0$ 的**泛函导数**, 记作 $(\delta J / \delta\sigma)|_{x_0}$ 或 $(\partial J / \partial y)|_{x_0}$.

$$\frac{\delta J}{\delta\sigma} \Big|_{x_0} \equiv \frac{\partial J}{\partial y} \Big|_{x_0} \equiv \lim_{\delta\sigma \rightarrow 0} \frac{\delta J}{\delta\sigma}. \quad (32.7)$$

不难算出

$$\begin{aligned} \frac{\delta J}{\delta\sigma} \Big|_{x_0} &= \frac{\partial J}{\partial y} \Big|_{x_0} = \lim_{\delta\sigma \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\delta\sigma} \int_c^d \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \delta y dx \right\} \\ &= \lim_{\delta\sigma \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\delta\sigma} \int_c^d \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \delta y dx \right\} \\ &= \lim_{\delta\sigma \rightarrow 0} \left\{ \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right]_{x_0} \frac{1}{\delta\sigma} \int_c^d \delta y dx \right\} \\ &= \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right]_{x_0}. \end{aligned} \quad (32.8)$$

这样, 欧拉方程(32.6)也可说是泛函 J 在任一点的泛函导数

等于零。

例 求解捷线问题,就是说,求出图 8-1 的光滑轨道 $y = y(x)$, 使质点从 A 自由下滑到 B 所需的时间最短。

解 这个变分问题即是

$$\delta \int_a^b \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}} dx = 0.$$

这里 $F(x, y, y') = \sqrt{1+y'^2} / \sqrt{2gy}$, 相应的欧勒方程是

$$-\frac{\sqrt{1+y'^2}}{2\sqrt{2gy}y^{3/2}} - \frac{d}{dx} \left(\frac{y'}{\sqrt{2gy}\sqrt{1+y'^2}} \right) = 0.$$

这个微分方程不显含 x , 因而可以分离变数, 只要用 $y' \frac{d}{dy}$ 代替 $\frac{d}{dx}$,

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y^{3/2}} + 2y' \frac{d}{dy} \left(\frac{y'}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}} \right) = 0.$$

整理后全式遍乘 $y^{3/2}(1+y'^2)^{3/2}$, 得

$$\frac{dy}{2y} + \frac{y'dy}{1+y'^2} = 0.$$

各项分别积分, 加以整理,

$$y' = \sqrt{\frac{2C_1 - y}{y}},$$

即

$$\frac{\sqrt{y} dy}{\sqrt{2C_1 - y}} = dx.$$

两边分别积分, 加以整理,

$$x = -\sqrt{2C_1 y - y^2} + C_1 \arccos \frac{C_1 - y}{C_1} + C_2,$$

式中 C_1 和 C_2 为积分常数. 把 $\arccos \frac{C_1 - y}{C_1}$ 记作 θ , 则

$$\begin{cases} y = C_1 - C_1 \cos \theta, \\ x = C_1 \theta - C_1 \sin \theta + C_2. \end{cases}$$

这是摆线(又叫旋轮线). 积分常数需根据端点条件(即轨道通过的给定端点 A 和 B) 来确定.

较复杂情况下的欧拉方程可仿照上述方法导出。现列举如下。

(1) 泛函 J 取决于单个自变数 x 、 s 个函数 $y_\alpha(x)$ ($\alpha = 1, 2, \dots, s$) 及其导数 $y'_\alpha(x)$ ($\alpha = 1, 2, \dots, s$)。这时变分问题

$$\delta \int_a^b F(x, y_1, y_2, \dots, y_s, y'_1, y'_2, \dots, y'_s) dx = 0$$

可化为

$$\int_a^b \sum_{\alpha=1}^s \left[\frac{\partial F}{\partial y_\alpha} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'_\alpha} \right] \delta y_\alpha dx = 0. \quad (32.9)$$

因为各个 δy_α 是任意的, 所以得**欧拉方程**

$$\frac{\partial F}{\partial y_\alpha} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'_\alpha} = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s). \quad (32.10)$$

(2) 泛函 J 取决于单个自变数 x 、单个函数 $y(x)$ 及其高阶导数 y', y'', y''' 。这时变分问题

$$\delta \int_a^b F(x, y, y', y'', y''') dx = 0$$

的**欧拉方程**是

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial F}{\partial y''} - \frac{d^3}{dx^3} \frac{\partial F}{\partial y'''} = 0 \quad (32.11)$$

(3) 泛函 J 取决于两个自变数 x 和 y 、单个二元函数 $u(x, y)$ 。这时变分问题

$$\delta \iint F \left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy = 0$$

的**欧拉方程**是

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial (\partial u / \partial x)} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial (\partial u / \partial y)} = 0 \quad (32.12)$$

(4) 附加条件下的变分问题

设泛函 J 取决于单个自变数 x 、 s 个函数 $y_\alpha(x)$ ($\alpha = 1, 2, \dots, s$) 及其导数 $y'_\alpha(x)$ ($\alpha = 1, 2, \dots, s$)。这里研究变分问题

$$\delta J = \delta \int_a^b F(x, y_1, \dots, y_s, y'_1, \dots, y'_s) dx = 0, \quad (32.13)$$

但是存在着 k 个附加条件或叫约束条件

$$\int_a^b G_j(x, y_1, \dots, y_s, y'_1, \dots, y'_s) dx = c_j \quad (j = 1, 2, \dots, k), \quad (32.14)$$

其中 c_j 是给定的常数。

在这情况下,变分问题(32.13)固然可以化为(32.9),即

$$\int_a^b \sum_{\alpha=1}^s \left[\frac{\partial F}{\partial y_\alpha} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'_\alpha} \right) \right] \delta y_\alpha dx = 0,$$

然而其中 s 个 δy_α 并不独立,所以不能由此得出欧拉方程(32.10)。怎么办?一个办法是仿照 § 10 和 § 12 运用拉格朗日乘子法。

约束条件(32.14)可以化为

$$\int_a^b \sum_{\alpha=1}^s \left[\frac{\partial G_j}{\partial y_\alpha} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial G_j}{\partial y'_\alpha} \right) \right] \delta y_\alpha dx = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, k). \quad (32.15)$$

按照拉格朗日乘子法,把(32.15)的 k 个方程分别乘以待定的常数 $\lambda_j (j = 1, 2, \dots, k)$ 并与(32.9)累加起来,

$$\int_a^b \sum_{\alpha=1}^s \left\{ \frac{\partial F}{\partial y_\alpha} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'_\alpha} \right) + \sum_{j=1}^k \lambda_j \left[\frac{\partial G_j}{\partial y_\alpha} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial G_j}{\partial y'_\alpha} \right) \right] \right\} \delta y_\alpha dx = 0.$$

于是得

$$\frac{\partial}{\partial y_\alpha} \left[F + \sum_{j=1}^k \lambda_j G_j \right] - \frac{d}{dx} \frac{\partial}{\partial y'_\alpha} \left[F + \sum_{j=1}^k \lambda_j G_j \right] = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s). \quad (32.16)$$

(32.16)的 s 个方程和 k 个约束条件(10.14)合起来正好可以决定 s 个函数 $y_\alpha(x)$ 和 k 个乘子 λ_j 。

§ 33. 哈密顿原理

读者或许已经注意到拉格朗日方程(11.14)的形式与欧拉方程(32.10)完全一样。这就是说,拉格朗日方程(11.14)是下列变分问题

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(t, q_1, q_2, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s) dt = 0$$

的欧拉方程。

这样,力学系统的动力学就归结为一个变分原理:力学系统从时刻 t_1 到时刻 t_2 的一切可能的运动之中,使**哈密顿作用量**

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \quad (33.1)$$

取极值的运动才是实际发生的运动。这叫作**哈密顿原理**。

以 s 个广义坐标 $q_\alpha (\alpha = 1, 2, \dots, s)$ 为直角坐标的空间叫作**位形空间**。力学系统在任一时刻的位形可用位形空间中的一点来表明。随着时间的运转,力学系统的位形发生演变,位形空间中的代表点就描出相应曲线。在一切可能的曲线中,使作用量(33.1)取极值的那一条曲线就代表真实的运动。

在位形空间中描述力学系统的运动,这时时间 t 是外加的参数。我们还可以增添时间轴,把 s 维的位形空间改为 $s+1$ 维的推广的位形世界。在这世界中,力学系统的演变历史完全由一根曲线所代表,这曲线叫作力学系统的“世界线”。

本章开头曾指出,哈密顿变分原理形式十分紧凑,在坐标变换下显然不变,容易移植于无限个自由度的力学系统甚至非力学系统。不妨认为,哈密顿变分原理与牛顿运动定律相比乃是更为基本更为普遍的原理。

鉴于哈密顿原理的重要性,这里再用达朗伯原理(10.26)

$$\sum_{i=1}^n (\mathbf{F}_i - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (33.2)$$

来“推导”哈密顿原理。

先看 $m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i$,

$$\begin{aligned} m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i &= m_i \left(\frac{d}{dt} \dot{\mathbf{r}}_i \right) \cdot \delta \mathbf{r}_i \\ &= \frac{d}{dt} (m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i) - m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \dot{\mathbf{r}}_i \\ &= \frac{d}{dt} (m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i) - \delta \left(\frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i \right) \\ &= \frac{d}{dt} (m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i) - \delta \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) \\ &= \frac{d}{dt} (m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i) - \delta T_i. \end{aligned}$$

两边对时间积分，

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i dt &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} (m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i) dt - \int_{t_1}^{t_2} \delta T_i dt \\ &= [m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i]_{t_1}^{t_2} - \delta \int_{t_1}^{t_2} T_i dt \end{aligned} \quad (33.3)$$

力学系统的初始和终末位形可以认为是给定的，则 $\delta \mathbf{r}_i|_{t_1} = \delta \mathbf{r}_i|_{t_2} = 0$ 。因而(33.3)成为

$$\int_{t_1}^{t_2} m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i dt = -\delta \int_{t_1}^{t_2} T_i dt. \quad (33.4)$$

再看 $\mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i$,

$$\mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \delta W_i, \quad (33.5)$$

其中

$$W_i = \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i$$

拿达朗伯原理(33.2)对时间积分，并以(33.4)和(33.5)代人，

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n (W_i + T_i) dt = 0,$$

即

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T + W) dt = 0, \quad (33.6)$$

其中

$$T = \sum_{i=1}^s T_i$$

是力学系统的动能。(33.6)就是一般情况下的哈密顿原理。

利用广义力 $Q_\alpha (\alpha = 1, 2, \dots, s)$ 的定义(10.12), 可把(33.6)改写为

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} T dt + \int_{t_1}^{t_2} \sum_{\alpha=1}^s Q_\alpha \delta q_\alpha dt = 0. \quad (33.7)$$

如果广义力 $Q_\alpha (\alpha = 1, 2, \dots, s)$ 具有势能 $V(q, t)$,

$$Q_\alpha = - \frac{\partial V}{\partial q_\alpha}, \quad (33.8)$$

或具有广义势能^① $V(q, \dot{q}, t)$,

$$Q_\alpha = - \frac{\partial V}{\partial q_\alpha} + \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_\alpha}, \quad (33.9)$$

则(33.7)可改写为

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0. \quad (33.10)$$

这正是哈密顿原理。

以上是把哈密顿原理看作 s 维的位形空间中的变分原理, 其实只要作简单代换, 也可以把它当作 $2s$ 维的相空间中的变分原理

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{\alpha=1}^s p_\alpha \dot{q}_\alpha - H(p, q, t) \right] dt = 0. \quad (33.11)$$

事实上,(33.11)给出

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{\alpha=1}^s \left[p_\alpha \delta \dot{q}_\alpha + \dot{q}_\alpha \delta p_\alpha - \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \delta p_\alpha - \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha \right] dt = 0. \quad (33.12)$$

既然说的是相空间, 上式左边的 $\int_{t_1}^{t_2} \sum_{\alpha=1}^s p_\alpha \delta \dot{q}_\alpha dt$ 应设法改写,

^① 例如电磁场中带电质点所受的力 $F = qE + qv \times B$ 具有广义势能 $q\varphi - qA \cdot v$, 见(13.5).

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} p_\alpha \delta \dot{q}_\alpha dt &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{d}{dt} (p_\alpha \delta q_\alpha) - \dot{p}_\alpha \delta q_\alpha \right] dt \\ &= (p_\alpha \delta q_\alpha) \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \dot{p}_\alpha \delta q_\alpha dt. \end{aligned}$$

力学系统的初始和终末位形可认为是给定的, $\delta q_\alpha|_{t_1} = \delta q_\alpha|_{t_2} = 0$. 上式成为

$$\int_{t_1}^{t_2} p_\alpha \delta \dot{q}_\alpha dt = - \int_{t_1}^{t_2} \dot{p}_\alpha \delta q_\alpha dt.$$

以此代入(33.12),

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{\alpha=1}^s \left[\left(\dot{q}_\alpha - \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \right) \delta p_\alpha - \left(\dot{p}_\alpha + \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \right) \delta q_\alpha \right] dt = 0.$$

既然 δp_α 和 δq_α 是任意的, 上式各个系数应分别为零,

$$\dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \quad \dot{p}_\alpha = - \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s).$$

这正是哈密顿正则方程(28.9).

这里研究一下两个变分原理的等价问题. 如果给(33.10)或(33.11)的被积函数加上某个函数 U 对时间 t 的全导数 dU/dt , 则增添部分的变分

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{dU}{dt} dt = \delta U \Big|_{t_1}^{t_2}.$$

如认为力学系统在位形空间或相空间中的代表点的初始和终末位形是给定的, 则 $\delta U|_{t_1} = \delta U|_{t_2} = 0$, 因而增添部分的变分恒为零. 这就是说, 哈密顿原理(33.10)或(33.11)中的被积函数加上某个函数 U 对时间 t 的全导数, 并不改变动力学方程.

前面讨论了位形空间和相空间的哈密顿原理, 现在我们讨论位形世界的哈密顿原理. 如同在相对论中, 时间和空间被看成一个统一体, 仿此, 我们将时间 t 看作和广义坐标 q 地位平等的变量, t 相当于第 $s+1$ 个广义坐标, 这 $s+1$ 个广义坐标构成了推广的位形世界. 另外选取某个参数 τ , 把运动规律 $q_\alpha = q_\alpha(t)$ 表示成参数形式 $q_\alpha = q_\alpha(\tau)$ 及 $t = t(\tau)$, 并以 q'_α 和 t' 分别表

示 q_α 和 t 对参数 τ 的导数。由于 $\dot{q}_\alpha = q'_\alpha / t'$ ，作用量就可表为

$$S = \int L\left(q_1, \dots, q_s, t, \frac{q_1}{t'}, \dots, \frac{q_s}{t'}\right) t' d\tau, \quad (33.11')$$

把其中被积函数定义为 Λ ，不妨叫作**修改的拉格朗日函数**，即

$\Lambda = L\left(q, t, \frac{q'}{t'}\right) t' = \Lambda(q, t, q', t')$ ，而哈密顿原理写为

$$\delta \int \Lambda d\tau = 0. \quad (33.12')$$

这就是位形世界的哈密顿原理。

由位形世界的哈密顿原理可导出变分的欧勒方程

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q'_\alpha} \right) - \frac{\partial \Lambda}{\partial q_\alpha} = 0, \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s). \quad (33.13)$$

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial t'} \right) - \frac{\partial \Lambda}{\partial t} = 0, \quad (33.14)$$

显然，(33.13)式等价于 s 个拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s), \quad (33.15)$$

而(33.14)式等价于

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{\alpha=1}^s \dot{q}_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - L \right) + \frac{\partial L}{\partial t} = 0, \quad (33.16)$$

这正是

$$\frac{dH}{dt} = - \frac{\partial L}{\partial t}. \quad (33.17)$$

广义动量 p_α 的定义现在是

$$p_\alpha = \frac{\partial \Lambda}{\partial q'_\alpha} = \frac{\partial(Lt')}{\partial q'_\alpha} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \left[\frac{\partial}{\partial q'_\alpha} \left(\frac{q'_\alpha}{t'} \right) \right] t' = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}, \quad (33.18)$$

和以前的定义等价；而和 t 这个广义坐标对应的广义动量是

$$p_t = \frac{\partial \Lambda}{\partial t'} = \frac{\partial(Lt')}{\partial t'} = \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \left[\frac{\partial}{\partial t'} \left(\frac{q'_\alpha}{t'} \right) \right] t' + L$$

$$-- \sum_{\alpha=1}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \dot{q}_\alpha + L = L - \sum_{\alpha=1}^i p_\alpha \dot{q}_\alpha = --H. \quad (33.19)$$

它是系统广义能量的负值。

哈密顿原理现在可表述为：真实运动的世界线和有相同起点和终点的所有其它世界线相比，真实运动的作用量取极值。

§ 34. 最小作用量原理

力学系统的运动规律可由哈密顿原理给出，它是哈密顿作用量取极值的原理。但可以证明，只要积分区间取得足够小，这极值是极小值，也就是说，真实运动的世界线和有相同起点和终点的所有其它世界线相比，真实运动的作用量(哈密顿作用量)取极小值。这是一种最小作用量原理。实际上，还有其他形式的最小作用量原理和哈密顿原理相似，最小作用量的名称并不意味着真实运动的作用量永远是最小，而只说明，真实运动的作用量取稳定值，只有当积分长度是一个相当小的有限量时，真实运动的作用量才取极小值。由于哈密顿原理已有定名，所以不再称为最小作用量原理，而将该名称赋予其他的最小作用量原理。

(1) 可遗坐标和哈密顿原理

设有某个广义坐标例如 q_1 是可遗坐标，就是说，拉格朗日函数 $L(q_2, \dots, q_i; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_i; t)$ 不含有 q_1 ，但 \dot{q}_1 还是可能含有的。读者已经熟知，与可遗坐标 q_1 共轭的广义动量 p_1 守恒，

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}(q_2, \dots, q_i; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_i; t) = p_1. \quad (34.1)$$

从上式可解出 \dot{q}_1 ，即用 $\alpha \neq 1$ 的广义坐标 q_α 和广义速度 \dot{q}_α 以及常数 p_1 和时间 t 表出 \dot{q}_1 ，

$$\dot{q}_1 = \dot{q}_1(q_2, \dots, q_i; p_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_i; t). \quad (34.2)$$

利用上式可以消去 L 中的 \dot{q}_1 。这样, L 既不含 q_1 又不含 \dot{q}_1 , 与 $\alpha = 1$ 有关的自由度完全从拉格朗日函数 L 中消去。

既然从拉格朗日函数 L 中消去了有关 $\alpha = 1$ 的自由度, 似乎在哈密顿原理

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0$$

中也就简单地消去了关于 $\alpha = 1$ 的自由度。这个想法并不对! 原来, 用(34.2)代入, 意味着 q_1 是(34.2)的积分, 从而变分 δq_1 不再是独立的, 因而不能认为它的初始和终末值一定为零。从物理上说, 在哈密顿原理中考虑的本来是一切可能的运动, 这些运动只受约束条件的限制, 根本不考虑广义动量 p_1 的守恒(当然, 最后解出的实际运动的广义动量 p_1 是守恒的, 而且 p_1 取某个特定的值)。可是, (34.2)却限制这些可能的运动必须各自遵守广义动量 p_1 守恒(但它们的 p_1 各不相同)。这样, q_1 不再可以任意给定, 从而 $\delta q_1|_{t_1}$ 和 $\delta q_1|_{t_2}$ 未必是零。现在计算作用量的变分①

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{\alpha=1}^i \left[\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta \dot{q}_\alpha \right] dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{\alpha=1}^i \left[\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta q_\alpha \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) \delta q_\alpha \right] dt \\ &= \sum_{\alpha=1}^i \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) \right] \delta q_\alpha dt \end{aligned}$$

① 虽然 q_1 已从 L 中消去, 这里所写出的变分中对 α 的求和仍然从 $\alpha = 1$ 开始, 事实上, 以(34.2)代入 L 得 $\bar{L}(q_2, \dots, q_i; \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_i; t)$, 则

$$\delta \bar{L} = \sum_{\alpha=2}^i \left[\frac{\partial \bar{L}}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha + \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta \dot{q}_\alpha \right]$$

与

$$\delta L = \sum_{\alpha=1}^i \left[\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta \dot{q}_\alpha \right]$$

是相等的。

$$\begin{aligned}
& + \sum_{\alpha=1}^i \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta q_\alpha \right) dt \\
& = 0 + \sum_{\alpha=1}^i \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta q_\alpha \right) \Big|_{t_1}^{t_2} \\
& = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \delta q_1 \right) \Big|_{t_1}^{t_2} = (p_1 \delta q_1) \Big|_{t_1}^{t_2},
\end{aligned}$$

并不等于零。考虑到广义动量 p_1 是常数, 上式可改写为

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (L - p_1 \dot{q}_1) dt = 0. \quad (34.3)$$

这才是消去了与 $\alpha = 1$ 有关的自由度以后哈密顿原理的正确形式。被积函数

$$L - p_1 \dot{q}_1 \quad (34.4)$$

不妨叫作**修改的拉格朗日函数**。不用说, (34.4) 中所有的 \dot{q}_1 都应当按照(34.2)用 $\alpha \neq 1$ 的 q_α 和 \dot{q}_α 以及 p_1 和 t 表出。

(2) 雅可俾最小作用量原理

现在研究拉格朗日函数 L 不显含时间 t 的情况。这时, 哈密顿函数 H 守恒。将时间 t 也作为广义坐标(参看 § 33), 其相应的广义动量 $p_t = -H$ [见(33.19)式]。仿照(1)中的情况, 广义坐标 t 是可遗坐标, 位形世界的哈密顿原理 $\delta \int \Lambda d\tau = 0$ 中的 Λ 应修改为

$$\Lambda - p_t \dot{t} = (L - p_t) \dot{t} = (L + H) \dot{t} = \sum_{\alpha=1}^i p_\alpha \dot{q}_\alpha \dot{t}.$$

于是, 定义雅可俾作用量

$$W = \int \sum_{\alpha=1}^i p_\alpha \dot{q}_\alpha \dot{t} d\tau, \quad (34.5)$$

哈密顿原理修改为作用量 W 的变分问题:

$$\Delta W = \Delta \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sum_{\alpha=1}^i p_\alpha \dot{q}_\alpha \dot{t} d\tau = 0. \quad (34.6)$$

为了强调这里的变分不同于 § 33 哈密顿原理中的变分, 我们改用 Δ 作为变分记号. 在 Δ 变分中, 考虑的是哈密顿函数 H 守恒的一切可能的运动(但它们的 H 各不相同). 这样, t 不再可以任意给定, 时间 t 的变分 Δt 不为零, 特别是在两 endpoint. 因为这种 Δ 变分包含时间的变分 Δt ,

$$\Delta q_\alpha = \delta q_\alpha + \dot{q}_\alpha \Delta t,$$

有的书上把 Δ 变分称为**全变分**. (34.6)也可写成

$$\Delta \int \sum_{\alpha=1}^i p_\alpha \dot{q}_\alpha dt = 0. \quad (34.7)$$

(34.6)即(34.7)叫作**雅可俾最小作用原理**.

在(12.20)成立的条件, 最小作用原理可写成

$$\Delta \int_{r_1}^{r_2} 2T \dot{r} dr = 0, \quad \Delta \int 2T dt = 0. \quad (34.8)$$

最小作用原理的两种形式 $\Delta \int \dots \dot{r} dr$ 与 $\Delta \int \dots dt$ 相比较, 前者较好, 因为最小作用原理本来是消去时间 t 的哈密顿原理.

对于单个质点, $dt = ds/v$, 动能 $T = mv^2/2$, 又由哈密顿函数守恒得 $T = E - V$. 于是

$$\begin{aligned} 2T dt &= mv^2 \frac{ds}{v} = mv ds = \sqrt{2mT} ds \\ &= \sqrt{2m(E - V)} ds. \end{aligned}$$

最小作用原理就可具体写为消去 t 的形式

$$\Delta \int mv ds = \Delta \int \sqrt{2m(E - V)} ds = 0. \quad (34.9)$$

对于一般的力学系统, 如果 T 是广义速度的二次齐次式, 根据(20.2),

$$T = \sum_{\alpha=1}^i \sum_{\beta=1}^i \frac{1}{2} m_{\alpha\beta} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta \quad \left(m_{\alpha\beta} = m_i \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\beta} \right),$$

我们不妨定义位形空间中的弧长 ds ,

$$(ds)^2 = \sum_{\alpha=1}^i \sum_{\beta=1}^i m_{\alpha\beta} dq_\alpha dq_\beta,$$

于是力学系统在位形空间中的代表点的速度 $v = ds/dt$ ，而力学系统在位形空间中的动能则可写为 $T = v^2/2$ 。于是，也可把最小作用原理(34.8)具体写为消去 t 的形式

$$\Delta \int v ds = \Delta \int \sqrt{2(E - V)} ds = 0, \quad (34.10)$$

这样，在位形空间中(对于单个自由质点，位形空间可以就是普通空间)，哈密顿函数守恒的一切可能轨道之中，使作用量 $\int v ds$ 取极值的轨道才是实际的轨道。

几何光学中也有条变分原理，即费马原理

$$\delta \int \frac{1}{u} ds = \frac{1}{c} \delta \int n ds = 0, \quad (34.11)$$

式中 u 是光波的相速， n 是介质的折射率。费马原理指出，两点之间的一切可能光路之中，使光程 $\int n ds$ 取极值的光路才是实际的光路。

读者可以看出，几何光学的费马原理(34.11)与古典力学的雅可俾最小作用原理在形式上是一样的。大家知道，几何光学是波动光学的短波长极限，这就启发我们也可把古典力学当作某种波动力学的短波长极限，参看后面 § 40。

在古典力学中还有许许多多变分原理。变分原理的价值在于用最紧凑的方式给出动力学规律的最概括的叙述。在这方面，哈密顿原理是富有成果的。最小作用量原理与哈密顿原理相比较，两者的区别是：雅可俾作用量代替了哈密顿作用量，完全变分代替了等时变分，等能而不等时的一切可能运动代替了等时而不等能的一切可能运动，哈密顿原理适用于理想有势系统而最小作用量原理只适用于保守系统(即 $T + V = E$ (常量))。另外雅可俾最小作用量原理只涉及真实运动轨道的几何性质，所以在研究只涉及轨道的问题时，雅可俾最小作用量原理也很有用。其它许许多多变分原理没有多少生命力，就不再赘叙了。

第九章 正则变换 哈密顿-雅可俾方程

哈密顿正则方程的直接求解完全等价于求解拉格朗日方程。然而,哈密顿方程的功能并不是拉格朗日方程所能完全替代的,例如刘维定理揭露了力学系统在相空间中的运动规律,它提供了一条从经典力学过渡到统计物理的途径,而在拉格朗日动力学的位形空间中却不存在类似的规律。此外,泊松括号与哈密顿方程直接有关,却无法与拉格朗日方程产生直接的联系。力学规律的泊松括号形式,又揭示了经典力学和量子力学的对应关系。可见,哈密顿方程有其超越于拉格朗日方程的理论价值。

在本章中,我们还会发现哈密顿方程的另一种价值。与拉格朗日方程相比,哈密顿方程非但在外观形式上,而且在内在性质上具有更高的对称性。哈密顿方程的独立变量(广义坐标和广义动量)比拉格朗日方程的独立变量(广义坐标)多一倍。从表面看,这似乎是一种无谓的复杂化,其实正是由于这种变量个数的增加,使哈密顿方程对于范围更广的变换(正则变换)具有不变性。因而可以借助于这种变换使哈密顿函数变得极简单(变为常数或零),以使求解变换后的哈密顿方程成为极为简单的事。

§ 35. 正则变换

(1) 正则变换的条件

与可遗坐标对应的广义动量守恒,给解算带来不少方便。可遗坐标的个数越多,自然就越方便。同一个问题,由于广义坐标选取方法不同,可遗坐标的有无或个数随之就不同。例如,研究有心力问题时,如果用直角坐标,那就没有一个可遗坐标,但如变换到

平面极坐标,则极角 φ 就是可遗坐标。

广义坐标之间的变换叫作**点变换**。进行适当的点变换,使出现较多的可遗坐标,往往能简化问题的解算。在这一点上,拉格朗日动力学和哈密顿动力学是一样的。

在哈密顿动力学中,广义坐标 $q_\alpha (\alpha = 1, 2, \dots, s)$ 和 $p_\alpha (\alpha = 1, 2, \dots, s)$ 处于对等的地位,因而不必限于点变换,完全可以考虑更为广义的变换

$$\begin{cases} P_\alpha = P_\alpha(p, q, t) \\ Q_\alpha = Q_\alpha(p, q, t), \end{cases} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s) \quad (35.1)$$

上面的式子中已把宗量 q_1, q_2, \dots, q_s 缩写为 q ,把宗量 p_1, p_2, \dots, p_s 缩写为 p 。

当然,我们要求变换后的动力学方程仍然是哈密顿正则方程。满足这一要求的变换(35.1)叫作**正则变换**。

应当着重指出,变换以后的两组变数 P_α 与 $Q_\alpha (\alpha = 1, 2, \dots, s)$ 完全对等,没有理由再把它们区分为“坐标”和“动量”。这样,在哈密顿动力学中,满足哈密顿正则方程的一对变数 P_α 与 Q_α 就叫作一对**正则变数**或一对**共轭变数**,说不上哪个是坐标,哪个是动量。

现在考察怎样的变换才是正则变换。

变换前的 p_α 和 $q_\alpha (\alpha = 1, 2, \dots, s)$ 满足哈密顿正则方程,变换后的 P_α 与 $Q_\alpha (\alpha = 1, 2, \dots, s)$ 也满足哈密顿正则方程。显然,作为同一个力学系统的动力学方程,这两个正则方程是彼此等价的。

这就是说,变分原理 $\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{\alpha=1}^s p_\alpha \dot{q}_\alpha - H(p, q, t) \right] dt = 0$ 与

变分原理 $\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{\alpha=1}^s P_\alpha \dot{Q}_\alpha - K(P, Q, t) \right] dt = 0$ 两者是等价的

(这里 K 代表变换后的哈密顿函数)。按照§33的讨论,

$\sum_{\alpha=1}^s p_\alpha \dot{q}_\alpha - H$ 与 $\sum_{\alpha=1}^s P_\alpha \dot{Q}_\alpha - K$ 可以相差某个函数 U 对时间的

全导数,

$$\left(\sum_{\alpha=1}^j p_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} - H \right) - \left(\sum_{\alpha=1}^j P_{\alpha} \dot{Q}_{\alpha} - K \right) = \frac{dU}{dt},$$

即
$$\sum_{\alpha=1}^j p_{\alpha} dq_{\alpha} - \sum_{\alpha=1}^j P_{\alpha} dQ_{\alpha} + (K - H) dt = dU. \quad (35.2)$$

满足(25.2)的变换是正则变换。

(2) 母函数

函数 U 决定了正则变换,因而叫作正则变换的**母函数**。

(35.2)提示可以把母函数用 q_{α} 和 $Q_{\alpha} (\alpha = 1, 2, \dots, s)$ 以及 t 表出,今记作 U_1 ,

$$U_1 = U_1(q, Q, t). \quad (35.3a)$$

这时,(35.2)成为

$$\sum_{\alpha=1}^j p_{\alpha} dq_{\alpha} - \sum_{\alpha=1}^j P_{\alpha} dQ_{\alpha} + (K - H) dt = dU_1. \quad (35.4a)$$

这给出

$$\begin{cases} p_{\alpha} = \frac{\partial U_1}{\partial q_{\alpha}}, & P_{\alpha} = -\frac{\partial U_1}{\partial Q_{\alpha}} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s); \end{cases} \quad (35.5a)$$

$$\begin{cases} K - H = \frac{\partial U_1}{\partial t}. \end{cases} \quad (35.6a)$$

(35.5a)所给出的正是变换公式。当然,这还不是我们熟悉的例如(35.1)形式的变换公式。不过,只要通过代数运算就可以把(35.5a)化为(35.1)。(35.6a)则给出变换后的哈密顿函数 K 。当然, K 里的 p_{α} 和 q_{α} 都应通过变换公式改用 P_{α} 和 Q_{α} 表出。任给一个函数 $U_1(q, Q, t)$,相应地就有一个正则变换。

如母函数 U_1 不显含时间,则变换公式(35.5a)也就不含时间, $\frac{\partial U_1}{\partial t} = 0$,因而变换前后的哈密顿函数相等。

母函数 U_1 是用 q_{α} 和 Q_{α} 以及 t 表出的。借助于勒让德变

换,可用 p_α 代替 q_α . 就是说,改用

$$U_2(p, Q, t) = U_1(q, Q, t) - \sum_{\alpha=1}^j p_\alpha q_\alpha \quad (35.3b)$$

作为母函数. 利用(35.4a), U_2 的微分可写为

$$\begin{aligned} dU_2 &= dU_1 - \sum_{\alpha=1}^j p_\alpha dq_\alpha - \sum_{\alpha=1}^j q_\alpha dp_\alpha \\ &= - \sum_{\alpha=1}^j q_\alpha dp_\alpha - \sum_{\alpha=1}^j P_\alpha dQ_\alpha + (K - H)dt. \end{aligned} \quad (35.4b)$$

这给出

$$\begin{cases} q_\alpha = -\frac{\partial U_2}{\partial p_\alpha}, & P_\alpha = -\frac{\partial U_2}{\partial Q_\alpha} \\ K - H = \frac{\partial U_2}{\partial t} \end{cases} \quad (35.5b)$$

(35.5b) 给出变换公式, (35.6b) 给出变换后的哈密顿函数.

借助于另一个勒让德变换, 可用 P_α 代替 U_1 里的 Q_α , 即改用

$$U_3(q, P, t) = U_1(q, Q, t) + \sum_{\alpha=1}^j P_\alpha Q_\alpha \quad (35.3c)$$

作为母函数^①. U_3 的微分

$$\begin{aligned} dU_3 &= dU_1 + \sum_{\alpha=1}^j P_\alpha dQ_\alpha + \sum_{\alpha=1}^j Q_\alpha dP_\alpha \\ &= \sum_{\alpha=1}^j p_\alpha dq_\alpha + \sum_{\alpha=1}^j Q_\alpha dP_\alpha + (K - H)dt. \end{aligned} \quad (35.4c)$$

这给出

① 由于 $dU_1 = \sum_{\alpha=1}^j p_\alpha dq_\alpha - \sum_{\alpha=1}^j P_\alpha dQ_\alpha + (K - H)dt$ 中前两项的符号是不

同的, 所以勒让德变换中所涉及的 $\sum_{\alpha=1}^j p_\alpha dq_\alpha$ 和 $\sum_{\alpha=1}^j P_\alpha dQ_\alpha$ 前的符号也不同.

$$\begin{cases} p_\alpha = \frac{\partial U_1}{\partial q_\alpha}, & Q_\alpha = \frac{\partial U_1}{\partial P_\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s); \end{cases} \quad (35.5c)$$

$$\begin{cases} K - H = \frac{\partial U_1}{\partial t}. \end{cases} \quad (35.6c)$$

(35.5c) 给出变换公式, (35.6c) 给出变换后的哈密顿函数。

同理, 借助于另一个勒让德变换, 还可用 p_α 代替 U_1 里的 q_α , 用 P_α 代替 U_1 里的 Q_α 。这就是说, 改用

$$U_2(p, P, t) = U_1(q, Q, t) - \sum_{\alpha=1}^s p_\alpha q_\alpha + \sum_{\alpha=1}^s P_\alpha Q_\alpha \quad (35.3d)$$

作为母函数, U_2 的微分

$$\begin{aligned} dU_2 &= dU_1 - \sum_{\alpha=1}^s p_\alpha dq_\alpha - \sum_{\alpha=1}^s q_\alpha dp_\alpha \\ &\quad + \sum_{\alpha=1}^s P_\alpha dQ_\alpha + \sum_{\alpha=1}^s Q_\alpha dP_\alpha \\ &= - \sum_{\alpha=1}^s q_\alpha dp_\alpha + \sum_{\alpha=1}^s Q_\alpha dP_\alpha + (K - H)dt. \end{aligned} \quad (35.4d)$$

这给出

$$\begin{cases} q_\alpha = - \frac{\partial U_2}{\partial p_\alpha}, & Q_\alpha = \frac{\partial U_2}{\partial P_\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s); \end{cases} \quad (35.5d)$$

$$\begin{cases} K - H = \frac{\partial U_2}{\partial t}. \end{cases} \quad (35.6d)$$

(35.5d) 给出变换公式, (35.6d) 给出变换后的哈密顿函数。

(3) 正则变换举例

例1 取母函数

$$U_2(q, P, t) = \sum_{\alpha=1}^s q_\alpha P_\alpha$$

这给出变换公式

$$p_\alpha = \frac{\partial U_2}{\partial q_\alpha} = P_\alpha$$

$$Q_a = \frac{\partial U_3}{\partial P_a} = q_a.$$

事实上并没有变换,或者说,这是恒等变换.

例 2 取母函数

$$U_3(q, P, t) = \sum_{a=1}^s k_a q_a P_a \quad (k_a \text{ 为常数}).$$

这给出变换公式

$$p_a = \frac{\partial U_3}{\partial q_a} = k_a P_a, \quad Q_a = \frac{\partial U_3}{\partial P_a} = k_a q_a.$$

这就是说,一个正则变换如果把广义坐标 q_a 乘以 k_a 变为 $Q_a = k_a q_a$, 它必然将广义动量 p_a 除以 k_a 变为 $P_a = p_a/k_a$.

这里,某些初学者感到一定的困惑. 在他们看来,以直角坐标系为例,如果把长度的单位变为原来的 $1/k$, 则质点的坐标从 x 变为 kx , 从而质点的动量 $m\dot{x}$ 应变为 $k m\dot{x}$, 而不是变为其 $1/k$ 倍! 问题出在哪里? 原来,正则变换前后的哈密顿作用量的单位相同. 换句话说,作用量单位不变. 我们知道,作用量的量纲 = ML^2/T . 作用量单位不变的条件下,我们不能只把长度的单位变为原来的 $1/k$ 倍, 而必须相应地改变时间或质量(或两者)的单位. 比方说,不改变时间单位,而把质量的单位变为原来的 k^2 倍, 则质量 m 将变为原来的 $1/k^2$, 动量 $m\dot{x}$ 则变为原来的 $(1/k^2)k$ 即 $1/k$. 其实,如果读者把分析力学关于广义动量的定义 $p_a = \partial L/\partial \dot{q}_a = \partial T/\partial \dot{q}_a$ 用于直角坐标,可以很直接地得出这一结论.

例 3 取母函数

$$U_3(q, P, t) = \sum_{a=1}^s f_a(q_1, q_2, \dots, q_s, t) P_a.$$

这给出变换公式

$$Q_a = \frac{\partial U_3}{\partial P_a} = f_a(q_1, q_2, \dots, q_s, t),$$

$$p_a = \frac{\partial U_3}{\partial q_a} = \sum_{b=1}^s \frac{\partial f_b}{\partial q_a} P_b.$$

变换公式 $Q_a = f_a(q_1, q_2, \dots, q_s, t)$ 表明这是点变换.

特别是,如果

$$f_a = \sum_{c=1}^s a_{ac} q_c,$$

并且 $a_{\alpha\beta}$ 满足正交条件

$$\sum_{\beta=1}^s a_{\alpha\beta} a_{\gamma\beta} = \delta_{\alpha\gamma},$$

则这个点变换是正交变换:

$$Q_\alpha = \sum_{\beta=1}^s a_{\alpha\beta} q_\beta.$$

至于

$$p_\alpha = \sum_{\beta=1}^s a_{\alpha\beta} P_\beta.$$

上式两方乘以 $a_{\gamma\alpha}$ 并对 α 求和, 得

$$\sum_{\alpha=1}^s a_{\gamma\alpha} p_\alpha = \sum_{\alpha=1}^s \sum_{\beta=1}^s a_{\gamma\alpha} a_{\beta\alpha} P_\beta = \sum_{\beta=1}^s \delta_{\gamma\beta} P_\beta = \tilde{r}_{\gamma c}$$

例 4 取母函数

$$U_1(q, Q, t) = \sum_{\alpha=1}^s q_\alpha Q_\alpha.$$

这给出变换公式

$$p_\alpha = \frac{\partial U_1}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha, \quad P_\alpha = -\frac{\partial U_1}{\partial Q_\alpha} = -q_\alpha.$$

请看, 坐标变换成了“动量”, 动量变换成了“坐标”。

例 5 用正则变换方法求解谐振子问题

$$H = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} k x^2.$$

解 取母函数

$$U_1(x, X, t) = \frac{1}{2} \sqrt{km} x^2 \operatorname{ctg}(2\pi X).$$

关于这个母函数的来源见后面 § 36 例 1 和 § 37 例 1. 这母函数给出变换公式

$$\begin{cases} p = \frac{\partial U_1}{\partial x} = \sqrt{km} x \operatorname{ctg}(2\pi X), \\ P = -\frac{\partial U_1}{\partial X} = \frac{1}{2} \sqrt{km} x^2 2\pi \operatorname{csc}^2(2\pi X). \end{cases} \quad (1)$$

由此解出 x 和 p ,

$$\begin{cases} x = \sqrt{\frac{P}{\pi \sqrt{km}}} \sin(2\pi X), \\ p = \sqrt{\frac{\sqrt{km} P}{\pi}} \cos(2\pi X). \end{cases} \quad (2)$$

变换后的哈密顿函数

$$\begin{aligned} K(P, X) &= H(p, x) = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} k x^2 \\ &= \frac{1}{2m} \frac{\sqrt{km}}{\pi} P \cos^2(2\pi X) + \frac{1}{2} k \frac{P}{\pi \sqrt{km}} \sin^2(2\pi X) \\ &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} P. \end{aligned} \quad (3)$$

变换后的广义坐标 X 是循环坐标。变换后的哈密顿正则方程为

$$\dot{p} = -\frac{\partial K}{\partial X} = 0, \quad \dot{X} = \frac{\partial K}{\partial P} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (4)$$

由此解出

$$X = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} t + \theta. \quad (5)$$

回到原来的变数，

$$x = \sqrt{\frac{P}{\pi \sqrt{km}}} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + 2\pi\theta\right). \quad (6)$$

(4) 泊松括号的不变性

泊松括号的一个很重要的性质是在正则变换下不变。

将变换前的正则变数记作 p_α 和 q_α ($\alpha = 1, 2, \dots, s$)，泊松括号记作 $[\varphi, \psi]_{p,q}$ 。借助于母函数 $U_3(q, P, t)$ 进行正则变换，变换公式为 (35.5c)。将变换后的正则变数记作 P_α 和 Q_α ($\alpha = 1, 2, \dots, s$) 泊松括号记作 $[\varphi, \psi]_{P,Q}$ 。现在要证明 $[\varphi, \psi]_{p,q} = [\varphi, \psi]_{P,Q}$ 。

按定义，

$$[\varphi, \psi]_{p,q} = \sum_{\alpha=1}^s \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial q_\alpha} \right).$$

按变换公式 (35.5c)， p 和 q 应看作 Q 和 P 的函数。任何一个力学

量 f 或表为 $f_1(q, p(q, P), t)$ 或表为 $f(Q(q, P), P, t)$ 。拿这两种形式分别对 q_α 求偏导数, 并加以比较, 就得到

$$\frac{\partial}{\partial q_\alpha} + \sum_{\beta=1}^i \frac{\partial p_\beta}{\partial q_\alpha} \frac{\partial}{\partial p_\beta} = \sum_{\beta=1}^i \frac{\partial Q_\beta}{\partial q_\alpha} \frac{\partial}{\partial Q_\beta},$$

即

$$\frac{\partial}{\partial q_\alpha} = \sum_{\beta=1}^i \left(-\frac{\partial p_\beta}{\partial q_\alpha} \frac{\partial}{\partial p_\beta} + \frac{\partial Q_\beta}{\partial q_\alpha} \frac{\partial}{\partial Q_\beta} \right).$$

这样,

$$[\varphi, \psi]_{pq} = \sum_{\alpha=1}^i \left[\sum_{\beta=1}^i \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial p_\beta} \frac{\partial p_\beta}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial \varphi}{\partial Q_\beta} \frac{\partial Q_\beta}{\partial q_\alpha} \right) \frac{\partial \psi}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_\alpha} \sum_{\beta=1}^i \left(-\frac{\partial \psi}{\partial p_\beta} \frac{\partial p_\beta}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial \psi}{\partial Q_\beta} \frac{\partial Q_\beta}{\partial q_\alpha} \right) \right].$$

加以整理,

$$[\varphi, \psi]_{pq} = - \sum_{\alpha=1}^i \sum_{\beta=1}^i \frac{\partial p_\beta}{\partial q_\alpha} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial p_\beta} \frac{\partial \psi}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial p_\beta} \right) + \sum_{\alpha=1}^i \sum_{\beta=1}^i \frac{\partial Q_\beta}{\partial q_\alpha} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial Q_\beta} \frac{\partial \psi}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial Q_\beta} \right).$$

以变换公式(35.5c)代入,

$$[\varphi, \psi]_{pq} = - \sum_{\alpha=1}^i \sum_{\beta=1}^i \frac{\partial^2 U}{\partial q_\alpha \partial q_\beta} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial p_\beta} \frac{\partial \psi}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial p_\beta} \right) + \sum_{\alpha=1}^i \sum_{\beta=1}^i \frac{\partial^2 U}{\partial q_\alpha \partial P_\beta} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial Q_\beta} \frac{\partial \psi}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial Q_\beta} \right).$$

仔细观察上式右边第一部分, 既然 α 和 β 是求和指标, 完全可以把 α 和 β 交换, 这并不改变这一部分的值。但 α 和 β 交换之后, 这一部分却变为它自己的负值。这样, 这部分的值等于它自己的负值。由此可见, 这部分的值为零。于是

$$[\varphi, \psi]_{pq} = \sum_{\alpha=1}^i \sum_{\beta=1}^i \frac{\partial^2 U}{\partial q_\alpha \partial P_\beta} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial Q_\beta} \frac{\partial \psi}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial Q_\beta} \right).$$

再看 $[\varphi, \psi]_{pQ}$ 。按定义,

$$[\varphi, \phi]_{PQ} = \sum_{\beta=1}^i \left(\frac{\partial \varphi}{\partial Q_{\beta}} \frac{\partial \phi}{\partial P_{\beta}} - \frac{\partial \varphi}{\partial P_{\beta}} \frac{\partial \phi}{\partial Q_{\beta}} \right).$$

考虑到变换公式(35.5c), 将 $\partial/\partial P_{\beta}$ 表为

$$\frac{\partial}{\partial P_{\beta}} = \sum_{\alpha=1}^i \left(\frac{\partial p_{\alpha}}{\partial P_{\beta}} \frac{\partial}{\partial p_{\alpha}} - \frac{\partial Q_{\alpha}}{\partial P_{\beta}} \frac{\partial}{\partial Q_{\alpha}} \right),$$

其中 $\partial p_{\alpha}/\partial P_{\beta}$ 和 $\partial Q_{\alpha}/\partial P_{\beta}$ 可由(35.5c)算出, 这样

$$\begin{aligned} [\varphi, \phi]_{PQ} &= \sum_{\beta=1}^i \left[\frac{\partial \varphi}{\partial Q_{\beta}} \sum_{\alpha=1}^i \left(\frac{\partial \phi}{\partial p_{\alpha}} \frac{\partial p_{\alpha}}{\partial P_{\beta}} + \frac{\partial \phi}{\partial Q_{\alpha}} \frac{\partial Q_{\alpha}}{\partial P_{\beta}} \right) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{\alpha=1}^i \left(\frac{\partial \varphi}{\partial p_{\alpha}} \frac{\partial p_{\alpha}}{\partial P_{\beta}} + \frac{\partial \varphi}{\partial Q_{\alpha}} \frac{\partial Q_{\alpha}}{\partial P_{\beta}} \right) \frac{\partial \phi}{\partial Q_{\beta}} \right] \\ &= \sum_{\alpha=1}^i \sum_{\beta=1}^i \frac{\partial Q_{\alpha}}{\partial P_{\beta}} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial Q_{\beta}} \frac{\partial \phi}{\partial Q_{\alpha}} - \frac{\partial \varphi}{\partial Q_{\alpha}} \frac{\partial \phi}{\partial Q_{\beta}} \right) \\ &\quad + \sum_{\alpha=1}^i \sum_{\beta=1}^i \frac{\partial p_{\alpha}}{\partial P_{\beta}} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial Q_{\beta}} \frac{\partial \phi}{\partial p_{\alpha}} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_{\alpha}} \frac{\partial \phi}{\partial Q_{\beta}} \right). \end{aligned}$$

以变换公式(35.5c)代入

$$\begin{aligned} [\varphi, \phi]_{PQ} &= \sum_{\alpha=1}^i \sum_{\beta=1}^i \frac{\partial^2 U}{\partial P_{\alpha} \partial P_{\beta}} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial Q_{\beta}} \frac{\partial \phi}{\partial Q_{\alpha}} - \frac{\partial \varphi}{\partial Q_{\alpha}} \frac{\partial \phi}{\partial Q_{\beta}} \right) \\ &\quad + \sum_{\alpha=1}^i \sum_{\beta=1}^i \frac{\partial^2 U}{\partial q_{\alpha} \partial P_{\beta}} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial Q_{\beta}} \frac{\partial \phi}{\partial p_{\alpha}} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_{\alpha}} \frac{\partial \phi}{\partial Q_{\beta}} \right). \end{aligned}$$

跟前面同样, 上式右边第一部分为零. 于是

$$[\varphi, \phi]_{PQ} = \sum_{\alpha=1}^i \sum_{\beta=1}^i \frac{\partial^2 U}{\partial q_{\alpha} \partial P_{\beta}} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial Q_{\beta}} \frac{\partial \phi}{\partial p_{\alpha}} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_{\alpha}} \frac{\partial \phi}{\partial Q_{\beta}} \right).$$

两相比较即知变换前后 $[\varphi, \phi]_{pq} = [\varphi, \phi]_{PQ}$. 泊松括号在正则变换下的不变性乃得到证明.

如果 P_{α} 和 Q_{α} 是正则变数, 根据(31.5), 显然应该有

$$[P_{\alpha}, P_{\beta}]_{PQ} = 0, [Q_{\alpha}, Q_{\beta}]_{PQ} = 0, [Q_{\alpha}, P_{\beta}] = \delta_{\alpha\beta}.$$

根据泊松括号的不变性, 由上面的式子可推论出在正则变换前

$$[P_{\alpha}, P_{\beta}]_{pq} = 0, [Q_{\alpha}, Q_{\beta}]_{pq} = 0, [Q_{\alpha}, P_{\beta}]_{pq} = \delta_{\alpha\beta}. \quad (35.7)$$

(35.7)就是正则变换的条件, 可用来考核变换(35.1)是否正则变换。

既然泊松括号在正则变换下不变, 就没有必要在其右下角标明正则变数, 通常总是这样作的。

也可以通过下面的讨论来证明泊松括号的不变性。

首先, 假设 φ, ψ 不显含时间。将 ψ 形式上看成是某一假想系统的哈密顿函数。根据式(31.3), 有 $[\varphi, \psi]_{r, q} = d\varphi/dt$, 但 $d\varphi/dt$ 只可能与假想系统的运动性质有关, 而与变量的选择无关。因此, 从一组正则变数变换到另一组正则变数时, $[\varphi, \psi]_{r, q} = d\varphi/dt$ 不变, 即 $[\varphi, \psi]_{r, q} = [\varphi, \psi]_{r, Q}$ 。

由于在正则变换(35.5)中, 时间只起参量作用, 因而即使 φ, ψ 显含时间 t , 泊松括号的不变性仍然成立。

(5) 无限小正则变换

取母函数为

$$U_3 = \sum_{\alpha=1}^s q_{\alpha} P_{\alpha} + \varepsilon G(q, P), \quad (35.8)$$

式中 ε 是某个微小参数。这给出变换公式

$$\begin{cases} p_{\alpha} = \frac{\partial U_3}{\partial q_{\alpha}} = P_{\alpha} + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial q_{\alpha}}, \\ Q_{\alpha} = \frac{\partial U_3}{\partial P_{\alpha}} = q_{\alpha} + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial P_{\alpha}} \end{cases} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s),$$

$$\text{即} \quad \begin{cases} P_{\alpha} = p_{\alpha} - \varepsilon \frac{\partial G}{\partial q_{\alpha}}, \\ Q_{\alpha} = q_{\alpha} + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial P_{\alpha}}. \end{cases} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s). \quad (35.9)$$

这样, 变换前后的正则变数只相差数量级为 ε 的小量。这种变换因而叫作**无限小正则变换**。

在(35.9)的后一式中, 右边第二项里的 $\partial/\partial P_{\alpha}$ 改为 $\partial/\partial p_{\alpha}$ 时, 其误差的数量级为 ε , 因而将 $\varepsilon\partial/\partial P_{\alpha}$ 改为 $\varepsilon\partial/\partial p_{\alpha}$ 时, 其误差的数量级为 ε^2 , 这个二阶小量跟式中其他各项相比完全可以忽

路。于是,我们可把变换公式(35.9)改写为

$$\begin{cases} P_\alpha = p_\alpha - \varepsilon \frac{\partial G}{\partial q_\alpha}, \\ Q_\alpha = q_\alpha + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial p_\alpha} \end{cases} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s). \quad (35.10)$$

这意味着把母函数(35.8)看作 $U_3 = \sum_{\alpha=1}^s q_\alpha P_\alpha + \varepsilon G(q, p)$ 。

如果把变换前后的正则变数看作是相空间中的新旧坐标,那么,无限小正则变换就是相空间中的无限小移动,其位移 $dq_\alpha = Q_\alpha - q_\alpha, dp_\alpha = P_\alpha - p_\alpha (\alpha = 1, 2, \dots, s)$, 变换公式(35.10)也可以写成

$$\begin{cases} dp_\alpha = -\varepsilon \frac{\partial G}{\partial q_\alpha}, \\ dq_\alpha = \varepsilon \frac{\partial G}{\partial p_\alpha} \end{cases} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s). \quad (35.11)$$

认真说来,完整的(35.8)才可以叫作母函数,但常常把 $G(q, p)$ 也叫作无限小正则变换(35.11)的母函数。

例如,取母函数

$$G(q, p) = p_\beta,$$

按(35.11),这无限小正则变换是

$$\begin{cases} dp_\alpha = 0 & (\alpha = 1, 2, \dots, s); \\ dq_\alpha = 0 (\alpha \neq \beta), dq_\beta = \varepsilon. \end{cases} \quad (35.12)$$

这就是说,以 p_β 为母函数的无限小正则变换使力学系统在空间中作微小移动,它的广义坐标 q_β 增加 ε , 其他广义坐标不变。

一个有意思的例子是母函数

$$G(q, p) = H(p, q, t),$$

而 $\varepsilon = dt$, 按(35.11),这无限小正则变换是

$$\begin{cases} dp_\alpha = -dt \frac{\partial H}{\partial q_\alpha}, \\ dq_\alpha = dt \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \end{cases} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s).$$

$$\text{即} \quad \begin{cases} \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}, \\ \dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \end{cases} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s), \quad (35.13)$$

这正是哈密顿正则方程(28.9)。换句话说,以哈密顿函数 $H(p, q, t)$ 为母函数、以 dt 为参数的无限小正则变换,正好描述力学系统在 dt 时间里的演变。

至于说到力学系统在有限长时间里的演变,那就应由一系列前后相继的无限小正则变换描写。一系列前后相继的无限小正则变换的总效果也是一个正则变换。由此得到结论:力学系统的正则变数在时刻 t 的值,可由其初始值通过正则变换得出,这正则变换是时间 t 的函数。从这观点来说,力学系统的演变,对应于一个正则变换在时间中的连续伸展。

反过来说,力学系统的正则变数在时刻 t 的值,必可通过某一正则变换而变为其初始值。显然,只要具体找到一个正则变换,这个正则变换能把所有正则变数都变为常数即其初始值,也就解决了力学系统的动力学问题。下一节就要具体研究这个变换。

既然无限小正则变换代表力学系统在相空间中的移动,任意一个力学量 u 的值自然随之而变。如果 u 不显含时间,则

$$du = \sum_{\alpha=1}^s \left(\frac{\partial u}{\partial q_\alpha} dq_\alpha + \frac{\partial u}{\partial p_\alpha} dp_\alpha \right).$$

以变换公式(35.11)代入,

$$du = \epsilon \sum_{\alpha=1}^s \left(\frac{\partial u}{\partial q_\alpha} \frac{\partial G}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial u}{\partial p_\alpha} \frac{\partial G}{\partial q_\alpha} \right). \quad (35.14)$$

按照泊松括号的定义,(35.14)的右边正是 $\epsilon[u, G]$, 所以力学量 u 的增量

$$du = \epsilon[u, G], \quad (35.15)$$

将(35.15)应用于哈密顿函数 H ,

$$dH = \epsilon[H, G], \quad (35.16)$$

设 G 是力学系统的某个运动积分,且不是 t 的显函数, (18.14) 指出,此时泊松括号 $[H, G] = 0$ 。以此代入(35.16)得 $dH = 0$, 即在以 G 为母函数的无限小正则变换下, 哈密顿函数 H 不变。由此看来, 如果以 G 为母函数的无限小正则变换使 H 保持不变, 则 G 是力学系统的运动积分。这样, 我们就把力学系统的运动积分跟力学系统的对称性联系起来。只要检查哈密顿函数的对称性质, 即检查哈密顿函数在哪些操作下不变, 就能确定力学系统的所有运动积分!

§ 36. 哈密顿-雅可俾方程

(1) 哈密顿主函数

上节说到可能存在这样的正则变换, 它将把力学系统的所有正则变数都变为常数。现在就来具体寻求这样的正则变换。

我们希望变换后的哈密顿函数 $K(P, Q, t)$ 恒等于零, 因为在这种情况下, 哈密顿正则方程

$$\dot{P}_\alpha = -\frac{\partial K}{\partial Q_\alpha} = 0, \quad \dot{Q}_\alpha = \frac{\partial K}{\partial P_\alpha} = 0$$

保证所有正则变数都是常数。

按照 (35.6), $K = 0$ 可表为

$$H(q_1, q_2, \dots, q_s; p_1, p_2, \dots, p_s; t) + \frac{\partial U}{\partial t} = 0. \quad (36.1)$$

如取 $U_3(q, P, t)$ 形式的母函数, (35.5c) 指出

$$p_\alpha = \frac{\partial U_3}{\partial q_\alpha}.$$

将上式代入(35.1)就得到

$$H\left(q_1, q_2, \dots, q_s; \frac{\partial U_3}{\partial q_1}, \frac{\partial U_3}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial U_3}{\partial q_s}; t\right) + \frac{\partial U_3}{\partial t} = 0. \quad (36.2)$$

这是决定母函数 $U_3(q, P, t)$ 的一阶非线性偏微分方程, 叫作**哈密顿-雅可俾方程**。

哈密顿-雅可俾方程(36.2)的解叫作**哈密顿主函数**, 我们把它记作 $S(q, P, t)$ 。解得哈密顿主函数之后, (35.5c) 给出所求的变换公式。变换后的正则变数全是常数, 进行逆变换, 回到原来的正则变数, 问题就宣告解决。这样, 哈密顿正则方程的求解归结为哈密顿-雅可俾方程的求解。

哈密顿-雅可俾方程是 $s + 1$ 个变数 $(q_1, q_2, \dots, q_s, t)$ 的偏微分方程, 它的解 S 应当含有 $s + 1$ 个积分常数。注意 S 本身并不出现于(36.2)之中, 出现的是它的偏导数, 因此, 如果某个 S 是(36.2)的解, 则“ $S + \text{常数}$ ”也是方程的解。这就是说, 有一个积分常数以相加的方式出现。作为正则变换的母函数, 相加常数是完全不起作用的。这样, 不妨说, S 含有 s 个积分常数 C_1, C_2, \dots, C_s , 其中没有一个以相加的方式出现。

作为 $U_3(q, P, t)$ 形式的母函数, S 应当是 $q_1, q_2, \dots, q_s; P_1, P_2, \dots, P_s; t$ 的函数。但方程(36.2)并不规定 S 对 P_1, P_2, \dots, P_s 的依赖性, 因而 P_1, P_2, \dots, P_s 可以任意选取, 只要它们是常数。这里, 很自然取 s 个积分常数 C_1, C_2, \dots, C_s 作为 P_1, P_2, \dots, P_s 。

归纳起来说, 用哈密顿-雅可俾方程(36.2)解算力学系统动力学问题的步骤如下: (1)将哈密顿函数 $H(p, q, t)$ 中的 p_i 分别改写为 $\partial S / \partial q_i$, 按(36.2)写出哈密顿-雅可俾方程。(2)解出哈密顿主函数 $S(q_1, q_2, \dots, q_s; C_1, C_2, \dots, C_s; t)$, 它含有 s 个非相加的积分常数 C_1, C_2, \dots, C_s 。(3)将积分常数 C_1, C_2, \dots, C_s 当作变换后的“动量” P_1, P_2, \dots, P_s , 并用 S 作为正则变换的母函数, 变换后的正则变数全是常数。(4)按(35.5c)求出变换公式。既然变换后的正则变数已经解得(全是常数), 按照变换公式回到原来的正则变数就解决了问题。

顺便计算一下哈密顿主函数 S 的时间变化率:

$$\frac{dS}{dt} = \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial S}{\partial q_{\alpha}} \dot{q}_{\alpha} + \frac{\partial S}{\partial t}.$$

以 (35.5c) 和 (35.6c) 代入上式右边, 并考虑到 $K = 0$, 得

$$\frac{dS}{dt} = \sum_{\alpha=1}^s p_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} - H = L.$$

哈密顿主函数 S 的时间变化率恰恰是拉格朗日函数。由此,

$$S = \int L dt. \quad (36.3)$$

上式表明 S 的量纲是“能量 \times 时间”的量纲。积分 $\int L dt$ 正是哈密顿作用量 (33.1)。

应当指出, (36.3) 并不能帮助我们求得哈密顿-雅可俾方程的解 S 。这是因为, 只要我们还不知道各个广义坐标 q_{α} 如何随时间而变的函数关系 $q_{\alpha}(t)$, 则 (36.3) 里的积分 $\int L(q, \dot{q}, t) dt$ 是无从计算的; 如果知道了函数关系 $q_{\alpha}(t)$ ($\alpha = 1, 2, \dots, s$), 那么问题已经彻底解决, 也用不着求解哈密顿-雅可俾方程了。

(2) 哈密顿特征函数

设哈密顿函数 H 不显含时间。在这情况下, 可以把哈密顿-雅可俾方程 (36.2) 中的空间变数 q_1, q_2, \dots, q_s 与时间变数 t 分离。

事实上, 令

$$S(q, P, t) = W(q, P) + f(t), \quad (36.4)$$

并以此代入哈密顿-雅可俾方程 (23.2), 则

$$H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}\right) = -f(t). \quad (36.5)$$

上式左边不显含时间 t , 右边则只取决于时间 t , 两边相等是不可能的, 除非两者实际上等于同一个常数。(其实, 从 $\partial H / \partial t = 0$ 已经知道 H 守恒, 是常数)。把这常数记作 E , (36.5) 分解为两个方程

$$\begin{cases} f(t) = -E, & (36.6) \\ H\left(q_1, q_2, \dots, q_s; \frac{\partial W}{\partial q_1}, \frac{\partial W}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_s}\right) = E. & (36.7) \end{cases}$$

方程(36.6)给出

$$f(t) = -Et. \quad (36.8)$$

方程(36.7)是决定 $W(q, P)$ 的一阶非线性偏微分方程, 通常也把它叫作哈密顿-雅可俾方程, 它的解则叫作哈密顿特征函数. 除了 E 以外, 哈密顿特征函数还有 s 个积分常数, 其中有一个以相加的方式出现. 这样, 把 E 包括在内, 哈密顿特征函数也是有 s 个非相加积分常数 C_1, C_2, \dots, C_s . 我们不妨把 E 算作 C_1 .

把(36.8)和哈密顿特征函数 $W(q, p)$ 代入(36.4)就得到哈密顿主函数. 其实, 并不一定要用(36.4)的哈密顿主函数作为正则变换的母函数, 完全可以直截了当地就用不显含时间的 $W(q, P)$ 作为正则变换的母函数, 其中积分常数 E, C_2, \dots, C_s 作为变换后的“动量”, 则变换后的哈密顿函数

$$K = H + \frac{\partial W}{\partial t} = H = E.$$

这样, 变换后所有的“坐标” Q_s 都是可遗坐标, 这个动力学问题是很容易解的.

归纳起来说, 用哈密顿-雅可俾方程(36.7)解算力学系统动力学问题的步骤如下: (1) 将哈密顿函数 $H(p, q)$ 中的 p_s 分别改写为 $\partial W / \partial q_s$, 按(23.7)写出哈密顿-雅可俾方程. (2) 解出哈密顿特征函数 $W(q_1, q_2, \dots, q_s; E, C_2, \dots, C_s)$, 它含有 s 个非相加的积分常数, 其中第一个是 H 的常数值 E . (3) 用 W 作为正则变换的母函数, 其中积分常数 E, C_2, \dots, C_s 作为变换后的“动量”, 变换后的哈密顿函数 $K = E$, 所有的“坐标” Q_s 都是可遗坐标. (4) 按(35.5c) 求出变换公式. 变换后的正则变数是容易解得的, 按照变换公式回到原来的正则变数就解决了问题.

(3) 例 题

例 1 用哈密顿-雅可俾方程求解谐振子问题

$$H = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} kx^2.$$

解 哈密顿函数 H 不显含时间 t , 我们可运用哈密顿特征函数 W . 按 (36.7),

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} kx^2 = E.$$

由此解得

$$W(x, E) = \sqrt{mk} \int \sqrt{\frac{2E}{k} - x^2} dx, \quad (1)$$

其中含有一个常数 E .

用 W 作为正则变换的母函数, E 作为变换后的“动量” P , 则变换后的哈密顿函数

$$K = E.$$

“坐标” X 为循环坐标, “动量” E 守恒. 对于变换后的正则变数, 依照哈密顿正则方程,

$$\dot{X} = \frac{\partial K}{\partial P} = \frac{\partial K}{\partial E} = 1,$$

由此解得

$$X = t - t_0,$$

其中 t_0 是积分常数. 值得注意的是能量 E 和时间 t 分别成为变换后的“动量”和“坐标”, 可见 E 和 t 是一对共轭变数! 这个共轭关系在量子力学中也保存下来.

为了回到原来的正则变数, 需要利用变换公式. 按 (35.5c),

$$X = \frac{\partial W}{\partial P} = \frac{\partial W}{\partial E} = \sqrt{\frac{m}{k}} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2E}{k} - x^2}} = \sqrt{\frac{m}{k}} \arcsin \left(x \sqrt{\frac{k}{2E}} \right). \quad (2)$$

上式的逆变换是

$$x = \sqrt{\frac{2E}{k}} \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} X \right).$$

因此,谐振子问题的解是

$$x = \sqrt{\frac{2E}{k}} \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t - \sqrt{\frac{k}{m}} t_0 \right).$$

另解 利用(36.4)及(36.8)当然也可以用哈密顿主函数

$$S(x, E, t) = W(x, E) - Et = \sqrt{mk} \int \sqrt{\frac{2E}{k} - x^2} dx - Et \quad (3)$$

作为正则变换的母函数, E 作为变换后的“动量”, 则变换后的哈密顿函数

$$K = H + \frac{\partial S}{\partial t} = E - E = 0.$$

于是,“坐标” X 和“动量” E 都是常数,

$$X = -t_0.$$

为了回到原来的正则变数, 需要利用变换公式. 按(22.5c),

$$\begin{aligned} X = \frac{\partial S}{\partial P} = \frac{\partial S}{\partial E} &= \sqrt{\frac{m}{k}} \int \frac{dx}{\sqrt{2E/k - x^2}} - t \\ &= \sqrt{\frac{m}{k}} \arcsin \left(x \sqrt{\frac{k}{2E}} \right) - t. \end{aligned}$$

上式的逆变换是

$$x = \sqrt{\frac{2E}{k}} \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \sqrt{\frac{k}{m}} X \right).$$

因此,谐振子问题的解是

$$x = \sqrt{\frac{2E}{k}} \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t - \sqrt{\frac{k}{m}} t_0 \right).$$

讨论 在上面两种解法中, 哈密顿特征函数 W 和哈密顿主函数 S 只是分别用积分式(1)和(3)表出, 我们并没有把式中的积分算出来. 这是因为变换公式并不直接用到母函数, 只用到母函数的偏导数.

为了同 § 35 例 5 比较, 这里把哈密顿特征函数 W 的积分式(1)具体算出来.

$$\begin{aligned} W(x, E) &= \sqrt{mk} \int \sqrt{\frac{2E}{k} - x^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{mk} x \sqrt{\frac{2E}{k} - x^2} + E \sqrt{\frac{m}{k}} \arcsin \left(\sqrt{\frac{k}{2E}} x \right). \quad (4) \end{aligned}$$

这式子显得有点复杂, 利用变换公式(2), 容易看出(4)的右边第二项恰好是

EX 即 PX , $W(x, E)$ 是 $U_1(x, P)$ 形式的母函数, 现在改用 $U_1(x, X)$ 形式的母函数, 按 (35.3c) 得到化简的 $U_1(x, X)$,

$$\begin{aligned} U_1(x, X) &= W(x, E) - EX \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{mk} x \sqrt{\frac{2E}{k} - x^2} \end{aligned} \quad (5)$$

既然说的是 $U_1(x, X)$ 形式的母函数, 就还需要利用变换公式(2)把(5)式中的 E 改用 X 表出, 结果是

$$U_1(x, X) = \frac{1}{2} \sqrt{mk} x^2 \operatorname{ctg} \left(\sqrt{\frac{k}{m}} X \right).$$

这正是 § 35 例 5 未作任何说明而给出的母函数, 仅仅是 X 的单位有些不同.

例 2 用哈密顿-雅可俾方程研究平方反比的有心吸引力问题.

解 平方反比有心吸引力(势能为 $-mk^2/\rho$) 问题的哈密顿函数是

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} m (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2) - \frac{mk^2}{\rho} \\ &= \frac{1}{2m} \left(p_\rho^2 + \frac{1}{\rho^2} p_\varphi^2 \right) - \frac{mk^2}{\rho}. \end{aligned}$$

它不显含时间 t , 我们可运用哈密顿特征函数 W . 按(23.7),

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W}{\partial \rho} \right)^2 + \frac{1}{2m\rho^2} \left(\frac{\partial W}{\partial \varphi} \right)^2 - \frac{mk^2}{\rho} = E. \quad (1)$$

试将变数 ρ 和 φ 分离, 令

$$W(\rho, \varphi; P_1, P_2) = W_1(\rho; P_1, P_2) + W_2(\varphi; P_1, P_2), \quad (2)$$

代入(1), 则

$$\left(\frac{dW_2}{d\varphi} \right)^2 = -\rho^2 \left(\frac{dW_1}{d\rho} \right)^2 + 2m^2 k^2 \rho + 2mE\rho^2. \quad (3)$$

(3)的左边是 φ 的函数, 与 ρ 无关; 右边是 ρ 的函数, 与 φ 无关. 两边显然不可能相等, 除非两边实际上等于同一个常数. 把这常数记作 C_1^2 , 于是(3)分解为两个方程

$$\begin{cases} \frac{dW_2}{d\varphi} = C_1, & (4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dW_1}{d\rho} = \sqrt{2mE + \frac{2m^2 k^2}{\rho} - \frac{C_1^2}{\rho^2}}. & (5) \end{cases}$$

于是, 解得哈密顿特征函数

$$W(\rho, \varphi; E, C_1) = C_1 \varphi + \int \sqrt{2mE + \frac{2m^2 k^2}{\rho} - \frac{C_1^2}{\rho^2}} d\rho. \quad (6)$$

用 W 作为正则变换的母函数, E 和 C_1 作为变换后的“动量”, 则变换后的哈密顿函数

$$K = E.$$

“坐标” Q_1 和 Q_2 都是循环坐标, “动量” E 和 C_1 守恒. 对于变换后的正则变数, 依照哈密顿正则方程,

$$\dot{Q}_1 = \frac{\partial K}{\partial E} = 1, \quad \dot{Q}_2 = \frac{\partial K}{\partial C_1} = 0,$$

由此解得

$$Q_1 = t - t_0, \quad Q_2 = \varphi_0 + \frac{1}{2} \pi, \quad (7)$$

其中 t_0 和 φ_0 是积分常数, 这里把 Q_2 的积分常数记作 $\varphi_0 + \frac{\pi}{2}$, 是为了后面把轨道方程写成标准形式.

为了回到原来的正则变数, 需要变换公式. 按 (35.5c) 及 (6) 式,

$$\begin{cases} Q_1 = \frac{\partial W}{\partial P_1} = \frac{\partial W}{\partial E} = \int \frac{m d\rho}{\sqrt{2mE + 2m^2 k^2 / \rho - C_1^2 / \rho^2}}, \\ Q_2 = \frac{\partial W}{\partial P_2} = \frac{\partial W}{\partial C_1} = - \int \frac{C_1 d\rho}{\rho^2 \sqrt{2mE + 2m^2 k^2 / \rho - C_1^2 / \rho^2}} + \varphi_0. \end{cases}$$

以 (7) 代入上述变换公式,

$$t - t_0 = \int \frac{\rho d\rho}{\sqrt{\frac{2E}{m} \rho^2 + 2k^2 \rho - \frac{C_1^2}{m^2}}}, \quad (8)$$

$$\varphi_0 + \frac{1}{2} \pi = - \int \frac{C_1 d\rho}{m\rho \sqrt{\frac{2E}{m} \rho^2 + 2k^2 \rho - \frac{C_1^2}{m^2}}} + \varphi. \quad (9)$$

只要算出 (8) 和 (9) 中的积分, 就得到问题的解.

值得注意的是 (9) 积分后给出轨道

$$\rho = \frac{C_1^2 / k^2 m^2}{1 + \sqrt{1 + E(2C_1^2 / k^4 m^3)} \cos(\varphi - \varphi_0)}. \quad (10)$$

这是哈密顿-雅可俾方法的一个特点, 它总是直接给出轨道.

至于 (8) 的积分, 可参照 § 15 区分 $E < 0$, $E = 0$ 和 $E > 0$ 三种情况分别积出.

哈密顿正则方程是 $2s$ 个一阶常微分方程组，哈密顿-雅可俾方程则是非线性一阶偏微分方程。两者是等价的。从数学的角度来看，一阶常微分方程组总是等价于一阶偏微分方程，这并非哈密顿动力学特有的。

一般地说，求解一阶非线性偏微分方程并不比求解常微分方程组容易，除非这个偏微分方程能分离变数。不过，本书讲述正则变换和哈密顿-雅可俾方程的目的并不在于求解的容易，而在于提供一个较高的立足点，以便读者学习用概括抽象的方式研究动力学问题，这同时也为顺利地由古典力学跳向量子力学作准备。

*§ 37. 作用量变数与角变数

在物理学中，周期性的运动具有特殊的重要性。对于周期运动，运动的详情往往并不重要，重要的仅仅是其频率。本节要讨论这样的系统，它的每个自由度各自作周期运动，或者说，每一对共轭变数各自作周期变化。哈密顿-雅可俾方程很适宜处理这样的问题。

这里所说的周期运动包括两种情况：i) p_α 和 q_α 都是时间的周期函数，且周期相同。系统的相轨道是闭合曲线，如图 7-7。这类周期运动称为**天平动**。ii) q_α 并不作周期变化，但 q_α 的值每增加某个 q_0 ，系统的状态实质上便重现一次。系统的相轨道不是闭合曲线，但 p_α 是 q_α 的周期函数，其周期为 q_0 。这类周期运动称为**转动**。诚然，这种情况中的 q_α 总是某种角度。

拿单摆来说，如能量不够大，则在平衡点左右来回作天平动；如能量足够大，则绕悬挂点转动。

现在用哈密顿特征函数 $W(q_1, q_2, \dots, q_s; E, C_1, \dots, C_r)$ 处理问题。我们只讨论 W 可分离变数为 $\sum_{\alpha=1}^s W_\alpha(q_\alpha; E, C_2, \dots, C_r)$ 的情况。

跟上节不同，这里并不取积分常数 E, C_1, \dots, C_s 作为变换后的“动量”，而是取如下定义的作用量

$$J_\alpha = \oint p_\alpha dq_\alpha = \oint \frac{\partial W_\alpha(q_\alpha; E, \dots, C_s)}{\partial q_\alpha} \alpha q_\alpha$$

$$(\alpha = 1, 2, \dots, s) \quad (37.1)$$

作为变换后的“动量”，积分号上的圆圈表示就一个周期进行积分。显然， J_α 仅仅是积分常数 E, C_1, \dots, C_s 的函数。反过来说，积分常数 E, C_1, \dots, C_s 当然也就可以用 J_1, J_2, \dots, J_s 表出，从而哈密顿特征函数 W 也可以用作用量 $J_\alpha (\alpha = 1, 2, \dots, s)$ 表出，

$$W = \sum_{\alpha=1}^s W_\alpha(q_\alpha; J_1, J_2, \dots, J_s). \quad (37.2)$$

用 W 作为正则变换的母函数， J_α 作为变换后的“动量” $P_\alpha (\alpha = 1, 2, \dots, s)$ 。变换后的“坐标”，亦即作用量 J_α 的共轭变数，叫作角变数，我们把它记作 A_α 。按 (35.5c)，

$$A_\alpha = \frac{\partial W}{\partial J_\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s). \quad (37.3)$$

从量纲上看， W 和 J_α 的量纲都是“能量×时间”的量纲，可见角变数 A_α 必定是无量纲的。

变换后的哈密顿函数

$$K = H + \frac{\partial W}{\partial t} - H = E(J_1, J_2, \dots, J_s). \quad (37.4)$$

于是，变换后的哈密顿正则方程给出

$$\dot{A}_\alpha = \frac{\partial K}{\partial J_\alpha} = \frac{\partial E}{\partial J_\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s),$$

它的解显然是

$$A_\alpha = \left(\frac{\partial E}{\partial J_\alpha} \right) t - A_{\alpha 0}, \quad (37.5)$$

其中 $A_{\alpha 0}$ 是积分常数。

既然 A_α 是无量纲的，(37.5) 中的 $(\partial E / \partial J_\alpha)$ 的量纲必定是

“时间倒数”的量纲,亦即频率的量纲。事实上,可以证明 $\partial E/\partial J_\alpha$ 正是力学系统的坐标 q_α 的周期运动的频率,为此,试计算 q_α 经过天平动或转动的一个周期所导致的 A_α 的增量

$$\begin{aligned} \Delta A_\alpha &= \oint dA_\alpha = \oint \frac{\partial A_\alpha}{\partial q_\alpha} dq_\alpha = \oint \frac{\partial^2 W}{\partial q_\alpha \partial J_\alpha} dq_\alpha \\ &= \frac{\partial}{\partial J_\alpha} \oint \frac{\partial W}{\partial q_\alpha} dq_\alpha = \frac{\partial}{\partial J_\alpha} \oint p_\alpha dq_\alpha = \frac{\partial J_\alpha}{\partial J_\alpha} = 1. \end{aligned} \quad (37.6)$$

这就是说,每经过 q_α 的天平动或转动的一个周期 T_α , 亦即: 每增加一个 T_α , 就导致 A_α 增量为 1。由此看来, (37.5) 的 $(\partial E/\partial J_\alpha)$ 确实应为 T_α 的倒数即频率 f_α ,

$$f_\alpha = \frac{\partial E}{\partial J_\alpha}. \quad (37.7)$$

注意: 虽然每个自由度各自作周期运动, 但它们的频率 f_1, f_2, \dots, f_l 可以不相同, 这些频率之中有些甚至是不可通约的, 即某些频率之比是无理数。设 $f_\alpha:f_\beta$ 为无理数, 则相应的周期之比 $T_\alpha:T_\beta = 1/f_\alpha:1/f_\beta = f_\beta:f_\alpha$ 也是无理数, 这样就不存在时间段 T , 它既是 T_α 的整倍数, 又是 T_β 的整倍数。换句话说, 系统的总的状态不可能每隔一定时间 T 即重现一次, 即并非周期性的。

例 1 求谐振子的频率, 这谐振子的哈密顿函数为

$$H = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} kx^2.$$

解 先计算作用量。因为 $H = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} kx^2 = E$,

从而 $p = \sqrt{mk} \sqrt{2E/k - x^2}$, 所以

$$J = \oint p dx = \sqrt{mk} \oint \sqrt{\frac{2E}{k} - x^2} dx.$$

$\sqrt{2E/k - x^2}$ 应是实的, 由此显见 x 只能在 $\pm \sqrt{2E/k}$ 之间变动, 所以

$$\begin{aligned}
 J &= 2 \sqrt{mk} \int_{-\sqrt{2E/k}}^{+\sqrt{2E/k}} \sqrt{\frac{2E}{k} - x^2} dx \\
 &= \left[\sqrt{mk} x \sqrt{\frac{2E}{k} - x^2} + 2E \sqrt{\frac{m}{k}} \arcsin \left(x \sqrt{\frac{k}{2E}} \right) \right]_{-\sqrt{2E/k}}^{+\sqrt{2E/k}} \\
 &= 2\pi E \sqrt{\frac{m}{k}}. \tag{1}
 \end{aligned}$$

也可写作

$$E = \left(\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \right) J. \tag{2}$$

应用(37.7), 谐振子的频率

$$f = \frac{\partial E}{\partial J} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{3}$$

本例已经解毕. 下面顺便作些补充说明.

量子论把作用量 J 加以量子化, 认为 J 只能是某个最小单位的整倍数, 即

$$J = n h \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \tag{4}$$

其中 $h = 6.62620 \times 10^{-34}$ 焦耳·秒, 叫做普朗克常数. 于是, 由(2)知道, 能量 E 也是量子化的,

$$E = n \frac{h}{2\pi} \omega \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \tag{5}$$

其中 $\omega = \sqrt{k/m}$ 是谐振子的圆频率, 量子力学又把(4)和(5)的 n 修改为 $n + 1/2$.

前面满足于求出频率, 没有具体写出正则变换的母函数. §36 例1的(4)式给出哈密顿特征函数

$$W = \frac{1}{2} \sqrt{mk} x \sqrt{\frac{2E}{k} - x^2} + E \sqrt{\frac{m}{k}} \arcsin \left(x \sqrt{\frac{k}{2E}} \right). \tag{6}$$

但是, 本例不用积分常数 E 作为变换后的“动量”, 而以作用量 J 作为变换后的“动量”, 因此应以(2)代入(6),

$$W(x, J) = \frac{x}{2} \sqrt{mk} \sqrt{\frac{J}{\pi \sqrt{mk}} - x^2} + \frac{1}{2\pi} J \arcsin \left(x \sqrt{\frac{\pi \sqrt{mk}}{J}} \right). \tag{7}$$

这就是正则变换的母函数, 按(22.5c), 变换公式是

$$A = \frac{\partial W}{\partial J} = \frac{1}{2\pi} \arcsin \left(x \sqrt{\frac{\pi \sqrt{mk}}{J}} \right). \quad (8)$$

(7)式的 $W(x, J)$ 是 $U_1(q, P)$ 形式的母函数, 现在改用 $U_1(q, Q)$ 形式的母函数. 按 (35.3c),

$$\begin{aligned} U_1(x, A) &= W(x, J) - JA \\ &= \frac{x}{2} \sqrt{mk} \sqrt{\frac{J}{\pi \sqrt{mk}} - x^2} + JA - JA \\ &= \frac{x}{2} \sqrt{mk} \sqrt{\frac{J}{\pi \sqrt{mk}} - x^2}. \end{aligned}$$

利用变换公式(8)把上式中的 J 改用 A 表出,

$$U_1(x, A) = \frac{1}{2} \sqrt{mk} x^2 \operatorname{ctg}(2\pi A).$$

这正是 § 35 例 5 未作任何说明而给出的母函数.

例 2 求平方反比的有心吸引力作用下的质点作周期运动的频率, 这问题的哈密顿函数是

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_\rho^2 + \frac{1}{\rho^2} p_\varphi^2 \right) - \frac{mk^2}{\rho}.$$

解 本例的哈密顿特征函数 W 由 § 23 例 2 的(6)式给出,

$$W = C_2 \varphi + \int \sqrt{2mE + \frac{2m^2 k^2}{\rho} - \frac{C_2^2}{\rho^2}} d\rho. \quad (1)$$

先计算广义动量 p_φ 和 p_ρ .

$$\begin{cases} p_\varphi = \frac{\partial W}{\partial \varphi} = C_2, \\ p_\rho = \frac{\partial W}{\partial \rho} = \sqrt{2mE + \frac{2m^2 k^2}{\rho} - \frac{C_2^2}{\rho^2}}. \end{cases}$$

接着计算作用量

$$J_\varphi = \oint p_\varphi d\varphi = C_2 \oint d\varphi = 2\pi C_2, \quad (2)$$

$$J_\rho = \oint p_\rho d\rho = \oint \sqrt{2mE + \frac{2m^2 k^2}{\rho} - \frac{C_2^2}{\rho^2}} d\rho. \quad (3)$$

$E = 0$ 和 $E > 0$ 分别对应于抛物线轨道和双曲线轨道, 它们都不是周期运动, 这里不予考虑. 我们只考虑 $E < 0$ 的椭圆轨道. (3)的被积函数必须是

实的,在 $E < 0$ 的情况下,这意味着

$$\rho_1 < \rho < \rho_2, \quad (4)$$

这里 ρ_1 和 ρ_2 是 $2mE\rho^2 + 2m^2k^2\rho - C_2^2 = 0$ 的两个根,

$$\begin{cases} \rho_1 = \frac{mk^2}{2|E|} - \frac{\sqrt{m^2k^4 - 2|E|C_2^2/m}}{2|E|}, \\ \rho_2 = \frac{mk^2}{2|E|} + \frac{\sqrt{m^2k^4 - 2|E|C_2^2/m}}{2|E|}. \end{cases} \quad (5)$$

于是,

$$\begin{aligned} J_\rho &= 2 \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{1}{\rho} \sqrt{2mE\rho^2 + 2m^2k^2\rho - C_2^2} d\rho \\ &= 2 \left[\sqrt{2mE\rho^2 + 2m^2k^2\rho - C_2^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{m^2k^2}{\sqrt{2m|E|}} \arcsin \left(\frac{2|E|\rho - mk^2}{\sqrt{m^2k^4 - 2|E|C_2^2/m}} \right) \right. \\ &\quad \left. - C_2 \arcsin \left(\frac{mk^2\rho - C_2^2/m}{\rho \sqrt{m^2k^4 - 2|E|C_2^2/m}} \right) \right]_{\rho_1}^{\rho_2} \\ &= 2 \left[0 + \frac{m^2k^2}{\sqrt{2m|E|}} \pi - C_2 \pi \right] \\ &= -2\pi C_2 + \pi m k^2 \sqrt{\frac{2m}{|E|}}. \end{aligned} \quad (6)$$

为了应用(37.7)求出频率,需要用 J_φ 和 J_ρ 表出 E . 为此,从(2)和(6)消去 C_2 并稍加整理,

$$E = - \frac{2\pi^2 m^3 k^4}{(J_\rho + J_\varphi)^2}. \quad (7)$$

于是,应用(24.7)求得 ρ 和 φ 的变化频率 f_ρ 和 f_φ ,

$$f_\rho = \frac{\partial E}{\partial J_\rho} = \frac{4\pi^2 m^3 k^4}{(J_\rho + J_\varphi)^3}, \quad f_\varphi = \frac{\partial E}{\partial J_\varphi} = \frac{4\pi^2 m^3 k^4}{(J_\rho + J_\varphi)^3}. \quad (8)$$

如果用能量 E 来表示,则

$$f_\rho = f_\varphi = \frac{1}{\pi k^2} \sqrt{-\frac{2E^3}{m^3}}. \quad (9)$$

频率 f_ρ 和 f_φ 相等,这表明轨道在空间中是稳定不变的.

下面顺便作出补充说明.

量子论把作用量 J_ρ 和 J_φ 加以量子化,认为 J_ρ 和 J_φ 各只能是普朗

克常数 h 的整倍数,即

$$J_\theta = n_\theta h, \quad J_\varphi = n_\varphi h, \quad (n_\theta, n_\varphi = 0, 1, 2, \dots), \quad (10)$$

于是由(7)知道,能量 E 是不连续的,

$$E = -\frac{2\pi^2 m^3 k^4}{n^2} \quad (n = n_r + n_\varphi) \quad (11)$$

不过,在量子论发展为量子力学以后,人们就不再通过作用量进行量子化了,

平方反比有心吸引力问题还可以作为三维空间中的问题处理. 取球坐标 r, θ, φ , 可得

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{1}{r^2} p_\theta^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} p_\varphi^2 \right) - \frac{mk^2}{r}.$$

$$W = C_1 \varphi + \int \sqrt{C_2^2 - C_1^2 / \sin^2 \theta} d\theta + \int \sqrt{2mE + \frac{2m^2 k^2}{r} - \frac{C_1^2}{r^2}} dr.$$

$$J_\varphi = 2\pi C_1,$$

$$J_\theta = 2\pi(C_2 - C_1),$$

$$J_r = -2\pi C_2 + \pi m h^2 \sqrt{\frac{2m}{|E|}}.$$

$$E = -\frac{2\pi^2 m^3 k^4}{(J_r + J_\theta + J_\varphi)^2}$$

$$J_\theta = J_\theta = J_\varphi = \frac{4\pi^2 m^3 k^4}{(J_r + J_\theta + J_\varphi)^2}$$

这里只对 J_θ 一式的导出稍加说明: 在轨道平面上取平面极坐标 r, ϕ . 变换式 $r = r(r, \theta, \varphi)$ 和 $\phi = \phi(r, \theta, \varphi)$ 都不显含时间, 所以 $\sum_a p_a da = 2T$, 因而

$$p_r r + p_\theta \dot{\theta} + p_\varphi \dot{\varphi} = p_r \dot{r} + p_\phi \dot{\phi}, \quad \text{即}$$

$$p_\theta d\theta = p_\phi d\phi - p_\varphi d\varphi.$$

从 W 的表达式易知 $p_\varphi = \frac{\partial W}{\partial \varphi} = C_1$, $p_r = \frac{\partial W}{\partial r} = \sqrt{C_2^2 - \frac{C_1^2}{\sin^2 \theta}}$. 另一方面, 由

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{1}{r^2} p_\theta^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} p_\varphi^2 \right) - \frac{mk^2}{r} \\ &= \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{1}{r^2} p_\theta^2 \right) - \frac{mk^2}{r} \end{aligned}$$

知 $p_\theta^2 = p_\psi^2 - \frac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta}$. 因而通过对比可以指认 $p_\psi = C_2$. 于是

$$\begin{aligned} J_\theta &= \oint p_\theta d\theta = \oint p_\psi d\psi - \oint p_\varphi d\varphi \\ &= C_2 \int_0^{2\pi} d\psi - C_1 \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi(C_2 - C_1). \end{aligned}$$

*§ 38. 浸渐不变量

如果哈密顿函数含有一个随时间变化的参数 λ , 且这个参数随时间的变化非常缓慢,“缓慢”是指在系统运动周期 T 的时间内, λ 的相对变化很小,即

$$T \frac{d\lambda}{dt} \ll \lambda, \quad (38.1)$$

如有某力学量于此条件下不随时间改变,这个力学量就称为**浸渐不变量**.

例如,当单摆摆线极缓慢地伸长或缩短时,其能量 E 与频率 f 的比值 E/f 就是一个浸渐不变量。(读者可以用普通方法自己加以证明).

为简便起见,我们考虑一个自由度的系统,其哈密顿函数为

$$H = H(q, p, \lambda),$$

其中 λ 是一个参数,在这里暂且假定它是一个常数. 于是可以用哈密顿特征函数来处理,仿照 § 37 的(37.2): $W = W(q, J, \lambda)$, 用它作为正则变换的母函数,则在正则变换

$$p = \frac{\partial W}{\partial q}, \quad A = \frac{\partial W}{\partial J}$$

下,变换后的哈密顿函数

$$K = H + \frac{\partial W}{\partial t} = H = E(J, \lambda).$$

现在让参数 λ 随时间 t 变化,选取正则变换的母函数为

$$W = W(q, J, \lambda(t)), \quad (38.2)$$

变换后的哈密顿函数则为

$$\begin{aligned} K(A, J, \lambda(t)) &= H(q, p, \lambda(t)) + \frac{\partial W}{\partial t} \\ &= E(J, \lambda) + \left(\frac{\partial W}{\partial \lambda} \right)_{q, J} \frac{d\lambda}{dt} \\ &= E(J, \lambda) + \Lambda \dot{\lambda}, \end{aligned} \quad (38.3)$$

这里引入了符号

$$\Lambda = \left(\frac{\partial W}{\partial \lambda} \right)_{q, J}. \quad (38.4)$$

哈密顿正则方程现在是

$$J = - \frac{\partial K}{\partial A} = - \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial A} \right)_J \dot{\lambda}, \quad (38.5)$$

$$A = \frac{\partial K}{\partial J} = \frac{\partial E}{\partial J} + \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial J} \right)_A \dot{\lambda}, \quad (38.6)$$

上式 Λ 中的 q 应理解为 J 、 A 和 λ 的函数。

以 $J(0)$ 表示 $t = 0$ 时的 J 值, $J(T)$ 表示 $t = T$ 时的 J 值, 则

$$J(T) - J(0) = - \int_0^T \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial A} \right)_J \dot{\lambda} dt. \quad (38.7)$$

由于变化缓慢, $\dot{\lambda} \ll \lambda/T$, 在整个积分区间内 λ 和 $\dot{\lambda}$ 都可视为常数。因而 $\dot{\lambda}$ 可提到积分号外, 而 λ 不变意味着该系统在 $0-T$ 这段时间内可视为周期系统, 因而 Λ 作为系统状态的单值函数一定是角变数 A 的周期函数, 其周期为 1 。另外, 我们有(38.6), 由于 $\dot{\lambda}/\lambda \ll 1/T$, 所以(38.6)右边第二项可略去不计, 即 Λ 是时间 t 的周期函数, 其周期 $T = 1 / \left(\frac{\partial E(J, \lambda)}{\partial J} \right)$, 因而(38.7)的对 t 的积分等于零。这就证明了量 J 是浸渐不变量。

对于多自由度的系统同样可以证明作用量 J_a 是浸渐不变量。

例如, 单摆的 $J = E/f$, 立即可证 E/f 是浸渐不变量。

“浸渐”译自 *adiabatic*, 这里强调的是(38.1)所表明缓慢性。这同一个词在热学中则译为“绝热”。热学中的绝热过程, 其变化相对于系统趋于平衡态的弛豫过程是缓慢的, 以致可以认为系统时时处于平衡态, 但另一方面, 其变化相对于热传导又是迅速的, 以致可以认为热量来不及进出系统。在热学中使用“绝热”一词往往强调其迅速的一面, 其实它还有缓慢的一面。

*§ 39. 正则微扰理论

在力学中, 有许许多多的问题是无法精确求解的。但是经常遇见这样的情况, 这些无法精确求解的问题与能够严格求解的问题之间, 仅有微小的差别, 因而可在后者严格解的基础上近似求解前者, 这就是微扰理论。建立在正则变换基础上的正则微扰理论就是微扰理论的一种。

考虑一个系统, 它的哈密顿函数是由一个主要函数 H_0 和另一个微扰函数 $\epsilon H'$ 叠加而成, 即

$$H = H_0 + \epsilon H', \quad (39.1)$$

其中 ϵ 是一个小参数。

如果忽略微扰, 即认为 $\epsilon = 0$, 则系统成为无微扰的“理想系统”, 即

$$q_\alpha = \frac{\partial H_0}{\partial p_\alpha}, \quad p_\alpha = -\frac{\partial H_0}{\partial q_\alpha}, \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s) \quad (39.2)$$

假定“理想系统”可按哈密顿-雅可俾方程求解, 亦即

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H_0\left(q_1, \dots, q_s; \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_s}; t\right) = 0$$

有一个全积分 $S(q_1, \dots, q_s; \alpha_1, \dots, \alpha_s; t)$ 。按哈密顿-雅可俾方法, “理想系统”可由下式解出:

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_\alpha} = \beta_\alpha, \quad \frac{\partial S}{\partial q_\alpha} = p_\alpha, \quad (39.3)$$

其中 $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_s$ 是不变的积分常数。

现在反过来考虑有微扰的系统(39.1)。由于系统不同,(39.3)式不再提供系统的解。但我们可以把理想系统的哈密顿主函数 $S(q, \alpha, t)$ 作为正则变换的母函数,变换关系式仍为(39.3):

$$\hat{p}_\alpha = \frac{\partial S}{\partial \alpha_\alpha}, \quad p_\alpha = \frac{\partial S}{\partial q_\alpha},$$

其中 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 对应于以前的记号 P_1, P_2, \dots, P_r ; β_1, \dots, β_s 对应于以前的记号 Q_1, \dots, Q_s 。它们是新的正则变量。显然,当 $\epsilon = 0$ (无微扰)时,这些新正则变量都是常数。现在 $\epsilon \neq 0$, 所以, $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_s$ 不再是常数。但它们仍是正则变量,系统的哈密顿函数现在是

$$K = H_0 + \epsilon H' + \frac{\partial W}{\partial t} = \epsilon H',$$

其中已经运用了理想系统的哈密顿-雅可俾方程: $\frac{\partial W}{\partial t} + H_0 = 0$ 。

从而新的正则变量所满足的正则方程为:

$$\dot{\alpha}_\alpha = - \frac{\partial(\epsilon H')}{\partial \beta_\alpha}, \quad \dot{\beta}_\alpha = \frac{\partial(\epsilon H')}{\partial \alpha_\alpha}. \quad (39.4)$$

方程(39.4)说明,“被微扰的常数” $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_s$ 不再是不变的,它们的变化满足以微扰函数 $\epsilon H'$ 为哈密顿函数的正则方程。这个方程一般称为**微扰方程**。由于微扰方程(39.4)的右边含有小参数 ϵ , 因此“被微扰的常数”虽然不是常数,但变化速率是很小的。如果研究的时间范围不是很长,其变化量也是不大的。对于这种含有小参数的方程,可以运用级数展开的方法求得近似解。

例 考虑一个非线性振动,假设势能为

$$V = \frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{4} bx^4 \quad (1)$$

则其哈密顿函数可写为

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{4} bx^4 = H_0 + \frac{1}{4} bx^4, \quad (2)$$

其中

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} kx^2, \quad (3)$$

与 H_0 对应的哈密顿-雅可俾方程是

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} kx^2 = 0, \quad (4)$$

由此得出哈密顿主函数是

$$S = -\alpha t + \sqrt{2m} \int \sqrt{\alpha - \frac{1}{2} kx^2} dx, \quad (5)$$

将 S 作为母函数, 相应的正则变换是

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial S}{\partial x} = \sqrt{2m} \cdot \sqrt{\alpha - \frac{1}{2} kx^2}, \\ \beta &= \frac{\partial S}{\partial \alpha} = -t + \frac{1}{\omega_0} \sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{2\alpha/k}}, \end{aligned} \quad (6)$$

其中 $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. 反解出 x 和 p ,

$$x = \sqrt{\frac{2\alpha}{k}} \sin \omega_0(t + \beta), \quad (7)$$

$$p = \sqrt{2m\alpha} \cos \omega_0(t + \beta). \quad (8)$$

当 α 和 β 等于常数(由运动初始条件确定), 上式就是问题的零阶近似解(无微扰解). 现在, 由于微扰项的存在, α 和 β 不再是常数, 它们必须满足微扰方程

$$\dot{\beta} = \frac{\partial(\epsilon H')}{\partial \alpha}, \quad \dot{\alpha} = -\frac{\partial(\epsilon H')}{\partial \beta}, \quad (9)$$

其中

$$\begin{aligned} \epsilon H' &= \frac{1}{4} bx^4 = \frac{\alpha^2 b}{k^2} \sin^4 \omega_0(t + \beta) \\ &= \frac{\alpha^2 b}{8k^2} [3 - 4 \cos 2\omega_0(t + \beta) + \cos 4\omega_0(t + \beta)]. \end{aligned} \quad (10)$$

将此 $\epsilon H'$ 代入微扰方程(9), 得

$$\begin{aligned}\dot{\beta} &= \frac{\alpha b}{4k^2} [3 - 4 \cos 2\omega_0(t + \beta) + \cos 4\omega_0(t + \beta)], \\ \dot{\alpha} &= -\frac{\alpha^2 b \omega_0}{2k^2} [2 \sin 2\omega_0(t + \beta) - \sin 4\omega_0(t + \beta)].\end{aligned}\quad (11)$$

当振幅很小时, α 很小, 保留 α 项而忽略 α^2 的项, 即可得

$$\alpha_1 = \alpha_0 \text{ (常数)}, \quad (12)$$

$$\beta_1 = \frac{\alpha_0 b}{4k^2} \int [3 - 4 \cos 2\omega_0(t + \beta_0) + \cos 4\omega_0(t + \beta_0)] dt.$$

为方便起见, 假定 $t = 0$ 时 $x = 0$, 这相当于要求 $t = 0$ 时 $\beta = 0$, 于是积分结果为

$$\beta_1 = \frac{\alpha_0 b}{4k^2} \left[3t - \frac{2}{\omega_0} \sin 2\omega_0(t + \beta_0) + \frac{1}{4\omega_0} \sin 4\omega_0(t + \beta_0) \right].$$

在长时间中, 只有第一项起主要作用, 于是

$$\beta_1 = \frac{3}{4} \frac{\alpha_0 b}{k^2} t. \quad (13)$$

将其代入(7)式得

$$\begin{aligned}x &= \sqrt{\frac{2\alpha_0}{k}} \sin \omega_0 \left(t + \frac{3}{4} \frac{\alpha_0 b}{k^2} t \right) \\ &= \sqrt{\frac{2\alpha_0}{k}} \sin \omega_1 \left(1 + \frac{3}{4} \frac{\alpha_0}{k^2} b \right) t.\end{aligned}\quad (14)$$

这个结果说明, 在一级近似下, 该非线性振动的频率应修正为

$$\omega_1 = \omega_0 \left(1 + \frac{3}{4} \frac{\alpha_0}{k^2} b \right).$$

考虑到振幅 $A = \sqrt{\frac{2\alpha}{k}} \approx \sqrt{\frac{2\alpha_0}{k}}$, 上式又可写为

$$\omega_1 = \omega_0 \left(1 + \frac{3}{8} \frac{b}{k} A^2 \right) \quad (15)$$

*§ 40. 从“几何力学”到波动力学

这里限于研究哈密顿函数是运动积分并且也就是总能量的情况。为简明起见, 只讨论单个质点, 虽然对任一力学系统都可类似地进行讨论。

哈密顿主函数 $S(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ 与哈密顿特征函数 $W(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ 之间的关系根据(36.4)是

$$S(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = W(\mathbf{r}, \mathbf{p}) - Et. \quad (40.1)$$

试考察曲面族“ $S = \text{常数}$ ”与“ $W = \text{常数}$ ”。由上式可见, 曲面族“ $W = \text{常数}$ ”的每一个成员都是空间中的静止曲面, 而曲面族“ $S = \text{常数}$ ”的每个成员则是随时间而变化的曲面。在某一时刻 t , 曲面族“ $S = \text{常数}$ ”的某一成员“ $S = S_0$ ”(S_0 是任意给定的常数)重合于曲面族“ $W = \text{常数}$ ”中的一个成员 $W = S_0 + Et$; 到下一时刻, “ $S = S_0$ ”则重合于“ $W = \text{常数}$ ”中的另一成员。这样, 曲面“ $S = S_0$ ”可以看作在空间中传播着的某种“波面”。

曲面族“ $W = \text{常数}$ ”的各个成员的形状当然不一定相同, 因此波面“ $S = S_0$ ”一般在传播过程中还不停地变形。这也就是说, 波面上各点的传播速度各不相同。现在计算波面 $S = S_0$ 上各点的传播速度 u , 或者较确切地说, 相速 u 。

取各项的微分:

$$dS = \nabla W d\mathbf{r} - E dt = 0. \quad (40.2)$$

波沿波面法向传播, 即 $d\mathbf{r} \parallel \nabla W$, 故 $\nabla W \cdot d\mathbf{r}$ 成为 $|\nabla W| dr$, 即

$$u = dr/dt = E/|\nabla W|. \quad (40.3)$$

由哈密顿-雅可俾方程(36.7)

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)^2 \right] + V = E \quad (40.4)$$

求得为 $|\nabla W| = \sqrt{2m(E - V)}$ 。把这些代入(40.3)即得

$$u = \frac{E}{|\nabla W|} = \frac{E}{\sqrt{2m(E - V)}} = \frac{E}{\sqrt{2mT}} = \frac{E}{mv} = \frac{E}{p}. \quad (40.5)$$

从变换公式(35.5c)也可求出 ∇W :

$$\frac{\partial W}{\partial x} = p_x, \quad \frac{\partial W}{\partial y} = p_y, \quad \frac{\partial W}{\partial z} = p_z,$$

即 $\nabla W = \mathbf{p}$, 质点的动量总是沿着波面的法线。波面的正交曲线

族就是“波射线”族。既然“波射线”的方向与质点动量的方向相同，可见每一根波射线都是质点可能的轨道。

归纳起来说，跟曲面族“ $W = \text{常数}$ ”正交的曲线族是质点的一组可能的轨道。当质点沿着某一轨道运动时，波面“ $S = \text{常数}$ ”也在空间中传播，但两者并非协同一致的。事实上，如(40.5)所表明，两者的速度 u 和 v 成反比。在质点以较大的速度 v 经过的地方，波面反而以较小的相速 u 传播。

这“波”究竟是怎么回事呢？

(1) 从波动光学到几何光学

光是波动。波动光学中的标量波动方程为

$$\nabla^2 \varphi - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad (40.6)$$

在均匀介质中，折射率 n 是常数，方程(40.6)可以有平面波、球面波、柱面波等各种形式的解。为了同力学对照，现在着重研究 n 并非常数但在空间中平缓变化的情况，并尝试寻找接近于平面波的解

$$\varphi = e^{d(\mathbf{r})} e^{i(\omega/c)(L(\mathbf{r}) - ct)}, \quad (40.7)$$

其中 $e^{d(\mathbf{r})}$ 是振幅， $L(\mathbf{r})$ 则是所谓“光程”的长，它们都是实数。 L 也表征着波动中的周相。由(40.7)不难算出

$$\begin{aligned} \nabla \varphi &= \varphi \nabla \left(A + i \frac{\omega}{c} L \right), \\ \nabla^2 \varphi &= \varphi \left\{ \nabla^2 \left(A + i \frac{\omega}{c} L \right) + \left[\nabla \left(A + i \frac{\omega}{c} L \right) \right]^2 \right\} \\ &= \varphi \left[\nabla^2 A + i \frac{\omega}{c} \nabla^2 L + (\nabla A)^2 - \frac{\omega^2}{c^2} (\nabla L)^2 \right. \\ &\quad \left. + 2i \frac{\omega}{c} \nabla A \cdot \nabla L \right]. \end{aligned}$$

把这些代入(40.6)，

$$\left[\nabla^2 A + (\nabla A)^2 - \frac{\omega^2}{c^2} (\nabla L)^2 + n^2 \frac{\omega^2}{c^2} \right] \varphi$$

$$+ i \frac{\omega}{c} [2\nabla A \cdot \nabla L + \nabla^2 L] \varphi = 0.$$

复数为零意味虚实两部分各自为零,因此,

$$\nabla^2 A + (\nabla A)^2 + \frac{\omega^2}{c^2} [n^2 - (\nabla L)^2] = 0, \quad (40.8)$$

$$\nabla^2 L + 2\nabla A \cdot \nabla L = 0. \quad (40.9)$$

(40.8)和(40.9)是严格的. 考虑到折射率 n 在空间中平缓变化(确切地说,在波长数量级的距离内 n 变化很少),并且 $A(\mathbf{r})$ 显然也是平缓变化,因而可把(40.8)近似写为

$$(\nabla L)^2 = n^2, \quad (40.10)$$

(40.10)是几何光学的基本方程. 曲面族 " $L = \text{常数}$ "即等周相面,亦即波面. 波面的推进情况由它的正交曲线族描写. 这正交曲线族就是几何光学中的“光线”.

光线的方向数应为 $\partial L/\partial x, \partial L/\partial y, \partial L/\partial z$, 亦即 ∇L , 在几何光学中不妨把光线看作某种“微粒”的轨迹,这种“微粒”的动量正比于 ∇L . 按照(40.10),这种“微粒”的速度 v 正比于折射率 n ,亦即反比于光波的相速 u . 这样,在几何光学中,微粒图像与波动图像同样适用于描写光的传播. 在光学史上,波动说与微粒说曾经长期相持不下,其原因也在于此. 不过,请注意波动图像的光速 u 与微粒图像的光速 v 互成反比.

(2) 从“几何力学”到波动力学

在形式上,哈密顿-雅可俾方程(40.4)与几何光学基本方程(40.10)完全相似, u 与 v 成反比的情况也一样. 此外,§34还指出雅可俾最小作用量原理(34.10)与几何光学的费马原理(34.11)形式上完全一样.

大家知道,光是波动,几何光学是波动光学的短波长极限情

况。那么,经典力学或许是某种“几何力学”,它只是波动力学的短波长极限。让我们认真研究一下这个想法。

现在把哈密顿-雅可俾方程(40.4)看作是某种“几何力学”基本方程(40.10)。在作这种类比的时候,并不一定要求 W 就是 L ,只要它们的比值是某个常数就够了。既然 W 与 L 之比为常数,则 $S = W - Et$ 与波动的周相 $(L - ct)\omega/c$ 之比也等于某一个常数。把这个常数记作 $h/2\pi$,则

$$W - Et = \frac{h}{2\pi} \frac{\omega}{c} (L - ct).$$

比较两边 t 的系数,得到波动的圆频率与质点的能量成正比,

$$E = \frac{h}{2\pi} \omega. \quad (40.11)$$

由此又可计算波动的波长 λ ,

$$\lambda = \frac{u}{f} = \frac{2\pi u}{\omega} = \frac{uh}{E}.$$

以(40.5)代入,即得

$$\lambda = \frac{h}{p}. \quad (40.12)$$

就像几何光学基本方程(40.10)是波动光学的波动方程(40.6)的近似那样,不妨设想哈密顿-雅可俾方程(40.4)是下列波动方程的近似:

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0. \quad (40.13)$$

把空间坐标 \mathbf{r} 与时间变数 t 分离开来,令

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r}) e^{-i\omega t},$$

代入(40.13),即得 $\psi(\mathbf{r})$ 的方程

$$\nabla^2 \psi + \frac{\omega^2}{u^2} \psi = 0.$$

由于 $\omega^2/u^2 = (2\pi/\lambda)^2 = 4\pi^2 p^2/h^2 = 8\pi^2 m(E - V)/h^2$,上式亦即

$$-\frac{\hbar^2}{8\pi^2m} \nabla^2\psi + V\psi = E\psi, \quad (40.14)$$

事实上,(40.11)和(40.12)正是量子力学的基本假定,(40.14)正是量子力学中的定态薛定谔方程。但量子力学中的波动方程(含时间的薛定谔方程)并不是(40.13)那种双曲型偏微分方程,而是带有虚系数的抛物型偏微分方程:

$$-\frac{\hbar^2}{8\pi^2m} \nabla^2\psi + V\psi = i\frac{\hbar}{2\pi} \frac{\partial\psi}{\partial t}. \quad (40.15)$$

哈密顿在 1834 年已经注意到(40.4)与(40.10)的相似,但是他不能再前进一步。问题在于设想不能是腾空的,必须脚踏实地,也就是说,设想不能脱离实践的基础。在他那个时代还没有任何实验能够证明这种设想是有根据的。事实上,(40.11)中的比例常数 \hbar 可能等于零。如果是那样的话,就谈不上什么波动了。只有实验表明 \hbar 是非零的普朗克常数之后,才可能认真地看待上面的想法。因此,到 1926 年,由于原子物理学的大量实验事实揭示了古典力学的局限性,德布洛意又重新提出物质波的概念,薛定谔接着又提出量子力学的波动方程,就逐渐发展成为今日的量子力学。

连续介质力学

以上各章节研究的是质点、刚体、由质点和刚体所组成的系统的运动。质点和刚体都是实际物体的抽象模型，如问题不涉及转动，或物体的大小远小于问题中所涉及的距离，就可以把实际的物体抽象为质点。问题如涉及转动，就不能不考虑物体的大小和形状，既然考虑到物体的大小和形状，那就还有大小和形状的变化问题。如果物体大小和形状的改变微小到可以忽略不计，并且我们也不深究物体的大小和形状改变时其内部发生的相互作用力，仅仅研究物体的整体运动，那就完全可以忽略物体的大小和形状的改变，把实际的物体抽象为刚体。但如果物体的大小和形状的改变不能忽略，我们就必须把它作为**变形体**处理。

变形体一般可以分为两类：一类具有保持一定大小和形状的趋势，在力的作用下发生形变，外力撤消后又恢复原状，这叫作**弹性体**；另一类则完全没有一定的形状，这叫作**流体**。当然，这种区分是有条件的，有些物体，由于受力情况的不同，在某些问题中应看成弹性体，但在另一些问题中则应看作是流体。

我们都熟悉关于固体、液体和气体的分类。一般地说，固体是弹性体，液体和气体是流体。固体通常是一种结晶体，其中分子、原子或离子有规则地排列成所谓结晶格子。至于像玻璃和柏油等非晶体严格说来并不是固体，结晶体的温度上升到熔点就发生相变，转变到液态；至于玻璃和柏油却没有明确的熔点，而是随着温度的上升逐渐从凝固的状态转变为流动性的状态。

结晶体既然是由分子、原子或离子所形成的结晶格子，它在各个方向的性质理所当然地有所不同，这叫作**各向异性**。不过，通常的固体往往并不是单晶体（整个一块晶体），而是多晶体（许多小晶

体杂乱无章地组合在一起),其平均效果并不显示各向异性,而是显示**各向同性**。熔化的材料在冷却时逐渐凝固亦即重新结晶。如果开始结晶时有一粒“种子”——籽晶,则结晶就围绕着籽晶进行,使籽晶缓慢上升,晶体就在下端“生长”而形成单晶。通常把这个过程叫作拉单晶。

其实,即使各向同性的弹性体发生变形时,电学和光学的性质也常常变为各向异性的。根据这个特性,让偏振光通过变形的透明弹性体,可以观察到弹性体中的形变情况和作用力分布情况。这种研究方法叫作光测弹性力学。

在本书涉及的范围内,只限于研究各向同性的弹性体。这一点请在阅读时注意。

在刚体力学中,我们曾设想把刚体划分为许许多多极小的部分,每一个小部分都可以看作是一个质点,刚体就由这许许多多质点组成,其中任意两质点之间的距离保持不变。按照这一观点导出了刚体的质心运动定理、角动量定理和动能定理。质心运动定理和角动量定理可说是刚体的基本运动定律,动能定理则是一个有力的辅助方程。可是,刚体只有六个自由度,即三个整体平移自由度和三个整体转动自由度,所以在具体问题中也就只是求解整体的平动和整体的转动,不再关心它究竟怎样划分为许许多多极小的部分。变形体的情况与此不同,我们不仅要研究它的整体平移和转动,更重要的是要研究它各部分的相对运动,这就是说,应当始终把它划分为许许多多极小的部分来研究。那么,究竟应当怎样对变形体进行划分呢?

把物体划分为许许多多极小的部分,并把每个小部分看作一个质点,这样,物体就成为大量质点的系统,这些质点的数量虽大,但却是有限的,每个部分虽小也还是有限的。要使每个小部分精确地成为质点,必须使每个小部分尽可能地小。从极限来说,每个小部分应逼近于零。在这个极限下,物体由无限多个无限小的部分组成,或者说,整个物体可看作一个连续体。

可是,从微观方面来说,物体具有不连续结构。因为物体总是由分子、原子组成,而分子、原子之间存在很大空隙。(如将物质压得很密实,原子之间的空隙很小,物质的密度可以达到每立方厘米几十公斤乃至几千吨,例如天体中的白矮星内就存在这样密实的物质。)不过,本书只研究物体的宏观行为,对它作唯象的描述,所以我们可以忽视物体的微观结构,而把它看成没有微观结构的连续体。在这种意义上,我们把变形体称为**连续介质**。在具体的数学处理中,也还是要把物体划分为许许多多小部分,并令这些小部分逼近于零。但这里并非数学意义上的无限小,而是宏观地小到可以把物体作为连续体处理,同时却又是微观地大到可以忽略物体的微观结构。宏观地很小而又微观地很大,这是实际可能的,因为即使是气体,在标准状态下的 10^{-9} 厘米³中竟有 10^{10} 个分子, 10^{-1} 厘米³在宏观上是何等地小, 10^{10} 个分子在微观上又是何等地大!

第十章 弹性体

§ 41. 张变(或长变)

(1) 胡克定律 杨氏模量

初等物理学有一条胡克定律: 如果外力不超过某一限度, 弹性棒的伸长或缩短与它所受的外力成正比。

必须指出, 这里所说的“伸长”或“缩短”是指棒达到平衡时的伸长或缩短。如果不限定于棒达到平衡的时刻, 那就不管弹性棒当时的伸长或缩短如何, 总可以把任意大小的外力施加于弹性棒, 即非平衡的伸长或缩短与外力并无确定的关系可言。

那么, “达到平衡”又是怎么回事呢? 原来, 弹性棒伸长或缩短时有一种复原趋势, 具体地说, 在弹性棒任一横截面的两方之间出现拉力(如果棒是伸长的)或压力(如果棒是缩短的)。当横截面两方的拉力或压力等于外加的拉力或压力时, 弹性棒就达到了平衡。

弹性棒横截面两方的相互作用力 F_x 。既然是由棒的伸长或缩短 l 引起的, F_x 与 l 之间自然存在一种确定的关系, 而且这里并不涉及弹性棒是否达到平衡的问题。这样, 胡克定律所谈到的, 与其说是外力, 倒不如说是横截面两方的相互作用力。因此, 我们将胡克定律重新叙述为: 弹性棒伸长或缩短时, 任一横截面两方的相互作用力 F_x 正比于棒的伸长或缩短 l ,

$$F_x = kl, \quad (41.1)$$

比例常数 k 叫做这根弹性棒的劲度系数。

像(41.1)这样的表达方式也还不够理想。几根弹性棒, 即使用同一种材料做成, 劲度系数 k 却可以各不一样, 粗棒劲度系数大, 长棒劲度系数小。考虑到这一情况, 我们不用每一横截面两方

的相互作用力 F_n ，改用每单位横截面积两方的相互作用力 F_n/S (S 是横截面积)，这叫作**张胁强**(或**张应力**)，记作 p 。同样，我们不用棒的伸长或缩短 l ，改用相对伸长或缩短，即每单位长棒的伸长或缩短 l/L (L 是棒的长度)，这叫作**张胁变**(或**张应变**)，记作 e 。我们还约定正的胁变指伸长，负的胁变指缩短，与此相应，正的胁强指拉力，负的胁强指压力。这样就可以避免涉及棒的具体尺寸而把**胡克定律**叙述为：如果张胁强不超过某一限度（叫作该种材料的比例限度），弹性棒的张胁强正比于张胁变，

$$p = Ye, \quad \text{即} \quad \frac{F_n}{S} = Y \frac{l}{L}. \quad (41.2)$$

比例常数 Y 仅仅取决于棒的材料，而跟棒的具体尺寸无关。 Y 叫作该种材料的**杨氏模量**，它的量纲同于胁强的量纲，

$$[Y] = \frac{[F]}{[S]} = ML^{-1}T^{-2}.$$

拿(41.2)与(41.1)比较，可将劲度系数 k 用杨氏模量 Y 表出：

$$k = Y \frac{S}{L}. \quad (41.3)$$

以上的讨论其实隐隐地假定了棒的伸长或缩短是均匀的。在一般情况下，伸长与缩短未必是均匀的，弹性体的形状也未必是棒形的，那就应该将棒划分为许许多多小部分，把每一小部分当作是均匀伸长或缩短的棒，分别考察其张胁变与张胁强，才能应用胡克定律(41.2)。

这里还要谈一谈张变弹性势能密度。读者熟知，均匀伸长或缩短的弹性棒的弹性势能

$$V = \frac{1}{2} k l^2.$$

利用(41.3)把劲度系数 k 用杨氏模量 Y 表出，又把 l 用张胁变 e 表出，于是，弹性棒的弹性势能

$$V = \frac{1}{2} Y \frac{S}{L} (Le)^2 = \frac{1}{2} Y e^2 (SL)$$

正比于弹性棒的体积 SL 。这就提示我们，弹性势能分布于整个体

积中。每单位体积的张变弹性势能，亦即**张变弹性势能密度**

$$U = \frac{1}{2} Y e^2. \quad (41.4)$$

运用(41.2)还可以把上式改写为

$$U = \frac{1}{2} p e \text{ 或 } U = \frac{1}{2} \frac{1}{Y} p^2. \quad (41.4')$$

如果弹性棒的伸长或缩短不是均匀的，或者弹性体的形状根本不是棒形的，只要把它划分为许许多多极小的棒，分别研究其张变，把各个小棒都当作均匀伸长或缩短的棒，也可导出(41.4)。再令每个小部分无限逼近于零，就可得出结论：任意弹性体内各个点上的张变弹性势能密度都由(41.4)给出。

(2) 泊松比 一般情况下的胡克定律

弹性棒伸长或缩短时，它的横截面积也发生变化，就是说，横向尺寸也有变化。把棒的长度方向取作 x 轴方向，沿这方向的张胁强记作 p_{11} ，张胁变记作 e_{11} ，横向即 y 轴方向和 z 轴方向相应地出现张胁变 e_{22} 和 e_{33} 。对于各向同性的材料，实验资料指出 $e_{22} = e_{33}$ ，且它们都正比于 e_{11} ，比值

$$\frac{-e_{22}}{e_{11}} = \frac{-e_{33}}{e_{11}} = \sigma \quad (41.5)$$

叫作**泊松比**。(41.5)中的负号是为了表明横向张胁变 e_{22} 和 e_{33} 的符号与纵向张胁变 e_{11} 的符号相反。

材 料	杨氏模量 Y (10^{10} 牛顿/米 ²)	弹性限度 (10^7 牛顿/米 ²)	泊松比 σ	切变模量 μ (10^{10} 牛顿/米 ²)
铸 铁	12		0.27	3
弹簧用钢	22	33	0.27	8
紫 铜	11	3	0.35	4.7
铅	1.7	0.25	0.4	0.6
橡 皮	0.5		0.5	
橡 皮 (与纤维平行)	1			

鉴于横向伸缩的存在，必须指出，(41.2)并不适用于一般情况。综合(41.2)和(41.5)可以写出一般情况下的胡克定律

$$\begin{cases} e_{11} = +\frac{1}{Y} p_{11} - \frac{\sigma}{Y} p_{22} - \frac{\sigma}{Y} p_{33}, \\ e_{22} = -\frac{\sigma}{Y} p_{11} + \frac{1}{Y} p_{22} - \frac{\sigma}{Y} p_{33}, \\ e_{33} = -\frac{\sigma}{Y} p_{11} - \frac{\sigma}{Y} p_{22} + \frac{1}{Y} p_{33}. \end{cases} \quad (41.6)$$

上式是用张胁强表出張胁变。我们可以把它翻转过来，就是把它当作张胁强的代数方程组来求解，其结果是用张胁变表出張胁强：

$$\begin{cases} p_{11} = \lambda \Theta + 2\mu e_{11}, \\ p_{22} = \lambda \Theta + 2\mu e_{22}, \\ p_{33} = \lambda \Theta + 2\mu e_{33}, \end{cases} \quad (41.7)$$

式中

$$\Theta = e_{11} + e_{22} + e_{33}, \quad (41.8)$$

而

$$\lambda = \frac{\sigma Y}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)} \quad \text{和} \quad \mu = \frac{Y}{2(1 + \sigma)} \quad (41.9)$$

则叫作拉密模量。

一般情况下的胡克定律(41.6)或它的翻转(41.7)并非只适用于均匀伸缩的弹性棒。它们在任意的弹性体内各个点上都成立。

(3) 体积的改变 容积弹性模量

先推导一个关于体积改变的一般关系式。设想在弹性体中划出一个小的长方体，其三边之长分别为 L, M, N 。于是，体积

$$V = LMN,$$

而体积的改变

$$\Delta V \approx dV = MNdL + NLdM + LMdN.$$

这样，体积改变的百分率即所谓体胀系数为

$$\begin{aligned}\frac{\Delta V}{V} &\approx \frac{dV}{V} = \frac{dL}{L} + \frac{dM}{M} + \frac{dN}{N} \\ &= e_{11} + e_{22} + e_{33} = \theta.\end{aligned}\quad (41.10)$$

这是一般的关系式①。

把(41.6)代入(41.10),体胀系数就可改用张胁强表出,

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{dV}{V} = \frac{1-2\sigma}{Y} (p_{11} + p_{22} + p_{33}).\quad (41.11)$$

这仍然是一般的关系式。

考虑特例,弹性体从四面八方受到均匀压强,则上式给出

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{dV}{V} = \frac{3(1-2\sigma)}{Y} p.$$

通常将均匀压强 p 与体积改变的百分率 $\Delta V/V$ 之比称为**容积弹性模量** K 。根据上式不难用杨氏模量 Y 与泊松比 σ 表出容积弹性模量 K ,

$$K = \frac{Y}{3(1-2\sigma)}.\quad (41.12)$$

容积弹性模量的倒数称为**压缩率**,

$$\frac{1}{K} = \frac{3(1-2\sigma)}{Y}.\quad (41.13)$$

从(41.12)和(41.13)可以看出,泊松比 σ 不能超过 $1/2$,

$$\sigma \leq \frac{1}{2},\quad (41.14)$$

否则就要出现 $K < 0$, 这种弹性体将是不稳定的,它在压力作用下体积反而胀大!

(4) 弹性限度 极限强度

胁强必须不超过某个限度,胡克定律才成立。这个限度叫作

① (41.10)的一个较简便推导方法如下: $V = LMN$, 取对数得 $\ln V = \ln L + \ln M + \ln N$, 它的微分式正是 $dV/V = dL/L + dM/M + dN/N$ 。

比例限度。

实验资料表明,如胁强超过比例限度不多,则胁强与胁变不再成正比,但物体仍保持为弹性的,这就是说,外力撤除后物体仍可复原。如胁强超过比例限度较多以致超过了较高的另一限度,则物体不再是弹性的。这个限度叫做**弹性限度**。

实验资料又表明,如胁强超过弹性限度,物体不再是弹性的,就是说,外力撤除后,胁变并不完全消失。这种未消失的形变叫作**塑性形变**。拉伸、辗压,锻打,这些都使材料发生塑性形变,以便取得我们所希望的形状。矛与盾的斗争,或者说,炮弹与铁甲的斗争,归根到底取决于哪一方的弹性限度比较高,弹性限度高的一方取胜。工程建筑必须留有余地,在正常情况下的胁强不允许接近弹性限度,以免偶然的过大的胁强作用造成剩余形变。

金属材料,在发生塑性形变后常引起硬化,这叫作**加工硬化**,这种现象在加工例如炮筒时是有利的。

超过弹性限度的恒定胁强持续地作用,将使材料的形变不断地缓缓增大,这叫作**蠕变**。

实验又指出,胁强超过某个更高的限度,材料终于断裂。这个限度叫作**极限强度**。

有些材料的极限强度接近于弹性限度,因而只能有微小的塑性形变,这种材料叫作**脆性体**。极限强度远远超过弹性限度的材料,则可以有相当大的塑性形变,这种材料叫作**塑性体**。

不过,实际的材料中难免存在一些裂纹和缺陷,有些微小的裂纹和缺陷甚至用高精度的无损探伤仪也难以探测出来,但在使用过程中会逐渐扩展,以致胁强远远低于极限强度时就发生了所谓“低胁强脆性断裂”。关于这种断裂的研究,现在已形成一门学科,叫作**断裂力学**。

以上的叙述实际上指的是金属材料的性质,非金属的某些材料如橡皮等还有所谓**弹性后效**:外力加上后,立刻出现一部分形变,而在接着的好几天中形变还将逐渐增加,并趋于某个极限

值;撤除外力后,形变大部分消失,其余部分则在好几天内逐渐消失。

§ 42. 切变(或剪变)

(1) 切 变

取长方体的弹性体 ABCD (见图 10-1) 的两个对面 AB 与 CD, 把它们叫作上下两底, 在两底面上分别施加一个平行于底面的力, 两力指向相反而大小相等, 弹性体就从 ABCD 变形为 ABC'D'。这种形变叫作切变(或剪变)。

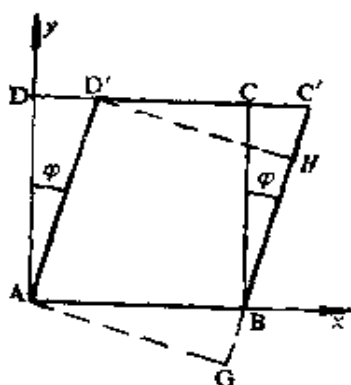


图 10-1

角 φ (图 10-1 的角 φ 是大为夸大的) 标志切变的程度, 叫作切变角, 或叫作切应变并记作 e_{12} 。

弹性体发生切变时也有一种复原趋势。具体地说, 平行于底面 AB 和 CD 的任一截面两方以平行于截面的切力 F , 相互作用。每单位面积的截面上的这种切力 F_1/S (S 是截面的面积) 叫作切应力, 记作 p_{12} 。

实验资料表明, 对于切变, 胡克定律也是成立的: 如果切应力不超过某一限度(叫作该种材料的切变比例限度), 弹性体的切应力正比于切应变,

$$p_{12} = ne_{12}, \text{ 即 } \frac{F_1}{S} = n\varphi. \quad (42.1)$$

比例常数 n 叫作该种材料的切变模量(或刚性模量)。

至于任意形状的弹性体, 只要把它划分为许许多多极小的长方体, 并令每个长方体无限逼近于零, 就得出结论: 在任意弹性体内各个点上, 胡克定律(42.1)成立。

注意区别胡克定律(41.2)与(42.1)中的作用力, 张变问题中

的力 F ，是沿着截面法向的作用力，切变问题中的力 F ，则是平行于截面的切力。

在图 10-1 中，如果着眼于 AD' 与 BC' 两个底面，也可以说弹性体是从 $AGHD'$ 变形为 $ABC'D'$ 。照这样看来，平行于底面 AD' 与 BC' 的任一截面两方也以切力相互作用。

对于切变，也存在比例限度、弹性限度、极限强度。晶体中某些特定取向的平面具有很低的切变弹性限度，沿这种面最容易发生滑移。敲碎晶体时，晶体并不像玻璃那样成为任意形状的碎块，而总是沿最易滑动的面碎裂。碎块的这种表面称为**解理面**。

(2) 纯切变

我们先看图 10-1，形变前的对角线 AC 和 BD ，形变后变为 AC' 和 BD' 。两相比较，不难看出，这种简单的切变其实还包含了转动成分。

在弹性体内某点附近取正方体 $ABCD$ (图 10-2)，这时如弹性体既有切应变 e_{12} ，又有切应变 e_{21} ，且 $e_{12} = e_{21} = \varphi$ ，则对角线的方向 AC' 和 $B'D'$ 都没有改变，可见这种形变不包含转动成份在内 [详细的论证参看 § 45 (1)]，我们把这种不包含转动成份的切变叫做**纯切变**。

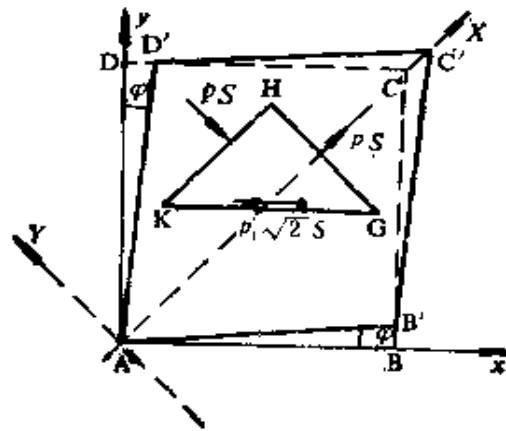


图 10-2

发生纯切变时，图 10-2 中的 ABCD 变为 AB'C'D'。这时若把 AB'C'D' 按顺时针方向绕通过 A 并垂直于纸面的轴旋转角 φ ，它就与图 10-2 的 ABC'D' 相似了，不同的仅是图 10-1 的角 φ 现在为图 10-2 中的 2φ 所代替。因此，我们可以认为，纯切变 $e_{12} = e_{21} = \varphi$ 完全等价于切应变 $e_{12} = 2\varphi$ 再加上逆时针转一角度 φ 。

值得注意的是：纯切变 $e_{12} = e_{21} = \varphi$ 又等价于某一对角线 X 方向的伸长与另一对角线 Y 方向的缩短，而这两个方向的张应变 $e_{XX} = \varphi, e_{YY} = -\varphi$ 。这是不难验证的。事实上，如以 L 表 AB 边或 AD 边的长，则未变形时的对角线 AC 和 BD 的长为

$$\overline{AC} = \overline{BD} = \sqrt{2}L.$$

至于变形后的对角线 AC' 的长

$$\begin{aligned} h_1 &= 2\overline{AB'} \cos(45^\circ - \varphi) = 2 \frac{L}{\cos \varphi} \\ &\quad \cdot (\cos 45^\circ \cos \varphi + \sin 45^\circ \sin \varphi) \\ &= \sqrt{2}L(1 + \operatorname{tg} \varphi) \approx \sqrt{2}L(1 + \varphi), \end{aligned}$$

从而 X 方向的张应变

$$e_{XX} = \frac{h_1 - \sqrt{2}L}{\sqrt{2}L} = \frac{\sqrt{2}L \operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{2}L} = \operatorname{tg} \varphi \approx \varphi. \quad (42.2)$$

变形后的对角线 B'D' 的长

$$\begin{aligned} h_2 &= 2\overline{AB'} \sin(45^\circ - \varphi) \\ &= 2 \frac{L}{\cos \varphi} (\sin 45^\circ \cos \varphi - \cos 45^\circ \sin \varphi) \\ &= \sqrt{2}L(1 - \operatorname{tg} \varphi) \approx \sqrt{2}L(1 - \varphi), \end{aligned}$$

从而 Y 方向的张应变

$$e_{YY} = \frac{h_2 - \sqrt{2}L}{\sqrt{2}L} = \frac{-\sqrt{2}L \operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{2}L} = -\operatorname{tg} \varphi \approx -\varphi. \quad (42.3)$$

反过来说，如弹性体内某点邻近部分沿 X 方向伸长而沿 Y 方

向缩短,且 $e_{XX} = -e_{YY}$, 这种形变也就等价于纯切变 $e_{12} = e_{21}$,
且 $e_{12} = e_{21} = e_{XX} = -e_{YY}$.

(3) 切变模量与杨氏模量的关系

既然纯切变等价于对角线方向的伸长与缩短,那就应该有可能用杨氏模量 Y 和泊松比 σ 表出切变模量 n . 现在来寻求这个表示式.

先用 XY 坐标系,这时弹性体的形变是张变.设在图 10-2 中 X 方向和 Y 方向的张胁强分别是

$$p_{XX} = p, \quad p_{YY} = -p.$$

按(41.6), X 方向和 Y 方向的张胁变分别是

$$\begin{cases} e_{XX} = \frac{1}{Y} p_{XX} - \sigma \frac{1}{Y} p_{YY} = \frac{1+\sigma}{Y} p, \\ e_{YY} = \frac{1}{Y} p_{YY} - \sigma \frac{1}{Y} p_{XX} = -\frac{1+\sigma}{Y} p. \end{cases}$$

改用 xy 坐标系,这时弹性体的形变是纯切变.切胁变

$$e_{12} = e_{21} = \frac{1+\sigma}{Y} p.$$

切变角则是

$$2\varphi = \frac{2(1+\sigma)}{Y} p.$$

还需要计算切胁强.为此,在弹性体中划出一个很小的三棱柱 GHK (图 10-2), 它的 GH 面和 HK 两个面分别垂直于 X 方向和 Y 方向,在这两面上也就分别作用着拉力 pS 和压力 pS , 这里的 S 是 GH 面或 HK 面的面积.另一面 GK 平行于 AB' , 在这面上作用着切力.但弹性体的形变实际上常是很小的,所以 GK 面实际上可说平行于 AB .因此, $\triangle GHK$ 是等腰直角三角形,从而 GK 的面积是 $\sqrt{2}S$.把所求的切胁强记作 p_t , 则 GK 面上

的切力为 $p_s \sqrt{2} S$ 。由三棱柱的 x 方向的平衡方程

$$p_s S \cos 45^\circ + p_s S \cos 45^\circ - p_s \sqrt{2} S = 0 \quad (42.4)$$

立刻得出

$$p_t = p_s.$$

方程(42.4)是平衡方程。如果弹性体并非处于平衡，应该改用运动方程，就是把(42.4)右边的零换成 ma_x 即 $\rho(S^2/2)Ha_x$ (ρ 是三棱柱 GHK 的密度， H 是柱的高度， a_x 是柱在 x 方向的加速度)。不过，这里研究的是在弹性体中同一点沿 X 方向和 Y 方向的张胁强 p 与沿 xy 平面的切胁强 p_t 之间的关系，因而三棱柱应取成很小很小，即 S 为小量，而 S^2 为高阶小量。这样，与运动方程左边各项相比， $\rho(S^2/2)Ha_x$ 是高阶小量，完全可以忽略，方程仍然归结为(42.4)。这就是说，即使弹性体并非处于平衡，仍然能得到 $p_t = p_s$ 。

按照切变模量 n 的定义，它是切胁强 p_t 与切变角 2φ 之比，因此，

$$n = \frac{Y}{2(1 + \sigma)}. \quad (42.5)$$

切变模量 n 的表示式(42.5)与拉密模量之一的 μ 的表示式(41.9)恰好完全一样，所以 $\mu = n$ 。

这样，在杨氏模量 Y 、泊松比 σ 、容积弹性模量 K 和切变模量 n 四者之中，只有两个是独立的。比如，把 Y 和 σ 作为独立的，则(41.12)给出容积弹性模量 K ，(42.5)给出切变模量 n 。当然，我们也可以从(41.12)和(42.5)解出 Y 和 σ ，就是说把它们用 K 和 n 表出，

$$\begin{cases} Y = \frac{9nK}{3K + n}, \\ \sigma = \frac{3K - 2n}{6K + 2n}. \end{cases} \quad (42.6)$$

(4) 切变弹性势能密度

在图 10-3 中, 平行六面体的弹性体的切变角为 φ 时, 作用在 $C'D'$ 面上的切力 $F_t = p_t S = n\varphi S$, 其指向与 x 轴相反。在切变角从 φ 变为 $\varphi + d\varphi$ 的过程中, 切力 F_t 的作用点的位移 $dx = Ld\varphi$, 因而切力所作功

$$\begin{aligned} dW &= -F_t dx = -n\varphi S L d\varphi \\ &= -d\left(\frac{1}{2} n\varphi^2 LS\right). \end{aligned}$$

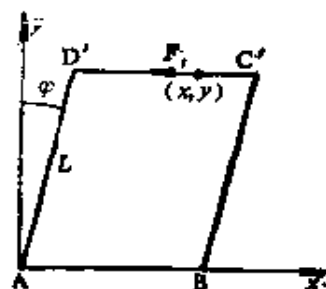


图 10-3

这样, 在平行六面体的切变过程中, 切力所作功与过程的中间情况无关, 亦即存在着切变弹性势能 V ,

$$dV = -dW = d\left(\frac{1}{2} n\varphi^2 LS\right),$$

即切变弹性势能

$$V = \frac{1}{2} n\varphi^2 (LS).$$

切变弹性势能 V 正比于平行六面体的体积 LS 。这提示我们, 切变弹性势能分布于整个体积中, 每单位体积的切变弹性势能, 亦即切变弹性势能密度

$$U = \frac{1}{2} n\varphi^2. \quad (42.7a)$$

运用(42.1)还可以把上式改写为

$$U = \frac{1}{2} p_t \varphi \quad \text{或} \quad U = \frac{1}{2} \frac{1}{n} p_t^2. \quad (42.7b)$$

其实, 任意弹性体内各个点上的切变弹性势能密度都可由(42.7)给出。

§ 43. 圆杆的扭转

均匀伸长或缩短, 均匀切变, 或者一般地说, 均匀形变, 是比较

简单的问题。本节研究一种不均匀的切变——圆杆的扭转。各种机械中的传动轴经常处于扭转状态，因为它的两端分别受到主动机构与被动机构所施加的相反的力矩。

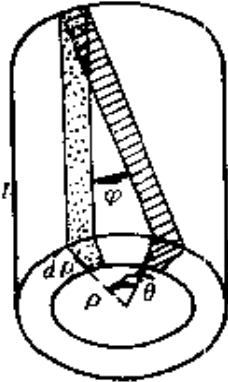


图 10-4

取截面均匀的圆杆。为简便计，设两个端面之一是固定的，我们把这个固定的端面叫作上端面，其实它并不一定真在上方，这仅仅是为了下文叙述的方便。另一个端面当然就叫作下端面了。在下端面上施加力偶，其力矩 M 的方向平行于圆杆的轴，杆就被扭转。下端面相对于上端面的角位移 θ （见图 10-4）叫作**扭转角**。我们要寻求扭转角 θ 与

力矩 M 之间的关系。

取圆杆的中心轴作为 z 轴，原点在上端面的中心， z 轴从上端面中心指向下端面中心。杆的各个横截面都绕 z 轴转动，但其角位移各不相同。可以揣想，从上端面到下端面，角位移正比于坐标 z 而增大。

同一横截面上各点的角位移虽然相等，线位移却不相等。因此，为了分析圆杆扭转问题，应将圆杆划分为一层套一层的许许多多空心圆柱体。图 10-4 描画了这些空心圆柱体之一，它的内外半径分别是 ρ 与 $\rho + d\rho$ （图上的画法是夸大了的）。

同一层空心圆柱体同一横截面上各点的线位移虽然大小相等，方向却各不相同。因此，我们又用通过柱轴的许许多多平面把这个空心圆柱体进一步划分为许许多多窄条。这些窄条之一在杆未扭转前的位置在图 10-4 中用细点来标明，它在杆扭转后的位置则用斜线来标记。由图显而易见，这窄条的形变是切变，我们把它的切变角记作 φ 。

把圆杆的长记作 l ， $l\varphi = \rho\theta$ ，于是算出切变角 φ ：

$$\varphi = \frac{\rho}{l} \theta, \quad (43.1)$$

因而窄条的底面上的切应力为

$$\rho_t = n\varphi = \frac{n\rho\theta}{l} \quad (43.2)$$

窄条底面可看作矩形,其边长为 $d\rho$ 与 $\rho d\psi$ ($d\psi$ 是窄条底面相对于下端面中心所张的角度),面积 $dS = \rho d\rho d\psi$. 于是,窄条底面上的切力为

$$\rho_t dS = \frac{n\rho^2\theta}{l} d\rho d\psi.$$

这切力对于圆杆中心轴的力矩为

$$\rho \rho_t dS = \frac{n\theta}{l} \rho^3 d\rho d\psi. \quad (43.3)$$

这样,作用在图 10-4 的空心圆柱体底面上的切力的力矩为

$$\int_0^{2\pi} \frac{n\theta}{l} \rho^3 d\rho d\psi = \frac{2\pi n\theta}{l} \rho^3 d\rho. \quad (43.4)$$

把圆杆的截面半径记作 r . 作用于圆杆整个底面上的切力对于杆轴的力矩,即所谓**扭转力矩**为

$$M = \int_0^r \frac{2\pi n\theta}{l} \rho^3 d\rho = \frac{\pi n r^4}{2l} \theta. \quad (43.5)$$

在达到平衡时,这扭转力矩应当就等于外加力矩,所以外加力矩与平衡的扭转角 θ 之间的关系亦由(43.5)给出.

扭转力矩的公式(43.5)指出,扭转力矩正比于扭转角 θ 与切变模量 n ,反比于杆长 l . 值得注意的是,扭转力矩正比于圆杆半径 r 的四次方. 杆只要稍微粗一点,扭转就要困难得多.

计算最大应力 ρ_{\max} 是很有意义的,因为这与防止断裂有很密切的关系. 由(43.2)知道,在 ρ 越大的地方,切应力 ρ_t 越大,因而在圆杆表面的切应力最大,

$$\rho_{\max} = \frac{n r \theta}{l}.$$

把(43.5)所决定的 θ 代入上式,即得

$$\rho_{\max} = \frac{2M}{\pi r^3} \quad (43.6)$$

由此可见, 对于一定的扭转力矩 M , 杆的半径 r 越大, ρ_{\max} 越小, 越不易破坏. 由此可以推论, 用同样多的材料, 作成空心圆杆比做成实心圆杆更能抵抗扭转.

例 1 圆盘的轴是一根钢丝, 钢丝半径为 r , 两段的长度各为 l_1 与 l_2 . 钢丝上下两端被固定 (图 10-5). 把圆盘扭过角度 θ . 然后放手, 任其自由, 求解圆盘在放手后的运动. 设圆盘的转动惯量 I 和钢丝的切变模量 μ 是已知的.



图 10-5

解 当圆盘的扭转角为 θ 时, 钢丝给予圆盘的扭转力矩按(43.5)为

$$\left(\frac{\pi \mu r^4}{2l_1} + \frac{\pi \mu r^4}{2l_2} \right) \theta.$$

运用定轴转动的动量矩定理写出圆盘扭转运动的运动方程

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = - \frac{\pi \mu r^4}{2} \left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} \right) \theta. \quad (1)$$

上式右边的负号表明钢丝给予圆盘的扭转力矩与扭转角 θ 的符号相反.

方程(1)是谐振动方程, 它的解可以立刻写出

$$\theta = A \cos \left(t \sqrt{\frac{\pi \mu r^4}{2I} \left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} \right)} + \varphi \right), \quad (2)$$

式中的 A 和 φ 是两个积分常数.

初始条件是

$$\theta|_{t=0} = \theta_0, \quad \left. \frac{d\theta}{dt} \right|_{t=0} = 0.$$

用初始条件确定积分常数得 $A = \theta_0, \varphi = 0$. 于是, (2) 成为

$$\theta = \theta_0 \cos \left(t \sqrt{\frac{\pi \mu r^4}{2I} \left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} \right)} \right). \quad (3)$$

这就是圆盘在放手后的扭转运动.

例 2 用半径为 r 的钢丝绕制螺旋弹簧 (图 10-6), 螺旋的半径为 R ,

螺距 h 很小因而可以忽略。弹簧的螺旋部分的钢丝长度为 l 。弹簧上端固定，问在弹簧下端挂上质量为 m 的物体将使弹簧伸长多少？

解 螺旋的螺距 h 很小，这就是说，弹簧的螺旋部分的每一横截面都可认为是竖直的，并不倾斜。图 10-6 涂黑的小圆点就是螺旋部分的最后一个截面或者说下端面。

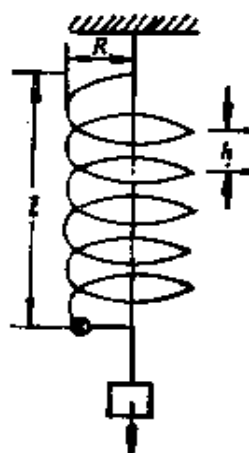


图 10-6

所挂物体的重量 mg 对于下端面中心的力矩为 $M = mgR$ 。这力矩 M 的指向是水平而背离读者的，亦即平行于下端面的法向，因而这里发生的是扭转。

按(43.5)，扭转角

$$\theta = \frac{2l}{\pi nr^4} M = \frac{2l}{\pi nr^4} mgR.$$

严格说来，弹簧的伸长是簧丝的切变和扭转两种变形的综合结果。但如簧丝的半径 r 远小于弹簧圈的半径 R （实际上只要 $R/r \geq 10$ ），切变对伸长的影响很小，可以忽略不计。此时弹簧的伸长可以认为是簧丝扭转变形的结果。既然下端面转过角 θ ，弹簧的伸长应为

$$R\theta = \frac{2lR^2}{\pi nr^4} mg.$$

§ 44. 杆的弯曲

本节研究一种不均匀张变(或者还带有切变)——杆的弯曲。在机械和建筑结构中，承受负载的杆常发生弯曲。

(1) 单纯弯曲

取一均匀杆，它的各个截面是完全一样的。把杆的左端固定，在右端施加力偶，其力矩 M 的指向垂直于杆的轴而背离读者。跟上节例题 2 的扭转不同，这里的力矩 M 不是平行于杆的截面的法向，而是平行于杆的截面。

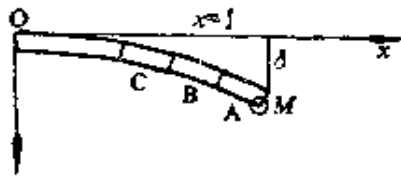


图 10-7

把杆分为若干小段如图 A、B、C...等,最右端小段 A 在外加力偶的作用下发生转动,改变了它相对于 B 的取向.由于杆的弹性,改变了相对取向的 A 与 B 互以力偶作用,因而 B 也发生转动,从而又改变了它相对于 C 的取向.于是, B 与 C 互以力偶作用, C 也就发生转动. 依此推论,杆的各个部分分别发生大小不等的转动,或者简单地说,杆发生了弯曲. 图 10-7 所描画的弯曲是过份夸大的.

这一弯曲现象将继续进行,直到杆的每个部分即每一小段所受力矩达到平衡. 具体地说,小段 A 受到外加力矩 M 以及 B 所施加的力矩 $-M$; B 受到 A 所施加的力矩 M 以及 C 所施加的力矩 $-M$ 等等,依此类推.

柏努利假定杆的每一截面在弯曲后仍保持为平面. 于是,上面所说的弹性力矩就是杆的任一截面两方相互作用的力矩,我们把它叫作**挠矩**.

在单纯弯曲的情况下,各个截面上的挠矩相同. 现在来计算这种情况下挠矩的大小与杆的弯曲程度之间的关系.

为此,取杆的一小段,例如图 10-7 的 C,加以考察. 参看图 10-8. 这一段原长为 dx . 发生弯曲时,上半部不均匀地伸长,下半部不均匀地压缩,两者之间必定有某一既不伸长也不缩短的面 NN' ,它叫作**中面**,中面在图面上的切口叫**中线**. 关于它的确切位置问题见后. 将中线的曲率半径记作 R ,则中线的曲率 $1/R$ 可作为杆的弯曲程度的标志. 图中 $d\theta$ 是这小段杆对曲率

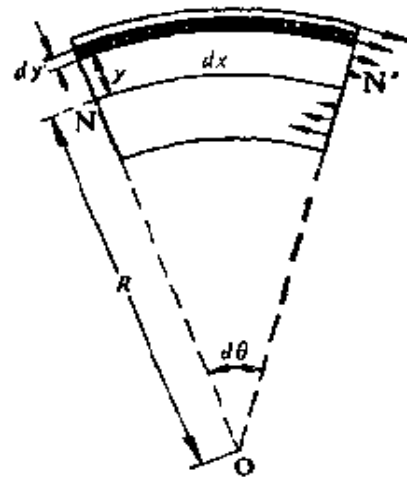


图 10-8

中心 O 所张的角, $d\theta = dx/R$.

取距离中面为 y 的薄层加以考察. 它的原来长度自然也是 dx , 而在弯曲时的长度则为

$$\begin{aligned}(R+y)d\theta &= (R+y) \frac{dx}{R} = \left(1 + \frac{y}{R}\right) dx \\ &= dx + \frac{y}{R} dx.\end{aligned}$$

可见薄层的伸长是 ydx/R , 从而这薄层的张胁变

$$e_{11} = \frac{y}{R}. \quad (44.1)$$

于是, 这薄层的张胁强

$$p_{11} = Y \frac{y}{R}. \quad (44.2)$$

研究图 10-8 那一小段的一个端面如右端面所受的作用力.

首先, 端面上所受力的矢量和应为零, 这是因为在我们所研究的纯弯曲情况下, 杆仅仅弯曲, 总的说来并没有伸长或缩短. 把前述薄层的截面面积记作 dS , 端面上所受力的矢量和为零就可表为

$$\int p_{11} dS = \int Y \frac{y}{R} dS = \frac{Y}{R} \int y dS = 0,$$

即

$$\int y dS = 0. \quad (44.3)$$

这就是说, 截面的“质心”的坐标 $y_0 = 0$, 亦即“质心”在中线上. 换句话说, 中线乃是各个横截面的“质心”的连线.

矢量和为零, 这就表明作用在端面上的那许许多多力归结为力偶, 这力偶的力矩就是所求的挠矩. 过点 N' 作垂直于纸面的直线, 作用在端面上的那许许多多力对于这直线的力矩

$$M = \int y p_{11} dS = \int \frac{Y}{R} y^2 dS = \frac{Y}{R} \int y^2 dS.$$

积分 $\int y^2 dS$ 是横截面相对于这直线的“转动惯量”，我们把它记作 I 。于是，求得挠矩

$$M = YI \frac{1}{R}. \quad (44.4)$$

这叫作**柏努利-欧勒定律**。挠矩 M 正比于中线的曲率 $1/R$ ，亦即正比于杆的弯曲程度，这是完全可以理解的。

在达到平衡时，挠矩应当就等于外加的弯曲力矩，所以外加力矩与平衡时的弯曲程度 $1/R$ 的关系也由(44.4)给出。

应当指出，这里没有计及杆的自身重量。事实上，杆的重量往往远小于杆中的巨大胁强从而可以忽略。

例 1 试计算图 10-7 的杆的弛垂度 δ (即右端所下降的距离)。

解 按照柏努利-欧勒定律(44.4)，杆的曲率半径

$$\frac{1}{R} = \frac{M}{YI}. \quad (1)$$

在单纯弯曲的情况下，各个截面上的挠矩 M 相同，所以杆的曲率半径 $1/R = M/YI$ 是常数。换句话说，杆的形状是半径 $R = YI/M$ 的圆。由此不难算出弛垂度。

杆的弯曲一般是微小的，所以可取近似

$$\frac{1}{R} = \pm \frac{y}{(1 + y'^2)^{3/2}} \approx -y''.$$

于是，(1)式成为

$$y'' = -\frac{M}{YI}. \quad (2)$$

把上式积分两次，并利用杆左端的端点条件 $y(0) = 0$ 和 $y'(0) = 0$ 定出积分常数，即得

$$y = -\frac{M}{2YI} x^2. \quad (3)$$

在杆的右端， $x = l$ 。以 $x = l$ 代入(3)，得

$$y|_{x=l} = -\frac{M}{2YI} l^2.$$

由此知所求弛垂度为 $Ml^2/2YI$ 。

例 2 再次研究 § 43 例 2 的弹簧(图 10-6),但在弹簧下端不是挂上一个物体,而是施加一个力偶,其力矩 M 沿着螺旋的轴.问这时发生的是哪一种形变?试计算其变形程度.

解 试看图 10-6 那个涂黑的小圆点所代表的下端面.既然力矩 M 沿着螺旋的轴,它也就平行于下端面,因而这里发生的是弯曲.

但是,不同于上文的是,这钢丝在未变形前已经是弯曲的,其曲率半径为 R .把变形后的曲率半径记作 R_1 ,则(44.1)应换作

$$\epsilon_{11} = y \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R} \right).$$

完全仿照上文进行演算,则代替(44.4),我们将得出

$$M = YI \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R} \right).$$

即螺旋曲率的改变为

$$\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R} = \frac{M}{YI}.$$

上面这个答案还可以用另一方式来表达,即螺旋下端面的角位移为

$$\frac{l}{R_1} - \frac{l}{R} = \frac{Ml}{YI}.$$

(2) 关于截面的形状

为了防止材料发生断裂,计算最大胁强是很有意义的.由(44.2)知道,距中线越远处的张胁强越大.把图 10-8 中的 y 的最大值记作 h ,则

$$\rho_{\max} = Y \frac{h}{R}.$$

把(44.4)所决定的 $1/R$ 代入上式,即得

$$\rho_{\max} = \frac{M}{I/h}. \quad (44.5)$$

这样看来, I/h 具有很重要的意义,通常把它叫作**截面模量**.对于一定的弯曲力矩 M ,杆的截面模量越大, ρ_{\max} 越小,越不易破坏.

不过,孤立地比较截面模量是没有多大意义的。事实上,如保持 h 一定,只要加大截面的面积,就能增大截面模量。但是,加大截面面积意味着占用较多的材料。因此,应该就同样的材料占用量来比较截面模量。换句话说,就同样的截面面积来比较截面模量。

例如,比较正方截面的钢杆与圆形截面的钢杆。如截面面积 S 相等,则正方形的边长 l 与圆的半径 r 之间的关系为 $l^2 = S = \pi r^2$, 即

$$l = \sqrt{\pi} r.$$

分别计算它们的截面模量 C ,

$$C_{\text{正方}} = \frac{1}{12} Sl / \frac{l}{2} = \frac{1}{6} Sl,$$

$$C_{\text{圆}} = \frac{1}{4} Sr^2 / r = \frac{1}{4} Sr.$$

考虑到 $l = \sqrt{\pi} r$, 我们有

$$C_{\text{正方}} = \frac{\sqrt{\pi}}{6} Sr = 0.294Sr > 0.25Sr = C_{\text{圆}},$$

这样,占用同样多材料的正方截面钢杆,比圆形截面钢杆更能抵抗弯曲。

其实,正方截面也并不是最好的截面。从图 10-8 容易看出,靠近中面的薄层的形变很小,从而张胁强很小,远远没有达到它所能承担的胁强,或者说,有很大潜力没有发挥出来。至于距中面较远的薄层则形变较大,承担着较大的胁强。为了充分发挥材料的潜力,完全可以削弱靠近中面的薄层,把这样省下来的材料添加到远离中面的薄层中去。这样一来,截面的形状就成为工字形、T 字形、U 字形、圆环形等等。这就是工程技术上广泛采用工字钢、T 字钢、槽钢、空心钢管的原因。生物机体在长期的演化过程中也适应了这条力学的规律:鸟的骨头和麦秆都是空心的。

(3) 带有切变的弯曲

在实际结构中，常常遇到的并不是象图 10-7 和图 10-8 那种用力偶使杆弯曲的情况，倒是杆支承着负载从而发生弯曲如图 10-9 所示。

拿这与前面那种情况相比较，可指出如下差异。

首先，图 10-9 所描画的杆中各个截面上的挠矩并不相同。拿图 (a) 来说，设想在 X 处（坐标为 x ）把杆划分为左右两段。考察右边这一段的力矩平衡问题。取通过 x 处截面中点而垂直于图面的直线，相对于这根直线来计算力矩。右端所挂那个物体的重量 mg 的力矩是 $mg(l-x)$ 。把杆的线密度（即每单位长度的质量）记作 ρ ，则右段杆自身重量是 $\rho(l-x)g$ ；均匀杆的重心在它的中点，所以右段杆自重的力臂为 $(l-x)/2$ ，从而自重力矩是 $\rho g(l-x)^2/2$ 。此外，右段杆还受到左段杆所施加的力矩，这就是两段分界面上的挠矩 M 。考虑到这三个力矩的方向，可以写出右段杆的力矩平衡方程为

$$M - mg(l-x) - \frac{1}{2} \rho(l-x)^2 = 0.$$

由此求得挠矩 M 作为坐标 x 的函数是

$$M(x) = mg(l-x) + \frac{1}{2} \rho(l-x)^2. \quad (44.6)$$

既然各个截面上的挠矩 M 不同，这就意味着杆的各处弯曲程

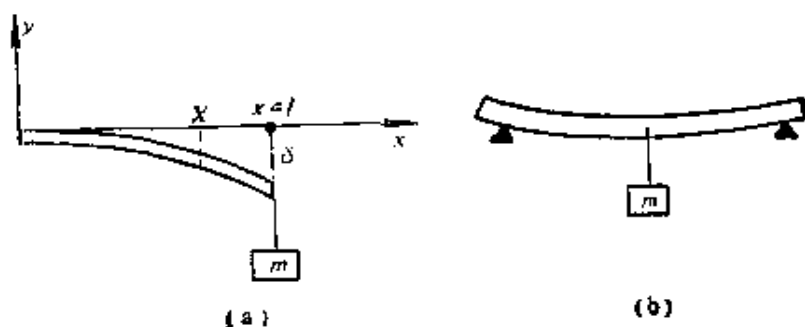


图 10-9

度不同, 挠矩 $M(x)$ 与曲率 $1/R(x)$ 之间的关系仍然由柏努利-欧勒定律(44.4)给出, 因而

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{YI} M = \frac{1}{YI} mg(l-x) + \frac{1}{YI} \frac{1}{2} \rho(l-x)^2. \quad (44.7)$$

其次, 各个截面上还出现了切力, 仍然拿上述右段杆来考察. 它支承右端所载物体的重量 mg , 它自身又有重量 $\rho(l-x)$. 这样, 它具有向下移动的趋势, 从而产生切变. 于是, 在两段分界面上出现切力. 左段对右段的切力 T 是向上的. 力的平衡方程是

$$T - mg - \rho(l-x) = 0.$$

由此求得切力 T 作为坐标 x 的函数

$$T(x) = mg + \rho(l-x). \quad (44.8)$$

例 3 试计算图 10-9(a) 中杆的弛垂度 δ . 设杆的自重 在计算中可以忽略.

解 方程(44.7)给出杆在各处的弯曲程度, 经过积分运算可以求得杆的形状, 亦即杆的方程式. 一旦求得杆的方程式, 计算弛垂度就是轻而易举的了.

具体计算如下. 在忽略杆的自重时, (44.7) 成为

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{YI} mg(l-x). \quad (1)$$

杆的弯曲一般是微小的, 可仿例 1 取近似 $1/R \approx -y''$. 于是, (1) 式成为

$$y'' = -\frac{1}{YI} mg(l-x). \quad (2)$$

把上式积分两次, 并利用杆左端的条件 $y(0) = 0$ 和 $y'(0) = 0$ 定出积分常数, 即得

$$y = -\frac{1}{YI} mg \left(\frac{lx^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} \right). \quad (3)$$

在杆的右端, $x = l$. 以 $x = l$ 代入(3), 得

$$y|_{x=l} = -\frac{1}{YI} mg \frac{l^3}{3}.$$

由此知弛垂度为 $mg l^3 / 3YI$.

*§ 45. 胁变的一般分析

(1) 胁变张量

我们把变形体当作无限多个无限小部分所组成的连续体来处理。每个无限小部分可说是一个点，各个无限小部分可用它们各自在尚未变形的连续体中的径矢 $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ 相区别。既然说的是连续体， \mathbf{r} 当然是连续变数。

变形体的形变可用各个小部分的位移 \mathbf{s} 来描写，这就是说，位移函数

$$\mathbf{s}(\mathbf{r}) = \xi(\mathbf{r})\mathbf{i} + \eta(\mathbf{r})\mathbf{j} + \zeta(\mathbf{r})\mathbf{k} \quad (45.1)$$

给出变形体的形变情况的详尽描写。

这里试对变形体的形变进行一般的分析。

在变形体里取定某个 O 点，它在未变形前的径矢为 $\mathbf{r}_0 = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k}$ 。我们要考察点 O 邻近部分的形变情况。在点 O 的邻近取点 P 作为代表而加以考察，点 P 在未变形前的径矢可记作 $\mathbf{r}_0 + \mathbf{r} = (x_0 + x)\mathbf{i} + (y_0 + y)\mathbf{j} + (z_0 + z)\mathbf{k}$ 。因为点 P 在 O 的邻近，可把位移函数 $\mathbf{s}(\mathbf{r}_0 + \mathbf{r})$ 展为泰勒级数，并只保留到一阶项而把二阶及其以上的项略去。为明白起见，这里用分量形式写出

$$\begin{cases} \xi(\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}) = \xi(\mathbf{r}_0) + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial \xi}{\partial z}\right)_0 z, \\ \eta(\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}) = \eta(\mathbf{r}_0) + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial \eta}{\partial z}\right)_0 z, \\ \zeta(\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}) = \zeta(\mathbf{r}_0) + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z}\right)_0 z, \end{cases} \quad (45.2)$$

记号 $(\)_0$ 表示偏导数取其在 O 点的值。这三个式子右边第一项描写的是 O 点的邻近部分整个地随着 O 点平移，这与形变无关。因此，把右边第一项移到左边去，方程(45.2)成为

$$\begin{cases} d\xi = \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial \xi}{\partial z}\right)_0 z, \\ d\eta = \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial \eta}{\partial z}\right)_0 z, \\ d\zeta = \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z}\right)_0 z. \end{cases} \quad (45.3)$$

我们先看(45.3)的对角项,即右边“对角线”上的项,例如 $(\partial \xi / \partial x)_0 x$ 项.如果把 Δx 当作未变形时沿 x 方向的一小段的长,则 $\Delta \xi = \xi(x_0 + \Delta x) - \xi(x_0)$ 是这一小段的伸长,从而沿 x 方向的张胁变

$$e_{11} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \xi}{\Delta x} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_0. \quad (45.4a)$$

这样, $(\partial \xi / \partial x)_0 x$ 项描写的是沿 x 方向发生张胁变时 P 点的位移.同理, $(\partial \eta / \partial y)_0 y$ 和 $(\partial \zeta / \partial z)_0 z$ 两项分别描写沿 y 方向和 z 方向发生张胁变 e_{22} 和 e_{33} 时 P 点的位移,而

$$e_{22} = \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)_0, \quad e_{33} = \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z}\right)_0. \quad (45.4b)$$

再看(45.3)的非对角项,例如 $(\partial \xi / \partial y)_0 y$.如果把 y 当作未变形时垂直于 y 轴的一薄层的厚度,则 $\Delta \xi = \xi(y_0 + y) - \xi(y_0)$ 是这薄层两面的 x 方向位移之差,这是一种切变,切胁变亦即切变角为

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta \xi}{\Delta y} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)_0. \quad (45.5)$$

这样, $(\partial \xi / \partial y)_0 y$ 项描写的是垂直于 y 方向的薄层沿 x 方向切变时 P 点的位移.同理,其他非对角项也描写切变.

但是,在(45.3)的非对角项中可能包含这样的情况:一方面,垂直于 y 轴的薄层沿负 x 向发生切变,切变角是 φ [图 10-10, (a)到(b)];另一方面,垂直于 x 轴向的薄层沿正 y 方向发生切变,切变角也是 φ [图10-10, (b)到(c)].读者可以看出,结果只不过

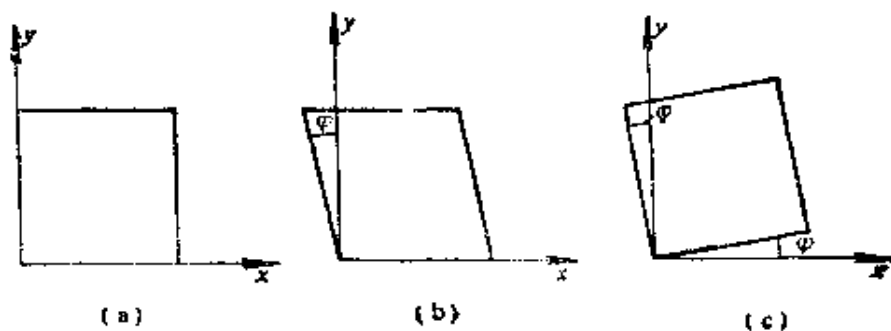


图 10-10

是绕 z 轴的转动, 转动角等于 φ , 而转动是与形变无关的。

这样, 我们还应该把(45.3)中描写转动的部分分离出来。为此, 把(45.3)的所有的项分别拆为“对称部分”与“反对称部分”, 即

$$\begin{cases} d\xi = d\xi_{\text{对}} + d\xi_{\text{反}}, \\ d\eta = d\eta_{\text{对}} + d\eta_{\text{反}}, \\ d\zeta = d\zeta_{\text{对}} + d\zeta_{\text{反}}, \end{cases} \quad (45.6)$$

其中

$$\begin{cases} d\xi_{\text{对}} = e_{11}x & + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)_0 y + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)_0 z, \\ d\eta_{\text{对}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)_0 x + e_{22}y & + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)_0 z, \\ d\zeta_{\text{对}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z} \right)_0 x + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial z} \right)_0 y + e_{33}z, \end{cases}$$

$$\begin{cases} d\xi_{\text{反}} = & + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)_0 y + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)_0 z, \\ d\eta_{\text{反}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)_0 x & + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)_0 z, \\ d\zeta_{\text{反}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial z} \right)_0 x + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial z} \right)_0 y. \end{cases}$$

为了今后书写的简洁, 引入记号

$$\begin{cases} e_{12} = e_{21} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)_0, \\ e_{13} = e_{31} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)_0, \\ e_{23} = e_{32} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)_0. \end{cases} \quad (45.7)$$

$$\begin{cases} \varphi_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) = \frac{1}{2} (\nabla \times \mathbf{s})_x, \\ \varphi_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} (\nabla \times \mathbf{s})_y, \\ \varphi_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} (\nabla \times \mathbf{s})_z, \end{cases} \quad (45.8)$$

就可把“对称部分”与“反对称部分”分别表为

$$\begin{cases} d\xi_{\text{对}} = e_{11}x + e_{12}y + e_{13}z, \\ d\eta_{\text{对}} = e_{21}x + e_{22}y + e_{23}z, \\ d\zeta_{\text{对}} = e_{31}x + e_{32}y + e_{33}z, \end{cases} \quad (45.9)$$

$$\begin{cases} d\xi_{\text{反}} = -\varphi_3y + \varphi_2z, \\ d\eta_{\text{反}} = +\varphi_3x - \varphi_1z, \\ d\zeta_{\text{反}} = -\varphi_2x + \varphi_1y. \end{cases} \quad (45.10)$$

容易看出(45.10)的右边正是 $(\varphi_1\mathbf{i} + \varphi_2\mathbf{j} + \varphi_3\mathbf{k}) \times \mathbf{r}$ 的三个分量,这显然描写转动,而转动是与形变无关的。因此,在形变问题中,我们将略去(45.10),只着重(45.9)并略去下标“对”而简单地写成

$$\begin{cases} d\xi = e_{11}x + e_{12}y + e_{13}z, \\ d\eta = e_{21}x + e_{22}y + e_{23}z, \\ d\zeta = e_{31}x + e_{32}y + e_{33}z, \end{cases}$$

即

$$\begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \\ d\zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \quad (45.11)$$

由此可见,这时(45.11)的对角项 e_{11} , e_{22} 和 e_{33} 描写的是张应变,非对角项例如 $e_{12} = e_{21}$ 则描写纯切变(图 10-2),我们称它为“纯”切变就是因为转动部分(45.10)已分离出去。

(45.4)和(45.7)所定义的九个 e

$$\begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{bmatrix} \quad (45.12)$$

叫作在 O 点的**应变张量**,它按照(45.11)描写 O 点邻近部分的形变情况。

例 § 43 研究了圆杆的扭转,试根据该节的分析求出扭转的圆杆中的应变张量。

解 取柱坐标系,原点上端面中心, z 轴从上端面中心指向下端面中心。

该节认为,从上端面到下端面,角位移正比于坐标 z 而增大,即角位移等于 $\theta z/l$,于是,圆杆扭转时在坐标为 (ρ, φ, z) 处的位移是

$$r_\rho = 0, \quad r_\varphi = \rho \theta \frac{z}{l}, \quad r_z = 0.$$

变换到直角坐标系,这其实只要把平面极坐标 (ρ, φ) 变换到平面直角坐标就得了。结果是

$$\begin{cases} \xi = r_\rho \cos \varphi - r_\varphi \sin \varphi = -\frac{\theta}{l} yz, \\ \eta = r_\rho \sin \varphi + r_\varphi \cos \varphi = \frac{\theta}{l} xz, \\ \zeta = 0. \end{cases}$$

按照定义(45.4),

$$e_{11} = \frac{\partial \xi}{\partial x} = 0, \quad e_{22} = \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0, \quad e_{33} = \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0.$$

即圆杆扭转时,在横截面上和柱轴上都没有张变。

按照定义(45.7),

$$\begin{cases} e_{12} = e_{21} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \left(-\frac{\theta}{l} z + \frac{\theta}{l} z \right) = 0, \\ e_{13} = e_{31} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \left(-\frac{\theta}{l} y + 0 \right) = -\frac{\theta}{2l} y, \\ e_{23} = e_{32} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\theta}{l} x + 0 \right) = \frac{\theta}{2l} x. \end{cases}$$

这就是说,在圆杆的横截面上没有切变。事实上,每个截面只作整体的转动 [相应于这个转动的 $\varphi_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) = \frac{\theta}{l} z$, 这正是前面所指出的角位移]。至于截面与截面之间则是有切变的。

(2) 胁变主轴

胁变张量(45.12)构成实对称矩阵。从线性代数知道,适当转动坐标系,可以使实对称矩阵(45.12)对角化。使胁变张量对角化的直角坐标系统的三根坐标轴叫作**胁变主轴**。对角化了的胁变张量

$$\begin{bmatrix} e_1 & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 \end{bmatrix} \quad (45.13)$$

的三个对角元素分别是 O 点邻近部分沿三根胁变主轴的张胁变,叫作**主张胁变**。

§ 42 曾指出,纯切变可归结为张胁变。因此,胁变张量(45.12)归结为(45.13)的主张胁变是并不奇怪的。

(3) 体胀系数

试将旋度算符“ $\nabla \times$ ”与散度算符“ $\nabla \cdot$ ”运用于位移函数 $\mathbf{s}(\mathbf{r}_0 + \mathbf{r})$ 。这 $\mathbf{s}(\mathbf{r}_0 + \mathbf{r})$ 已分解为

$$\mathbf{s}(\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}) = \mathbf{s}(\mathbf{r}_0) + d\mathbf{s}_x + d\mathbf{s}_y,$$

而 $d\mathbf{s}_x = d\xi_x i + d\eta_x j + d\zeta_x k$ 和 $d\mathbf{s}_y = d\xi_y i + d\eta_y j + d\zeta_y k$

分别由(45.9)和(45.10)给出.

由直截了当的计算可得

$$\nabla \times \mathbf{s}(\mathbf{r}_0) = 0, \quad \nabla \times d\mathbf{s}_e = 0, \quad (45.14)$$

$$\nabla \times d\mathbf{s}_R = 2(\varphi_1 \mathbf{i} + \varphi_2 \mathbf{j} + \varphi_3 \mathbf{k}). \quad (45.15)$$

事实上, $\mathbf{s}(\mathbf{r}_0)$ 表征平移, $d\mathbf{s}_e$ 表征张变与纯切变, 它们的旋度为零是可以理解的; $d\mathbf{s}_R$ 则表征转动, 它的旋度不为零也是可以理解的.

又由直截了当的计算可得

$$\nabla \cdot \mathbf{s}(\mathbf{r}_0) = 0, \quad \nabla \cdot d\mathbf{s}_R = 0, \quad (45.16)$$

$$\nabla \cdot d\mathbf{s}_e = e_{11} + e_{22} + e_{33} = \Theta. \quad (45.17)$$

这样, $d\mathbf{s}_e$ 的散度给出体胀系数即体积改变的百分率. 至于表征平移的 $\mathbf{s}(\mathbf{r}_0)$ 与表征转动的 $d\mathbf{s}_R$ 与体积的改变无关, 它们的散度为零是可以理解的.

体胀系数 $\Theta = e_{11} + e_{22} + e_{33}$ 是矩阵(45.12)的对角元素之和. 在数学上, 这叫作矩阵(45.12)的迹. 根据线性代数, 矩阵的迹在正交变换下不变, 换句话说, 与坐标系的选择无关. 其实, 从物理上看, 它既然是体积改变的百分率, 当然与坐标系的选择无关. 特别是, 如果取协变主轴为坐标轴, 则

$$\Theta = e_1 + e_2 + e_3. \quad (45.18)$$

(4) 相容条件

用位移描述变形体的形变, 需要三个函数, 即 $\mathbf{s}(\mathbf{r})$ 的三个分量 $\xi(\mathbf{r})$ 、 $\eta(\mathbf{r})$ 和 $\zeta(\mathbf{r})$, 但也可用协变张量来描述, 并且不限于点 O 的邻近部分而是遍及整个变形体, 所以协变张量的定义式中的偏导数并不限于取其在点 O 的值, 而是变形体中的点的矢径 \mathbf{r} 的函数. 这时在(45.4)和(45.7)中应取消记号()₀. 既然协变张量的独立分量有六个, 用它们描述变形体的形变也需要六个函数. 从位移函数 ξ 、 η 和 ζ 求协变张量还好办, 只要按(45.4)和(45.7)计算偏导数就行了. 反之, 从协变张量的六个分量求位移函数 ξ 、

η 和 ζ , 如果应变张量是任意给出的, 就相当于从六个方程求解三个未知数, 一般是没有解的。

事实上, $d\xi = e_{11}dx + (e_{12} - \varphi_3)dy + (e_{13} + \varphi_2)dz$ 是全微分, 由此得到条件

$$\begin{cases} \frac{\partial e_{11}}{\partial y} = \frac{\partial e_{12}}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_3}{\partial x}, & (45.19) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial e_{12}}{\partial z} - \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} = \frac{\partial e_{13}}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}, & (45.20) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial e_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = \frac{\partial e_{11}}{\partial z}. & (45.21) \end{cases}$$

同理, $d\eta = (e_{12} + \varphi_3)dx + e_{22}dy + (e_{23} - \varphi_1)dz$ 与 $d\zeta = (e_{13} - \varphi_2)dx + (e_{23} + \varphi_1)dy + e_{33}dz$ 都是全微分, 由此得到条件

$$\begin{cases} \frac{\partial e_{12}}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} = \frac{\partial e_{22}}{\partial x}, & (45.22) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial e_{22}}{\partial z} = \frac{\partial e_{23}}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}, & (45.23) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial e_{23}}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \frac{\partial e_{12}}{\partial z} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial z}; & (45.24) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial e_{13}}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = \frac{\partial e_{23}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, & (45.25) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial e_{23}}{\partial z} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = \frac{\partial e_{33}}{\partial y}, & (45.26) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial e_{33}}{\partial x} = \frac{\partial e_{13}}{\partial z} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial z}. & (45.27) \end{cases}$$

这就是应变张量的六个分量以及 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ 应当满足的九个条件。但是, 在弹性力学中通常不考虑 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, 因此, 我们还要从(45.19)~(45.27)中消去 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, 其结果应当是六个条件。

取(45.23)对 z 的偏导数, (45.26)对 y 的偏导数, 两者相减就消去了 φ_1 , 同理, 从(45.21)与(45.27)可消去 φ_2 , 从(45.19)与(45.22)可消去 φ_3 。

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 e_{11}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 e_{12}}{\partial x \partial y}, \\ \frac{\partial^2 e_{22}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 e_{33}}{\partial y^2} = 2 \frac{\partial^2 e_{23}}{\partial y \partial z}, \\ \frac{\partial^2 e_{33}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e_{11}}{\partial z^2} = 2 \frac{\partial^2 e_{31}}{\partial z \partial x}. \end{cases} \quad (45.28)$$

例如, 将(45.24)与(45.25)相减后对 x 求偏导数, 减去(45.21)对 y 的偏导数, 加上(45.19)对 z 的偏导数, 即可消去 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, 类此, 可得下式:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial e_{23}}{\partial x} + \frac{\partial e_{31}}{\partial y} - \frac{\partial e_{12}}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 e_{33}}{\partial x \partial y}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial e_{31}}{\partial y} + \frac{\partial e_{12}}{\partial z} - \frac{\partial e_{23}}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 e_{11}}{\partial y \partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial e_{12}}{\partial z} + \frac{\partial e_{23}}{\partial x} - \frac{\partial e_{31}}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 e_{22}}{\partial z \partial x}. \end{cases} \quad (45.29)$$

(45.28)和(45.29)共计六个方程, 叫作**圣维南方程**。

胁变张量的六个分量必须满足圣维南方程, 才可从此求得三个位移函数 ξ, η 和 ζ 。在这个意义上, 圣维南方程是胁变张量的**相容条件**, $d\xi, d\eta$ 与 $d\zeta$ 为全微分, 即 $\xi(\mathbf{r}), \eta(\mathbf{r})$ 和 $\zeta(\mathbf{r})$ 是连续函数, 这样, 作为连续介质弹性体, 其各部分变形前后仍完美地互相衔接, 不致在某些地方断开或重叠, 在这个意义上, 圣维南方程可说是**胁变的连续性方程**。

*§ 46. 胁强的一般分析

(1) 胁强张量

弹性体在变形时具有复原趋势, 这种趋势体现于弹性体各部分之间, 即任一平面两方总是彼此施加弹性力的作用, 这种弹性力包括拉力、压力、切力, 显然, 这种弹性力的大小与所取的平面大

小有关,是一种所谓**面力**。既然所取平面的大小是任意的,这种相互作用力的大小也就带有任意性,不适宜用来作为复原趋势的表征。为消除这种任意性,我们考察弹性体内给定平面每单位面积两方的弹性力,并把它称为**胁强**。于是就可用胁强来表征弹性体的复原趋势。胁强 \boldsymbol{p} 的法向分量叫作张胁强,切向分量叫作切胁强。

在弹性体内给定一点 O ,过点 O 可有各种不同取向的平面,作用在平面上的胁强随之而异。这样,说到胁强时不仅要指明作用在弹性体的哪一点,而且要指明在什么样取向的平面上。

现在研究胁强 \boldsymbol{p} 与平面的取向之间的关系。在给定点 O 的邻近划出一个极小的四面体 $OABC$ (图 10-11)。

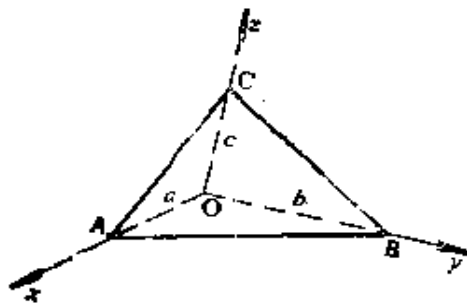


图 10-11

面 OBC 、 OCA 和 OAB 分别平行于坐标平面,其面积分别记作 S_1 、 S_2 和 S_3 。第四个面 ABC 的取向由外法向的方向余弦 α 、 β 、 γ 表示,面积记作 S 。由图容易看出, OBC 是 ABC 在 yz 面上的投影,其法线之间夹角的余弦是 α , 所以

$$S_1 = \alpha S.$$

同理可得

$$S_1 = \alpha S, S_2 = \beta S, S_3 = \gamma S. \quad (46.1)$$

我们把法向沿着 x 、 y 和 z 轴的平面上的胁强分别记作 \boldsymbol{p}_1 、 \boldsymbol{p}_2 和 \boldsymbol{p}_3 。这就是说,在法向沿 x 轴的平面的单位面积上,正 x 的一方对负 x 的一方弹性力为 \boldsymbol{p}_1 。由于平面 OBC 的外法向沿着负 x 向,四面体 $OABC$ 在面 OBC 上所受邻近部分的作用力为 $-\boldsymbol{p}_1 S_1$ 。同理,四面体在面 OCA 上和 OAB 上所受邻近部分的作用力分别是一 $\boldsymbol{p}_2 S_2$ 和 $-\boldsymbol{p}_3 S_3$ 。于是,四面体的平衡方程是

$$\boldsymbol{p} S - \boldsymbol{p}_1 S_1 - \boldsymbol{p}_2 S_2 - \boldsymbol{p}_3 S_3 = 0. \quad (46.2)$$

以(46.1)代人(46.2)即得

$$\mathbf{p} = \alpha \mathbf{p}_1 + \beta \mathbf{p}_2 + \gamma \mathbf{p}_3. \quad (46.3)$$

这样,在弹性体内任意取定的一点上,只要知道三个互相垂直的平面上的胁强 \mathbf{p}_1 、 \mathbf{p}_2 和 \mathbf{p}_3 , 就可以按照(46.3)算出任意取向的平面上的胁强。

如果将 \mathbf{p}_1 、 \mathbf{p}_2 和 \mathbf{p}_3 用分量形式表出,

$$\mathbf{p}_i = p_{1i} \mathbf{i} + p_{2i} \mathbf{j} + p_{3i} \mathbf{k} \quad (i = 1, 2, 3), \quad (46.4)$$

则(46.3)可以写成

$$\begin{cases} p_x = \alpha p_{11} + \beta p_{12} + \gamma p_{13}, \\ p_y = \alpha p_{21} + \beta p_{22} + \gamma p_{23}, \\ p_z = \alpha p_{31} + \beta p_{32} + \gamma p_{33}, \end{cases}$$

即

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}. \quad (46.5)$$

方程(46.2)是平衡方程,如果弹性体并非处于平衡,应该改用运动方程,就是把(46.2)右边的零换成 $m\mathbf{a}$, 不过,这里研究的是在弹性体中同一点各种取向的平面上的胁强之间的关系,因而四面体应取成很小很小, $m\mathbf{a}$ 的因子 m 正比于体积,比起面积为高阶小量。这样,与方程左边各项相比, $m\mathbf{a}$ 完全可以忽略,方程仍然归结为(46.2),结果仍然导致(46.4)。根据类似的理由,在平衡方程(46.2)中略去了一切体力即与体积大小有关的力例如重力。

我们不仅可以写出小四面体 OABC 所受力的平衡方程,而且可以写出力矩平衡方程。作点 $(a/3, b/3, c/3)$ 与点 $(0, b/3, c/3)$ 的连线,这连线平行于 x 轴,对这连线的力矩平衡方程是

$$p_{23} S_3 \frac{c}{3} - p_{32} S_2 \frac{b}{3} = 0. \quad (46.6)$$

但

$$S_3 \frac{c}{3} = \frac{1}{2} ab \frac{c}{3} = \frac{1}{6} abc, \quad S_2 \frac{b}{3} = \frac{1}{2} ac \frac{b}{3} = \frac{1}{6} abc,$$

于是, (31.6)化简为

$$p_{23} = p_{32}. \quad (46.7a)$$

同理可得

$$p_{12} = p_{21}, \quad p_{13} = p_{31}. \quad (46.7b)$$

方程(46.5)的九个系数 p

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} \quad (46.8)$$

叫作在弹性体内给定点的**胁强张量**。胁强张量 p_{ij} 的第二个下标 j 表明胁强所作用的面的法向, 第一个下标 i 则表明分力的指向。(46.7)指出, 在胁强张量的九个分量中只有六个是独立的。只要知道在某一点的胁强张量, 就可以按照(46.5)算出通过该点任意取向的平面上的胁强。

(2) 胁强主轴

胁强张量(46.8)构成实对称矩阵。从线性代数知道, 适当转动坐标系, 可以使实对称矩阵(46.8)对角化。使胁强张量对角化的直角坐标系统的三根坐标轴叫作**胁强主轴**。对角化了的胁强张量

$$\begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 \end{bmatrix} \quad (46.9)$$

的三个对角元素叫作**主张胁强**。

用胁强主轴作为坐标轴, 则方程(46.5)简化为

$$p_x = \alpha p_1, \quad p_y = \beta p_2, \quad p_z = \gamma p_3. \quad (46.10)$$

在弹性体内的给定点上, 胁强主轴必定就是胁变主轴。事实上, 设想在这点周围划出一个平行六面体, 其各个面的法向分别沿着胁强主轴, 从而各个面上只有张胁强。其结果是只有沿胁强主轴的张胁变而没有切变, 张胁变的方向也就是胁变主轴的方向。

(3) 胁强与胁变之间的关系

表征弹性体形变情况的胁变张量, 表征弹性体复原趋势的胁强张量, 两者之间当然有确定的关系。从图 10-2 可以看出, 对应于纯切变 $e_{12} = e_{21}$ 的切变角为 $2e_{12} = 2e_{21}$, 于是, 在比例限度内, 由(41.6)和(42.1)可得胁变张量与胁强张量的关系为:

$$\left\{ \begin{array}{l} e_{11} = +\frac{1}{Y} p_{11} - \frac{\sigma}{Y} p_{22} - \frac{\sigma}{Y} p_{33}, \\ e_{22} = -\frac{\sigma}{Y} p_{11} + \frac{1}{Y} p_{22} - \frac{\sigma}{Y} p_{33}, \\ e_{33} = -\frac{\sigma}{Y} p_{11} - \frac{\sigma}{Y} p_{22} + \frac{1}{Y} p_{33}, \\ 2e_{12} = 2e_{21} = \frac{1}{n} p_{12} = \frac{1}{n} p_{21}, \\ 2e_{13} = 2e_{31} = \frac{1}{n} p_{13} = \frac{1}{n} p_{31}, \\ 2e_{23} = 2e_{32} = \frac{1}{n} p_{23} = \frac{1}{n} p_{32}. \end{array} \right. \quad (46.11)$$

我们可以把(46.11)翻转过来, 用胁变表出胁强:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{11} = \lambda \Theta + 2ne_{11}, \\ p_{22} = \lambda \Theta + 2ne_{22}, \\ p_{33} = \lambda \Theta + 2ne_{33}, \\ p_{12} = p_{21} = 2ne_{12} = 2ne_{21}, \\ p_{13} = p_{31} = 2ne_{13} = 2ne_{31}, \\ p_{23} = p_{32} = 2ne_{23} = 2ne_{32}, \end{array} \right. \quad (46.12)$$

Θ 是体胀系数即 $e_{11} + e_{22} + e_{33}$, λ 是拉密模量 $\sigma Y / (1 + \sigma)(1 - 2\sigma)$, n 是拉密模量 $Y / 2(1 + \sigma)$ 亦即切变模量。

简略提一下各向异性的晶体, 对于不具对称性的三斜晶系, 胁强张量的六个分量与胁变张量的六个分量之间的线性关系应有 36 个系数, 它们组成六行六列的方阵。但由于方阵的对称性, 这

36 个系数只有 21 个是独立的。对于具有对称性的晶系，独立的弹性模量个数还要少一些。对于本书所讨论的各向同性晶体，独立的弹性模量只有两个。

例 § 45 例求得扭转的圆杆中的应变张量 $\epsilon_{11} = 0, \epsilon_{22} = 0, \epsilon_{33} = 0, \epsilon_{12} = \epsilon_{21} = 0, \epsilon_{13} = \epsilon_{31} = -\theta y/2l, \epsilon_{23} = \epsilon_{32} = \theta x/2l$ ，式中 θ 是杆的扭转角， l 是杆长，坐标系的原点在上端面的中心， z 轴从上端面中心指向下端面的中心。试计算扭转的圆杆中的应力张量。

解 应用(46.12)，容易求得

$$\begin{cases} p_{11} = 0, p_{22} = 0, p_{33} = 0, \\ p_{12} = p_{21} = 0, \\ p_{13} = p_{31} = -\frac{n\theta}{l} y, \\ p_{23} = p_{32} = \frac{n\theta}{l} x. \end{cases}$$

这就是说，圆杆扭转时，在横截面上和轴上都没有张应力，在横截面上没有切应力，至于横截面与横截面之间则是有切应力的。

(4) 相容条件

从应变张量的相容条件(45.28)和(45.29)可以得出应力张量的相容条件。事实上，以(46.11)代入(45.28)和(45.29)得到

$$\begin{cases} \frac{1}{Y} \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \sigma \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) p_{11} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \sigma \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) p_{22} \right. \\ \quad \left. - \sigma \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) p_{33} \right] = \frac{1}{n} \frac{\partial^2 p_{12}}{\partial x \partial y}, \\ \frac{1}{Y} \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \sigma \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) p_{22} + \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \sigma \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) p_{33} \right. \\ \quad \left. - \sigma \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) p_{11} \right] = \frac{1}{n} \frac{\partial^2 p_{23}}{\partial y \partial z}, \\ \frac{1}{Y} \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \sigma \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) p_{33} + \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \sigma \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) p_{11} \right. \\ \quad \left. - \sigma \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) p_{22} \right] = \frac{1}{n} \frac{\partial^2 p_{31}}{\partial z \partial x}, \end{cases} \quad (46.13)$$

$$\left\{ \begin{aligned}
 & \frac{1}{2n} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial p_{23}}{\partial x} + \frac{\partial p_{31}}{\partial y} - \frac{\partial p_{12}}{\partial z} \right) \\
 & \quad = \frac{1}{Y} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (-\sigma p_{11} - \sigma p_{22} + p_{33}), \\
 & \frac{1}{2n} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial p_{31}}{\partial y} + \frac{\partial p_{12}}{\partial z} - \frac{\partial p_{23}}{\partial x} \right) \\
 & \quad = \frac{1}{Y} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} (-\sigma p_{22} - \sigma p_{33} + p_{11}), \\
 & \frac{1}{2n} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial p_{12}}{\partial z} + \frac{\partial p_{23}}{\partial x} - \frac{\partial p_{31}}{\partial y} \right) \\
 & \quad = \frac{1}{Y} \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} (-\sigma p_{33} - \sigma p_{11} + p_{22}).
 \end{aligned} \right. \quad (46.14)$$

*§ 47. 弹性体静力学

现在研究弹性体的平衡问题。作为整体来看，平衡条件当然还是：外力系归结为零力系，即力系的矢量和以及力矩都为零。这与刚体的平衡条件相同。弹性体平衡问题的特殊性在于不仅要考虑整体的平衡，更要考虑内部每个小部分的平衡。本节就着重讨论弹性体内部每个小部分在内力（以胁强作为表征）和外力共同作用下的平衡问题。

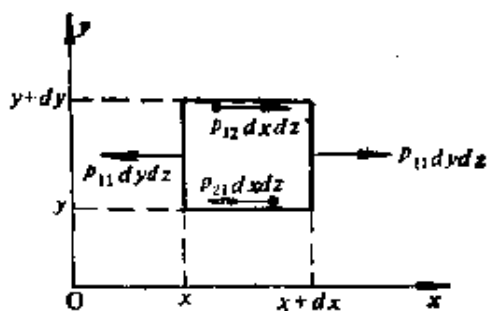


图 10-12

设想在弹性体内划出一个小的长方体，它的三棱分别平行于坐标轴，棱长分别是 dx 、 dy 和 dz 。图 10-12 描画的是它在 xy 平面上的投影，为明显计，图上 dx 与 dy 有些夸大。

先考察 x 方向的平衡。

法向沿着 x 方向的一对平面上的法向作用力分别是 $p_{11}(x +$

$dx)dydz$ 与 $-p_{11}(x)dydz$, 其合力为

$$[p_{11}(x+dx) - p_{11}(x)]dydz = \frac{\partial p_{11}}{\partial x} dx dy dz. \quad (47.1)$$

法向沿着 y 方向的一对平面上的 x 向作用力分别是 $p_{12}(y+dy)dxdz$ 与 $-p_{12}(y)dxdz$, 其合力为

$$[p_{12}(y+dy) - p_{12}(y)]dxdz = \frac{\partial p_{12}}{\partial y} dx dy dz. \quad (47.2)$$

同理, 法向沿着 z 方向的一对平面上的 x 向作用力的合力是

$$\frac{\partial p_{13}}{\partial z} dx dy dz. \quad (47.3)$$

§ 42(3) 和 § 46(1) 研究弹性体中同一点的各个胁强分量之间的关系时, 可以略去一切体力。这里研究的是弹性体中各处的胁强之间的关系。 $p_{11}(x+dx)dydz$, $-p_{11}(x)dydz$ 等等是二阶小量, 而它们的合力例如 $(\partial p_{11}/\partial x)dxdydz$ 却是三阶小量。这样, 我们不再可以忽略体力, 因为体力也是三阶小量。将弹性体所受体力密度(即每单位体积所受体力)记作 $f(x, y, z)$, 则这个小平行六面体所受体力为 $f(x, y, z)dxdydz$ 。于是, 小平行六面体的 x 方向的平衡条件要求

$$\left(\frac{\partial p_{11}}{\partial x} + \frac{\partial p_{12}}{\partial y} + \frac{\partial p_{13}}{\partial z} + f_x \right) dx dy dz = 0.$$

y 方向的平衡和 z 方向的平衡可同样加以考察。结果, 弹性体的平衡条件是

$$\begin{cases} \frac{\partial p_{11}}{\partial x} + \frac{\partial p_{12}}{\partial y} + \frac{\partial p_{13}}{\partial z} + f_x = 0, \\ \frac{\partial p_{21}}{\partial x} + \frac{\partial p_{22}}{\partial y} + \frac{\partial p_{23}}{\partial z} + f_y = 0, \\ \frac{\partial p_{31}}{\partial x} + \frac{\partial p_{32}}{\partial y} + \frac{\partial p_{33}}{\partial z} + f_z = 0. \end{cases} \quad (47.4)$$

注意(47.4)只包括三个方程, 不足以确定胁强张量的六个分

量。因此，如果用(47.4)来研究弹性体的平衡，还必须计及相容条件(46.13)和(46.14)。

以(46.12)代入平衡条件(47.4)，就把弹性体的平衡条件改用应变张量表出：

$$\begin{cases} 2n \left(\frac{\partial e_{11}}{\partial x} + \frac{\partial e_{12}}{\partial y} + \frac{\partial e_{13}}{\partial z} \right) + \lambda \frac{\partial \Theta}{\partial x} + f_x = 0, \\ 2n \left(\frac{\partial e_{21}}{\partial x} + \frac{\partial e_{22}}{\partial y} + \frac{\partial e_{23}}{\partial z} \right) + \lambda \frac{\partial \Theta}{\partial y} + f_y = 0, \\ 2n \left(\frac{\partial e_{31}}{\partial x} + \frac{\partial e_{32}}{\partial y} + \frac{\partial e_{33}}{\partial z} \right) + \lambda \frac{\partial \Theta}{\partial z} + f_z = 0. \end{cases} \quad (47.5)$$

平衡条件(47.5)也是只包括三个方程，不足以确定应变张量的六个分量。如果用(47.5)来研究弹性体的平衡，必须计及相容条件(45.28)和(45.29)。

按照定义(45.4)和(45.7)，应变张量的各个分量不过是位移函数 $\xi(\mathbf{r})$, $\eta(\mathbf{r})$ 和 $\zeta(\mathbf{r})$ 的偏导数。以(45.4)和(45.7)代入平衡条件(47.5)，就把弹性体的平衡条件改用位移函数表出：

$$\begin{cases} n \nabla^2 \xi + (n + \lambda) \frac{\partial \Theta}{\partial x} + f_x = 0, \\ n \nabla^2 \eta + (n + \lambda) \frac{\partial \Theta}{\partial y} + f_y = 0, \\ n \nabla^2 \zeta + (n + \lambda) \frac{\partial \Theta}{\partial z} + f_z = 0. \end{cases} \quad (47.6)$$

平衡条件(47.6)又叫作拉密方程。它还可以写成矢量形式

$$n \nabla^2 \mathbf{s} + (n + \lambda) \nabla \Theta + \mathbf{f} = 0. \quad (47.7)$$

在具体问题中，照理应当根据问题中的边界条件求解偏微分方程组(47.6)或方程组(47.5)或方程组(47.4)，如果求解的是方程组(47.5)或(47.6)，还必须计及相容条件。一般地说，这类问题的求解是相当费事的。有兴趣的读者可参看弹性理论方面的书籍。

§ 43 研究圆杆扭转，§ 44 研究杆的弯曲，并没有求解偏微分方程

组,而是借助于直观适当地运用近似来求得问题的解决。

例 1 § 43 借助于直观适当运用近似解出圆杆扭转问题。请验证这样求得的解是正确的。

解 § 43 求得的圆杆扭转的解所对应的应变张量见于 § 45 例: $\epsilon_{11} = 0, \epsilon_{22} = 0, \epsilon_{33} = 0, \epsilon_{12} = 0, \epsilon_{13} = -\theta y/2l, \epsilon_{23} = \theta x/2l$ 。这问题中没有外加的体力,所以 $f_x = 0, f_y = 0, f_z = 0$ 。不难验证,方程组(47.5)的每一项都是零,所以平衡条件是满足的。

至于说到相容条件(45.28)和(45.29),它们只涉及应变张量的二阶偏导数。这里的应变张量每一个分量都是坐标的线性函数,从而每个二阶偏导数都是零,所以相容条件显然是满足的。

或者,换个角度来看, § 43 求得的解所对应的应力张量见于 § 46 例: $p_{11} = 0, p_{22} = 0, p_{33} = 0, p_{12} = 0, p_{13} = -n\theta y/l, p_{23} = n\theta x/l$ 。上面已指出 $f_x = 0, f_y = 0, f_z = 0$ 。不难验证,方程组(47.4)的每一项都是零,所以平衡条件是满足的。

相容条件(46.13)和(46.14)只涉及应力张量的二阶偏导数,而这里的应力张量每一个分量都是线性函数,所以相容条件显然也是满足的。

还需要检查一下边界条件是否满足。

先看圆杆的侧面。侧面是自由表面,应力必须为零。这个条件是否满足呢?侧面的外法向的方向余弦是 $\alpha = x/r, \beta = y/r, \gamma = 0$ 。把这些方向余弦代入(46.5)算得侧面上的应力 $p_x = 0, p_y = 0, p_z = 0$ 。这样,侧面上的边界条件也是满足的。

必须指出,侧面边界条件之所以能够满足完全是由于杆的圆形横截面。如果不是圆杆,那么 § 43 求得的解所对应的应力就不满足侧面的边界条件。事实上,对于非圆形杆, § 43 关于每个截面保持为平面的直观假定与真实情况不符,实际的截面将发生翘曲!

再看圆杆的下端面。下端面是我们对圆杆施加扭转力矩的地方,下端面的外法向的方向余弦是 $\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 1$ 。把这些方向余弦代入(46.5)算得下端面上的应力 $p_x = -n\theta y/l, p_y = n\theta x/l, p_z = 0$ 。这样,在下端面对圆杆施加扭转力矩时,外力在下端面上的分布必须与应力的分布规律相同,这在实际上是难以作到的。

尽管下端面上的边界条件实际上难以满足,实验却证实 § 43 的解是正确的。这可以用所谓圣维南原理来解释。圣维南原理是说,在弹性体内,距

离外加负荷作用处稍远的地方, 胁强几乎与怎样加上负荷无关. 这样, § 43 的解虽然在下端面附近不正确, 但只要稍稍离开下端面它就是正确的了.

例 2 § 44 借助于直观适当运用近似, 解出杆的弯曲问题. 试核查这样求得的解是否正确.

解 这里要检查 § 44 关于带切变的弯曲[图 10-9(a)] 的解(44.7), 但要略去杆的自重.

在(44.7)中令 $\rho = 0$, 并利用它消去(44.2)中的曲率, 即得张胁强

$$p_{11} = \frac{mg}{l}(l-x)y. \quad (1)$$

§ 44 的解完全用不着 p_{12}, p_{21}, p_{22} 和 p_{33} , 我们不妨认为它们为零,

$$p_{12} = 0, p_{21} = 0, p_{22} = 0, p_{33} = 0. \quad (2)$$

这就是说, 我们认为杆的纵向及水平横向没有张胁强, 水平截面上没有切胁强. 这看起来似乎是合理的.

这问题中没有外加的体力, 所以 $f_x = 0, f_y = 0, f_z = 0$. 于是, 平衡条件(47.4)成为

$$\frac{\partial p_{11}}{\partial x} + \frac{\partial p_{12}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p_{21}}{\partial x} = 0, \quad 0 = 0.$$

这样,

$$\frac{\partial p_{11}}{\partial y} = -\frac{\partial p_{11}}{\partial x} = \frac{mg}{l}, \quad y, \quad \frac{\partial p_{21}}{\partial x} = 0.$$

把上式积分, 得

$$p_{11} = \frac{mg}{2l} y^2 + C_1, \quad (3)$$

C_1 是积分常数.

这样的解是否相容呢? 将(1)—(3)代入相容条件(46.13), 每一项都是零, 条件是满足的. 将(1)—(3)代入相容条件(46.14), 第一个方程不满足, 后两个方程是满足的. 因此, 解(1)—(3)是不相容的. 问题在于 $p_{12} = 0$ 是不正确的. 在较严格的弹性理论中, $p_{12} = -\partial\varphi(y, z)/\partial y$, 而 p_{21} 相应地补充一项 $\partial\varphi(y, z)/\partial z$, 至于函数 $\varphi(y, z)$ 则要根据一定条件适当解出. 但是, 这里不拟深究, 姑且认为(1)—(3)可作为杆的弯曲问题的解. 或者假定图 10-9(a) 的杆的 z 方向厚度很薄, 问题归结为二维的, 则(1)—(3)也可勉强说得过去.

还需要检查边界条件。

设杆的横截面是矩形， y 方向边长为 $2h$ 。杆的上下表面的法向的方向余弦是 $\alpha = 0, \beta = \pm 1, \nu = 0$ 。把这些方向余弦代入(46.5)算得上下表面的胁强 $p_x = \pm \left(\frac{mg}{2l} y^2 + C \right) \Big|_{y=\pm h}$ 。既然上下表面是自由表面，胁强应等于零，由此 $C = -\frac{mg}{2l} h^2$ ，而

$$p_{12} = -\frac{mg}{2l} (h^2 - y^2). \quad (4)$$

右端面的外法向的方向余弦是 $\alpha = 1, \beta = 0, \nu = 0$ 。把这些方向余弦代入(46.5)算得右端面的胁强 $p_x = \frac{mg}{l} (l-x)y \Big|_{x=l} = 0, p_y = -\frac{mg}{2l} (h^2 - y^2), p_z = 0$ 。这样，在右端面加上负荷时，负荷在右端面上的分布必须与胁强的分布规律相同，这在实际上是难以做到的。这个问题也可用圣维南原理解决。

总之，除了相容条件中的一个方程之外，§44 的解似乎已经通过了这一番检查，可是，横截面上的切胁强 p_{13} 意味着切胁变

$$e_{13} = \frac{p_{13}}{2n} = \frac{-mg}{4nl} (h^2 - y^2).$$

横截面上的切胁变 e_{13} 随着 y 的不同而不同，这说明横截面不保持为平面而发生翘曲。读者想必记得，§44 的出发点是柏努利关于横截面保持为平面的假定。这样，§44 的解法前后矛盾，从根本上成问题。

那么有没有什么办法加以补救呢？

原来，§44 的关键在于张胁变 e_{11} 是 y 的线性函数和 x 的线性函数如(1)，§44 用柏努利假定导出这一点。其实，导出这一点并不需要柏努利假定。

让我们仍然认定 $p_{22} = 0, p_{33} = 0, p_{23} = 0$ ，但放弃 $p_{13} = 0$ 。按照(46.11)， $p_{22} = 0$ 和 $p_{33} = 0$ 意味着

$$e_{22} = -\sigma e_{11}, e_{33} = -\sigma e_{11}, \Theta = (1 - 2\sigma)e_{11}, \quad (5)$$

$p_{23} = 0$ 则意味 $e_{23} = 0$ 。按照定义(30.7)， $e_{23} = 0$ 就是说

$$\frac{\partial \gamma_j}{\partial x} + \frac{\partial \sigma}{\partial y} = 0. \quad (6)$$

由于(5),平衡条件(47.6)成为

$$\begin{cases} n \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + n \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + n \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} + (n + \lambda)(1 - 2\sigma) \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0, \\ n \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + n \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} + n \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} + (n + \lambda)(1 - 2\sigma) \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} = 0, \\ n \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + n \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + n \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} + (n + \lambda)(1 - 2\sigma) \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial z} = 0. \end{cases}$$

不难验证 $(n + \lambda)(1 - 2\sigma) = n$, 上列三个方程可简化为

$$\begin{cases} 2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = 0, & (7) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} = 0, & (8) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial z} = 0. & (9) \end{cases}$$

拿(7)对 x 微分,(8)对 y 微分,(9)对 x 微分,得到

$$\begin{cases} 2 \frac{\partial^3 e_{11}}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 e_{11}}{\partial y^2} + \frac{\partial^3 e_{11}}{\partial z^2} = 0, \\ \frac{\partial^3 e_{21}}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 e_{21}}{\partial y^2} + \frac{\partial^3 e_{21}}{\partial z^2} + \frac{\partial^3 e_{11}}{\partial y^2} = 0, \\ \frac{\partial^3 e_{11}}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 e_{11}}{\partial y^2} + \frac{\partial^3 e_{11}}{\partial z^2} + \frac{\partial^3 e_{11}}{\partial z^2} = 0, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} 2 \frac{\partial^3 e_{11}}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 e_{11}}{\partial y^2} + \frac{\partial^3 e_{11}}{\partial z^2} = 0, \\ -\sigma \frac{\partial^3 e_{11}}{\partial x^2} + (1 - \sigma) \frac{\partial^3 e_{11}}{\partial y^2} - \sigma \frac{\partial^3 e_{11}}{\partial z^2} = 0, \\ -\sigma \frac{\partial^3 e_{11}}{\partial x^2} - \sigma \frac{\partial^3 e_{11}}{\partial y^2} + (1 - \sigma) \frac{\partial^3 e_{11}}{\partial z^2} = 0. \end{cases} \quad (10)$$

(10)作为 $\partial^3 e_{11}/\partial x^2, \partial^3 e_{11}/\partial y^2$ 和 $\partial^3 e_{11}/\partial z^2$ 的齐次代数方程组,其系数行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -\sigma & 1 - \sigma & -\sigma \\ -\sigma & -\sigma & 1 - \sigma \end{vmatrix} = 2(1 - \sigma)^2 + 2\sigma(1 - \sigma) = 2(1 - \sigma) \neq 0,$$

因而只有唯一的解

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{11}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \epsilon_{11}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \epsilon_{11}}{\partial z^2} = 0, \quad (11)$$

拿(8)对 x 微分, (9)对 y 微分, 两者相加,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) + 2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y \partial z} = 0.$$

由于(6), 上式即

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{11}}{\partial y \partial z} = 0. \quad (12)$$

从(11)和(12)来看, ϵ_{11} 只能是 x 的线性函数和 y 的线性函数. (另一种可能即 ϵ_{11} 是 x 的线性函数和 z 的线性函数, 不符合问题的对称性, 可不必考虑.)

*§ 48. 弹性体动力学

(1) 动力学基本方程

上节导出弹性体的平衡方程, 即弹性体处于平衡时各处的胁强之间的关系. 推导的方法是先计算作用在各个小部分上的合力, 然后令合力为零. 本节推导弹性体的动力学方程, 即弹性体各处的加速度以及胁强之间的关系. 在上节的基础上, 这个推导是很省事的, 因为我们只要令上节算出的合力(当然包括体力在内)等于各该小部分的质量与加速度的乘积就行了. 这样, 由(47.4)得到弹性体的动力学基本方程

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial p_{11}}{\partial x} + \frac{\partial p_{12}}{\partial y} + \frac{\partial p_{13}}{\partial z} + f_x, \\ \rho \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \frac{\partial p_{21}}{\partial x} + \frac{\partial p_{22}}{\partial y} + \frac{\partial p_{23}}{\partial z} + f_y, \\ \rho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \frac{\partial p_{31}}{\partial x} + \frac{\partial p_{32}}{\partial y} + \frac{\partial p_{33}}{\partial z} + f_z. \end{cases} \quad (48.1)$$

或者, 等价地, 由拉密方程(47.7)得到弹性体的动力学基本方程

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial t^2} = n \nabla^2 \mathbf{s} + (n + \lambda) \nabla \Theta + \mathbf{f}. \quad (48.2)$$

方程(48.2)的求解比起静力学方程当然更加费事。

(2) 哈密顿原理 拉格朗日方程

这里按哈密顿原理推导弹性体的动力学方程(48.2)。

先要计算拉格朗日函数密度即每单位体积的拉格朗日函数 \mathcal{L} 。容易看出,动能密度

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \rho (\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2). \quad (48.3)$$

由(41.4),

$$\begin{aligned} dU &= \frac{1}{2} p de + \frac{1}{2} e dp = \frac{1}{2} p de + \frac{1}{2} \left(\frac{p}{Y} \right) d(Ye) \\ &= p de \end{aligned}$$

仿此,张变弹性势能密度

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_1 &= \int (p_{11} de_{11} + p_{22} de_{22} + p_{33} de_{33}) \\ &= \int [\lambda(e_{11} + e_{22} + e_{33}) d(e_{11} + e_{22} + e_{33}) \\ &\quad + 2ne_{11} de_{11} + 2ne_{22} de_{22} + 2ne_{33} de_{33}] \\ &= \frac{1}{2} \lambda (e_{11} + e_{22} + e_{33})^2 + n(e_{11}^2 + e_{22}^2 + e_{33}^2) \\ &= \left(n + \frac{1}{2} \lambda \right) (e_{11}^2 + e_{22}^2 + e_{33}^2) + \lambda (e_{11} e_{22} \\ &\quad + e_{22} e_{33} + e_{33} e_{11}). \end{aligned} \quad (48.4)$$

类似地由(47.7)得切变弹性势能密度

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_2 &= \int [p_{12} d(2e_{12}) + p_{13} d(2e_{13}) + p_{23} d(2e_{23})] \\ &= \int (4ne_{12} de_{12} + 4ne_{13} de_{13} + 4ne_{23} de_{23}) \\ &= 2n(e_{12}^2 + e_{13}^2 + e_{23}^2). \end{aligned} \quad (48.5)$$

另外,还有外加体力密度 f 的势能密度 \mathcal{V}_3 。

这样,拉格朗日函数密度

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} &= \mathcal{T} - (\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \mathcal{V}_3) = \frac{1}{2} \rho (\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2) \\
 &\quad - \left(n + \frac{1}{2} \lambda \right) (e_{11}^2 + e_{22}^2 + e_{33}^2) \\
 &\quad - \lambda (e_{11}e_{22} + e_{22}e_{33} + e_{33}e_{11}) \\
 &\quad - 2n(e_{12}^2 + e_{23}^2 + e_{31}^2) - \mathcal{V}_3 \\
 &= \frac{1}{2} \rho \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t} \right)^2 \right] \\
 &\quad - \frac{1}{2} (n + \lambda) \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} \right)^2 \right] \\
 &\quad - \frac{1}{2} n [(\nabla \xi)^2 + (\nabla \eta)^2 + (\nabla \zeta)^2] \\
 &\quad - \lambda \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \\
 &\quad - n \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) - \mathcal{V}_3, \quad (48.6)
 \end{aligned}$$

于是,弹性体的哈密顿原理可写成

$$\delta \int L dt = \delta \iiint \mathcal{L} dx dy dz dt = 0, \quad (48.7)$$

这里,自变数有四个即 x, y, z, t , 函数则有三个即 ξ, η, ζ . 就函数 $\xi(x, y, z, t)$ 而言,相应的拉格朗日方程是

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)} \\
 - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} \right)} = 0,
 \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}
& -\frac{\partial \mathcal{V}_3}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{\partial \xi}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[(n + \lambda) \frac{\partial \xi}{\partial x} + n \frac{\partial \xi}{\partial x} \right. \\
& \quad \left. + \lambda \frac{\partial \eta}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left(n \frac{\partial \xi}{\partial y} + n \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \\
& \quad + \frac{\partial}{\partial z} \left(n \frac{\partial \xi}{\partial z} + n \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) = 0,
\end{aligned}$$

亦即

$$\begin{aligned}
F_x - \rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + n \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right) \\
+ (n + \lambda) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) = 0.
\end{aligned}$$

这正是(48.2)中的 x 分量。同理，就函数 $\eta(x, y, z, t)$ 和 $\zeta(x, y, z, t)$ 而言，相应的拉格朗日方程分别正是(48.2)中的 y 分量和 z 分量。

(3) 弹性体中的波动

这里着重研究一下没有外加体力的情况。这时，弹性体的动力学方程(48.2)成为

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial t^2} = n \nabla^2 \mathbf{s} + (n + \lambda) \nabla \Theta. \quad (48.8)$$

取(48.8)各项的散度，即得

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\nabla \cdot \mathbf{s}) = n \nabla^2 (\nabla \cdot \mathbf{s}) + (n + \lambda) \nabla^2 \Theta.$$

由于 $\nabla \cdot \mathbf{s} = \Theta$ ，上式亦即

$$\rho \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} = (2n + \lambda) \nabla^2 \Theta. \quad (48.9)$$

这正是波动方程，波速

$$v = \sqrt{\frac{2n + \lambda}{\rho}} = \sqrt{\frac{(1 - \sigma)}{\rho(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)}} Y. \quad (48.10)$$

这里所说的波动是体胀系数 Θ 的传播过程，所以称为**体胀波**。体胀系数的变化即密度的变化，这种波动是纵波。

取(48.8)各项的旋度，即得

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\nabla \times \mathbf{s}) = n \nabla^2 (\nabla \times \mathbf{s}) + (n + \lambda) \nabla \times \nabla \Theta.$$

由于 $\nabla \times \nabla \Theta = 0$ ，上式亦即

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \boldsymbol{\varphi} = n \nabla^2 \boldsymbol{\varphi}, \quad (48.11)$$

其中 $\boldsymbol{\varphi} = \nabla \times \mathbf{s}$ 。这也是波动方程，波速

$$u = \sqrt{\frac{n}{\rho}} = \sqrt{\frac{1}{2\rho(1+\sigma)}} Y. \quad (48.12)$$

这里所说的波动是 $\nabla \times \mathbf{s}$ 的传播过程，所以称为**扭曲波**。它是一种横波。

第十一章 流体运动学

§ 49. 流体运动学的特点

弹性体有保持一定形状和大小的趋势。施加外力使弹性体变形,弹性体就加以抵抗,这抵抗体现于弹性体中的胁强。随着形变的增大,弹性体的抵抗越来越强,使得弹性体的形变总是有限度的,不会无限增长。

流体并没有一定的形状,对切变并不抵抗,所以切变可以持续增长,这就是流动。流体既然具有这样的特点,流体运动学即关于流体运动的描述当然要适应这个特点。

(1) 着重研究速度场

在 § 45 中,用位移函数 $s(\mathbf{r})$ 来描写弹性体偏离其本来形状的形变,这里的连续变数 \mathbf{r} 是弹性体中各个质点本来位置的径矢, s 则是各个质点离开其本来位置的位移。对于流体,这种描写是用不上的。流体根本没有什么“本来形状”,也就说不上什么“偏离‘本来形状’的形变”,上述 \mathbf{r} 和 s 完全没有意义。

流体可以流动,这就需要研究如何描写流体的流动情况。人们很自然想到用流体中各个质点的速度 $\mathbf{v}(\mathbf{r}_0, t)$ 来描写流动,这里各个质点之间以它们在某个所谓“初始”时刻的径矢 \mathbf{r}_0 相区分。这是流体运动学中的**拉格朗日描写方式**。

但是,追踪流动着的流体中的这个质点或那个质点是很麻烦的。实际上,通常也并不很关心流体中这个质点或那个质点的“命运”,人们关心的往往是空间中各个地点的流速分布即**速度场**

$v(r, t)$, 这里 r 是空间中各个地点的径矢。这就是流体运动学中的欧勒描写方式。

如果速度场不随时间而变, 这种流动就称为**稳恒流动**(或**定常流动**)。

(2) 迹线与流线

为描写流体的流动情况, 还可以采用描画图线的方法。

在拉格朗日方式中, 描画的是流体中各个质点的运动轨迹。这叫作**迹线**。迹线的微分方程是

$$\frac{dr}{dt} = v(r_0, t). \quad (49.1)$$

按欧勒方式描画的曲线上, 每一点的切线都是沿着该处的流速。这叫作**流线**。流线的微分方程是 $dr // v(r, t)$, 即

$$\frac{dx}{v_x(x, y, z, t)} = \frac{dy}{v_y(x, y, z, t)} = \frac{dz}{v_z(x, y, z, t)}. \quad (49.2)$$

某一时刻的流线图描画出该时刻的流动情况, 可说是该时刻的速度场的“照片”。前后相继各时刻的流线图则给出速度场的“电影”。

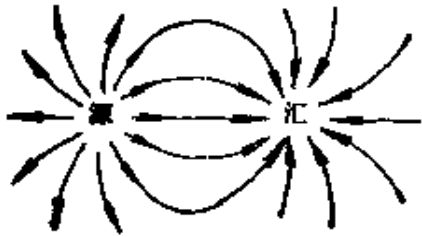


图 11-1

在每一时刻的速度场中, 除源点和汇点外, 每一点的流速方向是唯一的, 因而流线不会相交。至于说到源点和汇点, 流线从源点向各方发散, 又从各方朝汇点会聚(图 11-1), 也并不相交。

例 1 已知流体的速度场 $v = cyi$, 即 $v_x = cy, v_y = 0, v_z = 0$, 试画出这速度场中的流线。

解 按照(49.2), 流线的微分方程是

$$\frac{dx}{cy} = \frac{dy}{0} = \frac{dz}{0}.$$

这是两个方程:

$$cydy = 0, \quad cydz = 0.$$

由此解得流线

$$y = \text{常数}, \quad z = \text{常数}.$$

这是平行于 x 轴的直线族(图 11-2). 其实, 本例的 $v = cyi$ 只有 x 分量, 完全可以不经计算就直接画出图 11-2 的流线. [图上小转轮的作用详见后 §50(2)]

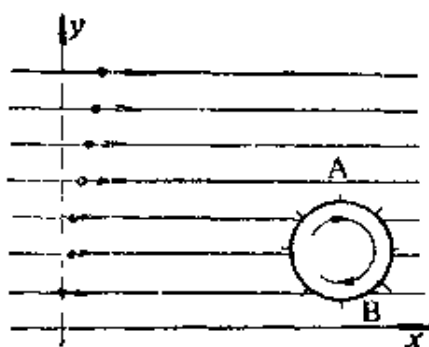


图 11-2

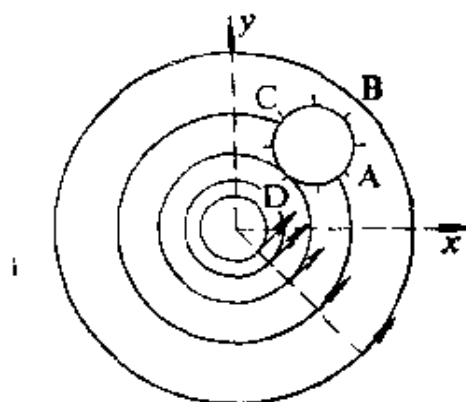


图 11-3

例 2 已知流体的速度场 $v = -icy/(x^2 + y^2) + jcx/(x^2 + y^2)$, 试画出这速度场中的流线.

解 按照(49.2), 流线的微分方程是

$$\frac{dx}{\frac{cy}{x^2 + y^2}} = \frac{dy}{\frac{cx}{x^2 + y^2}} = \frac{dz}{0}.$$

这是两个方程:

$$\frac{cx dx}{x^2 + y^2} = -\frac{cy dy}{x^2 + y^2}, \quad dz = 0.$$

由此解得

$$x^2 + y^2 = \text{常数}, \quad z = \text{常数}.$$

这是垂直于 z 轴的平面上的同心圆族(图 11-3).

任意划一闭合曲线, 通过闭合曲线上每一点作出流线(图 11-4). 这些流线形成管状曲面, 叫作**流管**. 流线不相交, 即流体中质点的流速不会与流管的“壁”相交, 换句话说, 流体的质点不可能穿

过流管的“壁”，管内的质点始终在管内，管外的质点始终在管外，这样，流管的作用竟然跟实体的管子一样！

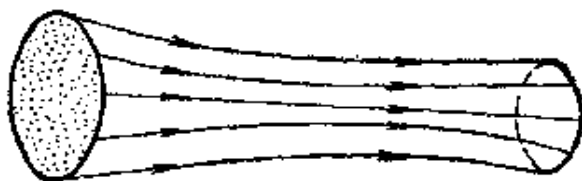


图 11-4

单位时间通过流管某一横截面的流体的质量（也有采用体积的）叫作该处的**流量**。对于细的流管，可以认为横截面上的流速是一样的，因而单位时间流过该截面的流体的体积等于流速 v 与横截面积 S 的乘积 vS 。于是，单位时间流过该截面的流体的质量即流量为

$$Q = \rho v S, \quad (49.3)$$

这里的 ρ 是流体的密度。

对于稳恒流动，流线图不随时间而变。流体中的各个质点分别沿着一条不随时间而变的流线移动，因而流线也就是质点的轨迹。这样，稳恒流动的流线与迹线重合。

截取一段流管。在稳恒流动的情况下，这段流管中的流体质量必定是不变的。这就是说，从上游进入这段流管的流量 Q_1 ，必定等于离开这段流管到下游去的流量 Q_2 ，即

$$\rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2, \quad (49.4)$$

下标 1 和 2 分别对应于这段流管的两端。这叫作**连续性方程**。其实，确切地说，应叫作稳恒流动流管中的连续性方程。至于一般情况下的连续性方程见(50.26)或(50.27)。

(3) 当地变化率与实体变化率

加速度是一个重要的力学量。现在研究加速度的计算。

在拉格朗日方式中，流体的运动是用各个质点的速度 $v(r_0, t)$

来描写的，各个质点以它们的“初始”径矢相区分。加速度的计算很容易，它是 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}_0, t)$ 的时间变化率，

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}_0, t) = \frac{d\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}_0, t)}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}_0, t)}{\partial t}. \quad (49.5)$$

在欧拉方式中，流体的运动是用速度场 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}, t)$ 来描写的，事情要复杂一些。如果只注意速度场 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}, t)$ 对时间的直接依赖关系，则速度场的时间变化率是

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}, t + \Delta t) - \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}, t)}{\Delta t}. \quad (49.6)$$

这里比较的是在两个无限靠近的瞬时 t 和 $t + \Delta t$ 流经同一地点 \boldsymbol{r} 的流速。不同时刻流经同一地点的显然不会是同一个质点，不同质点的速度的比较当然不是加速度，因为加速度是同一质点的速度的时间变化率。同一质点在不同的瞬时显然经过不同的地点 $\boldsymbol{r}(t)$ ，因此，对同一质点而言， $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}, t)$ 应理解为 $\boldsymbol{v}[\boldsymbol{r}(t), t]$ ，即 \boldsymbol{v} 不仅直接依赖于 t ，而且肯定还通过 $\boldsymbol{r}(t)$ 的变化而依赖于 t 。于是，加速度

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \dot{z} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla) v_x, \\ \frac{dv_y}{dt} = \frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \dot{z} = \frac{\partial v_y}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla) v_y, \\ \frac{dv_z}{dt} = \frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \dot{z} = \frac{\partial v_z}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla) v_z. \end{cases} \quad (49.7)$$

这三个式子可以合并为矢量式

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}[\boldsymbol{r}(t), t]}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{v}. \quad (49.8)$$

这样，速度 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}, t)$ 有两种时间变化率。(49.6)的 $\partial \boldsymbol{v} / \partial t$ 是速度场 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}, t)$ 中一定地点的流速的时间变化率，我们把这叫作速度的**当地变化率**。加速度(49.8)则是一定质点的速度 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}, t)$ 的时间变化率，我们把这叫作速度的**实体变化率**。两者的差 $(\boldsymbol{v} \cdot$

$\nabla \cdot \boldsymbol{v}$ 则是由于质点的位置漂移(运流)而导致的变化率, 叫作漂移变化率(或运流变化率)。

试以稳恒流动为例。稳恒流动的速度场 \boldsymbol{v} 不随时间而变, 当地变化率 $\partial \boldsymbol{v} / \partial t = 0$, 但是, 作为实体变化率的加速度却未必是零。参看图 11-4 的流线, 在稳恒流动的情况下, 流线也就是迹线, 各个质点分别沿着一定的流线运动。图中的流线是曲线, 这表明质点的速度指向随时间而变。从连续性方程(49.4)又知道, 质点流经流管较窄处 (S 较小) 的流速较大, 而流经流管较宽处的流速较小即质点的速度大, 既然质点的速度指向和大小都处于变化之中, 它的加速度不为零。

当地变化率与实体变化率的区别并非速度所特有的, 对于任一力学量, 实体变化率总是等于当地变化率与漂移变化率之和,

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla. \quad (49.9)$$

*§ 50. 速度场的分析

(1) 速度场的一般分析

仿照 § 45 对弹性体中应变的分析, 这里对流体的速度场也进行一般的分析。

在速度场中取定某个 O 点, 其径矢为 \boldsymbol{r} 。我们要考察点 O 邻近的流速分布。为此, 在点 O 附近取点 P 作为代表加以考察, 点 P 的矢径为 $\boldsymbol{r} + d\boldsymbol{r}$ 。因为点 P 在 O 的邻近, 可把流速函数 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r} + d\boldsymbol{r})$ 展为泰勒级数, 并只保留一阶项而把二阶及二阶以上各项略去, 这可用分量形式写为:

$$\begin{cases} v_x(\boldsymbol{r} + d\boldsymbol{r}) = v_x(\boldsymbol{r}) + \left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)_0 dx + \left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_0 dy + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)_0 dz, \\ v_y(\boldsymbol{r} + d\boldsymbol{r}) = v_y(\boldsymbol{r}) + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)_0 dx + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)_0 dy + \left(\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)_0 dz, \end{cases}$$

$$v_x(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) = v_x(\mathbf{r}) + \left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)_0 dx + \left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_0 dy + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)_0 dz, \quad (50.1)$$

记号 $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_0$ 表示偏导数取其在O点的值。这三式右边第一项描写的是这个小范围中流体的整体平移。把这项移到左边，方程(50.1)成为

$$\begin{cases} dv_x = \left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)_0 dx + \left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_0 dy + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)_0 dz, \\ dv_y = \left(\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)_0 dx + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)_0 dy + \left(\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)_0 dz, \\ dv_z = \left(\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)_0 dx + \left(\frac{\partial v_z}{\partial y}\right)_0 dy + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)_0 dz. \end{cases} \quad (50.2)$$

先看(50.2)的对角项，即右边“对角线”上的那几项，例如 $(\partial v_x/\partial x)_0 dx$ 。如果把 Δx 当作沿 x 方向的一小段流体柱的长度，则 $\Delta v_x = v_x(x + \Delta x) - v_x(x)$ 是这一段流体柱的伸长速率，从而

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)_0 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v_x(x + \Delta x) - v_x(x)}{\Delta x}$$

是沿 x 方向的张胁变速率 e_{11} ，

$$e_{11} = \left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)_0. \quad (50.3)$$

同理， $(\partial v_y/\partial y)_0$ 和 $(\partial v_z/\partial z)_0$ 分别是沿 y 方向和 z 方向的张胁变速率 e_{22} 和 e_{33} ，

$$e_{22} = \left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)_0, \quad e_{33} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)_0. \quad (50.3')$$

再看(50.2)的非对角项，例如 $(\partial v_x/\partial y)_0 dy$ 。如果把 Δy 当作垂直于 y 方向的流体薄层的厚度，则 $\Delta v_x = v_x(y + \Delta y) - v_x(y)$ 是这薄层两面的 x 方向速度之差，从而

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_0 = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{v_x(y + \Delta y) - v_x(y)}{\Delta y}$$

是切应变速率。

正如 § 45 图 10-10 所示,切变的某些组合中可能有转动。为了把转动分离出来,应把(58.2)的所有的项分别拆为“对称部分”与“反对称部分”,即

$$\begin{cases} dv_x = dv_x^{(S)} + dv_x^{(R)}, \\ dv_y = dv_y^{(S)} + dv_y^{(R)}, \\ dv_z = dv_z^{(S)} + dv_z^{(R)}, \end{cases} \quad (50.4)$$

其中

$$\begin{cases} dv_x^{(S)} = e_{11}dx + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right)_0 dy + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)_0 dz, \\ dv_y^{(S)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_0 dx + e_{22}dy \\ \quad + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right)_0 dz, \\ dv_z^{(S)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\right)_0 dx + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)_0 dy + e_{33}dz, \\ dv_x^{(R)} = \quad \quad \quad + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x}\right)_0 dy \\ \quad \quad \quad + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)_0 dz, \\ dv_y^{(R)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_0 dx + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial y}\right)_0 dz, \\ dv_z^{(R)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z}\right)_0 dx + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)_0 dy. \end{cases}$$

为了书写简洁,引入记号

$$\begin{cases} e_{12} = e_{21} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right)_0, \\ e_{13} = e_{31} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)_0, \end{cases} \quad (50.5)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \epsilon_{23} = \epsilon_{32} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right)_0, \\ \omega_x &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right)_0 = \frac{1}{2} (\nabla \times v)_x, \\ \omega_y &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right)_0 = \frac{1}{2} (\nabla \times v)_y, \\ \omega_z &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_0 = \frac{1}{2} (\nabla \times v)_z, \end{aligned} \right. \quad (50.6)$$

就可把“对称部分”与“反对称部分”分别表为

$$\left\{ \begin{aligned} dv_x^{(S)} &= \epsilon_{11}dx + \epsilon_{12}dy + \epsilon_{13}dz, \\ dv_y^{(S)} &= \epsilon_{21}dx + \epsilon_{22}dy + \epsilon_{23}dz, \\ dv_z^{(S)} &= \epsilon_{31}dx + \epsilon_{32}dy + \epsilon_{33}dz, \end{aligned} \right. \quad (50.7)$$

$$\left\{ \begin{aligned} dv_x^{(R)} &= -\omega_x dy + \omega_y dz, \\ dv_y^{(R)} &= +\omega_x dx - \omega_z dz, \\ dv_z^{(R)} &= -\omega_y dx + \omega_z dy. \end{aligned} \right. \quad (50.8)$$

方程(50.8)其实就是

$$dv^{(R)} = \omega \times dr. \quad (50.9)$$

这显然是整体的转动,转动的角速度 ω 由(50.6)给出,即

$$\omega = (1/2)\nabla \times v.$$

方程(50.5)的 ϵ_{12} 等显然是纯切变速率。

这样,把(50.4),(50.7)以及(50.8)综合起来看,在速度场中某个 O 点邻近的流速可归结为:随 O 点平移的速度,绕 O 点转动的速度,与张协变的变化相应的速度,以及与纯切变的变化相应的速度。

方程(50.6)给出了速度场 v 的旋度 $\nabla \times v$ 的意义,它是点 O 邻近部分的转动角速度 ω 的两倍。至于 v 的散度 $\nabla \cdot v$ 也有鲜明的意义,事实上,由(50.3)知

$$\nabla \cdot v = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33} = \theta, \quad (50.10)$$

式中 Θ 是(45.18)的体胀系数,

$$\Theta = e_{11} + e_{22} + e_{33}$$

这就是说,速度场 v 的散度 $\nabla \cdot v$ 正是体胀速率,

不可压缩流体的体胀系数恒为零,体胀速率当然也为零。于是,(50.10)给出

$$\nabla \cdot v = 0 \quad (\text{不可压缩流体}), \quad (50.11)$$

例1 试分析 §49 例1 的速度场 $v = cyi$,

解 按照(50.3),(50.5)和(50.6)计算张胁变速率、纯切变速率和转动角速度,

$$e_{11} = \frac{\partial(cy)}{\partial x} = 0, \quad e_{22} = 0, \quad e_{33} = 0; \quad (1)$$

$$e_{12} = e_{21} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial(cy)}{\partial y} + 0 \right] = \frac{1}{2} c, \quad e_{13} = e_{31} = 0, \quad e_{23} = e_{32} = 0; \quad (2)$$

$$\omega_x = 0, \quad \omega_y = 0, \quad \omega_z = -\frac{1}{2} c. \quad (3)$$

于是,

$$\begin{cases} dv_x^{(R)} = \frac{1}{2} c dy, \\ dv_y^{(R)} = \frac{1}{2} c dx, \\ dv_z^{(R)} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} dv_x^{(R)} = \frac{1}{2} c dy, \\ dv_y^{(R)} = -\frac{1}{2} c dx, \\ dv_z^{(R)} = 0. \end{cases} \quad (4)$$

在本例中,流体中的张胁变速率 e_{11}, e_{22}, e_{33} 为零,体胀速率 Θ 当然随着为零;垂直于 z 轴的平面上有纯切变速率 $e_{12} = c/2$, 垂直于 x 轴或 y 轴平面上的纯切变速率 e_{13}, e_{23} 等为零;流动包含转动成分 ω_x , 转动轴平行于 z 轴,转向与 z 轴的负向按右手螺旋相联系,角速度大小为 $c/2$ 。

本例的流线见于图 11-2, 是平行直线族。单从流线族来看,很容易误解为没有转动,实际上是有转动的,如(3)所示。

例2 试分析 §49 例2 的速度场 $v = -icy/(x^2 + y^2) + jcx/(x^2 + y^2)$ 。

解 按照(50.3),(50.5)和(50.6)计算张胁变速率、纯切变速率和转动角速度,

$$e_{11} = \frac{2cxy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad e_{22} = \frac{-2cxy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad e_{33} = 0; \quad (1)$$

$$\dot{\epsilon}_{12} = \dot{\epsilon}_{21} = c \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \dot{\epsilon}_{13} = \dot{\epsilon}_{31} = 0, \quad \dot{\epsilon}_{23} = \dot{\epsilon}_{32} = 0; \quad (2)$$

$$\omega_x = 0, \omega_y = 0, \omega_z = \frac{1}{2} \left[c \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} - c \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \right] = 0. \quad (3)$$

于是,

$$\begin{cases} dv_x^{(x)} = \frac{2cxydx + c(y^2 - x^2)dy}{(x^2 + y^2)^2}, \\ dv_y^{(x)} = \frac{c(y^2 - x^2)dx - 2cxydy}{(x^2 + y^2)^2}, \\ dv_z^{(x)} = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} dv_x^{(R)} = 0, \\ dv_y^{(R)} = 0, \\ dv_z^{(R)} = 0. \end{cases} \quad (4)$$

注意,以上计算只适用于原点以外的地方. 这是因为,在原点 ($x = 0, y = 0$), $v_x = \infty, v_y = \infty$.

这样,在本例中,在原点以外的地方,沿 x 方向和 y 方向各有张胁变速率,两者符号相反;体胀速率 $\dot{\epsilon}_{11} + \dot{\epsilon}_{22} + \dot{\epsilon}_{33} = 0$;垂直于 x 轴的平面上有纯切变速率 $c(y^2 - x^2)/(x^2 + y^2)^2$,垂直于 x 轴或 y 轴的平面上纯切变速率为零;而且流动不包含转动成分.

本例的流线见于图 11-3,是同心圆族,单从流线族来看,很容易误解为处处包含转动成分.

(2) 有旋流动与无旋流动

流体在某处的流动,如果不含转动成分,即 $\omega = (1/2)\nabla \times v = 0$,我们就说流体在那里作无旋流动;如果含有转动成分, $\omega \neq 0$,则说流体在那里作有旋流动.

流动在某处是否有旋并不在于该处流线是否形成圈状.事实上,§ 49 和本节例 1 的流动是处处有旋的 ($\omega_x = -c/2$),而流线却是平行直线族(图 11-2),并不形成圈状. § 49 和本节例 2 的流动除原点外处处无旋,而流线却是同心圆族(图 11-3).

图 11-2 的流线是平行直线族,在图上看不出什么旋涡,怎么会是有旋流动呢? 这个问题不难回答. 本节例 1 分析过,这个速度场中的流动处处都包含平移和转动[见(4)的 $dv^{(R)}$]以及纯切变随时间的变化[见(4)的 $dv^{(x)}$]. 图 11-2 描画的是这三种运动的

叠加的结果，以致转动未能直接显示出来。为了直接显示某处的转动，应设法撇开该处的平移和纯切变随时间的变化，这一点利用小转轮可以作到。在图 11-2 中画有一个小转轮。流体推动小转轮的叶片向右。由于各处流速不等以及叶片与流速的角度不同，各个叶片所受的推动也不相等。图中 A 处的叶片所受推动最强，B 处的叶片所受推动最弱，小转轮就作顺时针的转动。这显示出流动含有转动成分。

图 11-3 的流线是同心圆族，但如本节例 2 所分析的，在 origin 以外却是处处无旋的。这也可借助于小转轮来帮助理解。在图 11-3 的 A 处和 C 处，流速平行于叶片，没有推动小转轮转动的作用。在 ABC 段上，流体推动叶片，使转轮有逆时针转动的趋势；在 ADC 段上，流体推动叶片，使转轮有顺时针转动的趋势。ABC 段较长而流速较小，ADC 段较短而流速较大，两种趋势平衡，故转轮不转动。这样，图 11-3 的流动除 origin 外处处无旋就不难理解了。

利用小转轮所作的定性说明可以改用较精密的语言表达出来。这要用到环流量。

流速 v 沿闭合曲线 C 的曲线积分

$$\Gamma = \oint_C v \cdot dr \quad (50.12)$$

叫作该闭合曲线上的环流量。按照矢量分析中的斯托克斯定理，环流量(50.12)又可表为 C 所围曲面 S 上的曲面积分

$$\Gamma = \oint_C v \cdot dr = \iint_S \nabla \times v \cdot dS.$$

将(50.6)代入上式，

$$\Gamma = \iint_S 2\omega \cdot dS. \quad (50.13)$$

如着重研究某个小曲面 S，则小曲面可当作小平面，而且 ω 可当作在 S 上处处相同。于是，(50.13)成为

$$\Gamma = 2\omega \cdot \iint_S dS = 2\omega \cdot S, \quad (50.14)$$

式中矢量 \mathbf{S} 沿着小曲面的法向, 其大小等于小曲面的面积, (50.14) 可以改写成

$$\omega_z = \frac{1}{2} \frac{\Gamma}{S}. \quad (50.15)$$

这就是说, 小的闭合曲线上的环流量 Γ 除以该闭合曲线所围小平面的面积 S , 再除以 2, 就等于流体绕该平面的法线转动的角速度. 因此, 流动是无旋的还是无旋的就可根据环流量是否为零来判断. 小转轮不过是环流量的一个形象化的定性描述罢了.

例 3 例 2 关于速度场 $\mathbf{v} = -icy/(x^2 + y^2) + icx/(x^2 + y^2)$ 的计算不适用于原点. 试判断该速度场在原点是否有旋. 如果有旋, 试求出角速度.

解 运用环流量来作判断.

以原点为心作半径 σ 很小的圆周 C_σ . 我们要计算 C_σ 上的环流量 Γ_σ . 在圆周上任取一点 (x, y) , 则 x 和 y 必满足 $x^2 + y^2 = \sigma^2$. 通过这一点的矢径是 $\mathbf{r} = ix + jy$, 通过这一点的法向单位矢量

$$\mathbf{n} = \frac{1}{r} \mathbf{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{r} = \frac{1}{\sigma} \mathbf{r} = i \frac{x}{\sigma} + j \frac{y}{\sigma}. \quad (1)$$

通过这一点的切向单位矢量 \mathbf{t} 垂直于 \mathbf{n} , 因此是

$$\mathbf{t} = -i \frac{y}{\sigma} + j \frac{x}{\sigma}. \quad (2)$$

于是, 圆周 C_σ 上的环流量

$$\begin{aligned} \Gamma_\sigma &= \oint_{C_\sigma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{C_\sigma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} dr = \oint_{C_\sigma} \left(-i \frac{cy}{\sigma^2} + j \frac{cx}{\sigma^2} \right) \\ &\quad \cdot \left(-i \frac{y}{\sigma} + j \frac{x}{\sigma} \right) dr \\ &= \oint_{C_\sigma} \left(\frac{cy^2}{\sigma^3} + \frac{cx^2}{\sigma^3} \right) dr \\ &= \oint_{C_\sigma} \frac{c}{\sigma} dr = \frac{c}{\sigma} 2\pi\sigma = 2\pi c. \end{aligned}$$

环流量 $\Gamma_\sigma \neq 0$, 这说明速度场在原点是有旋的.

应用(50.15), 在原点, 绕 z 轴的转动角速度

$$\omega_z = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{2} \frac{\Gamma_\sigma}{S_\sigma} = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{2} \frac{2\pi c}{\pi\sigma^2} = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{c}{\sigma^2} = \infty.$$

这样,例 2 的速度场是某种理想化了的旋涡.

对于有旋流动,可以作出一些曲线,使它处处与当地的 ω 相切,如图 11-5 和 11-6 的虚线,这些曲线叫作**涡索**.

计算 ω 的散度,

$$\nabla \cdot \omega = \nabla \cdot \left(\frac{1}{2} \nabla \times v \right) = \frac{1}{2} \nabla \cdot \nabla \times v.$$

不难验证,不管 v 是怎样的矢量场, $\nabla \cdot \nabla \times v$ 恒为零,从而 $\nabla \cdot \omega$ 恒为零. 这就是说,涡索没有源或汇,它或则形成首尾相接的环,如强烈鼓风所形成的烟环(图 11-5),或则终止于流体的边界,如划桨时在水面上所形成的两种相反的旋涡(图 11-6).

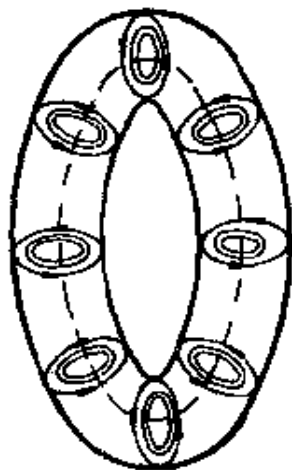


图 11-5

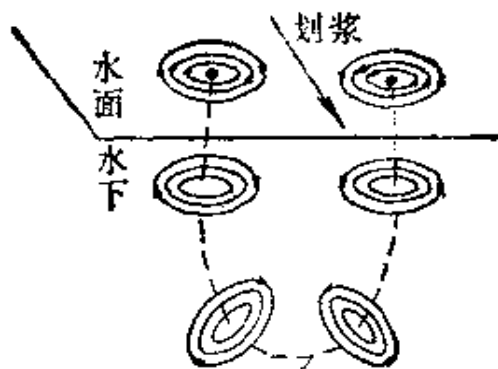


图 11-6

再说无旋流动. 无旋流动满足 $\nabla \times v = 0$. 从多元函数微积分与曲线积分理论知道,条件 $\nabla \times v = 0$ 保证

$$v \cdot dr = v_x dx + v_y dy + v_z dz \quad (50.16)$$

为全微分,亦即保证曲线积分

$$\int_{r_0}^r v \cdot dr = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} v_x dx + v_y dy + v_z dz \quad (50.17)$$

只取决于起点和终点,而与中间路径无关. 取定某个始点 (x_0, y_0, z_0) , 则曲线积分(50.17)只取决于终点 (x, y, z) , 把曲线积分记作 $\varphi(x, y, z)$,

$$\varphi(x, y, z) = \int_{r_0}^r \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} v_x dx + v_y dy + v_z dz, \quad (50.18)$$

则全微分(50.16)变为

$$d\varphi = \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r} = v_x dx + v_y dy + v_z dz, \quad (50.19)$$

标量函数 $\varphi(x, y, z)$ 叫作无旋流动的速度势。(50.18) 就成为从
无旋速度场 \boldsymbol{v} 计算其速度势 φ 的公式。以

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz$$

代入(50.19)的左边,然后两边比较,即得

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (50.20a)$$

或者合并为一个矢量式,

$$\boldsymbol{v} = \nabla \varphi. \quad (50.20b)$$

这是从无旋速度场的速度势 φ 计算速度场 \boldsymbol{v} 的公式。这样,对于
无旋流动,速度场 \boldsymbol{v} 和速度势 φ 两者只知其一,就可算出另一个,
所以两者都可以用来描写流体的无旋流动。但是, \boldsymbol{v} 是矢量函
数, φ 是标量函数,用标量函数比用矢量函数当然要方便得多。

特别说说不可压缩流体的无旋流动。按照(50.11),不可压缩
流体的速度场 \boldsymbol{v} 满足 $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$; 而无旋流动的速度场 \boldsymbol{v} 可用速
度势 φ 表出。于是, $\nabla \cdot \nabla \varphi = 0$, 这就是拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (50.21)$$

这样,只要知道了流体边界上的物理条件,不可压缩流体在该区域
中的无旋流动就可作为拉普拉斯方程 (50.21) 的边界值问题来求
解。关于拉普拉斯方程的边界值问题的求解,可参看数学物理偏微
分方程方面的书籍。

再说一说不可压缩流体的二维无旋流动。所谓二维流动其实
还是三维的,但是流速 \boldsymbol{v} 只在 xy 平面上变化,而在垂直于 xy 平
面的方向上并不变化,所以只要研究 xy 平面上的流速分布就够了。

不可压缩流体的二维无旋流动的速度势 $\varphi(x, y)$ 满足二维的拉普拉斯方程, 按照复变函数论, 它必可作为复变数 $z = x + iy$ 的某个解析函数 $f(z)$ 的实部或虚部,

$$f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y). \quad (50.22)$$

速度势 φ 的共轭调和函数 $\psi(x, y)$ 叫作流函数. 由解析函数的科希-里曼方程 $\partial\varphi/\partial x = \partial\psi/\partial y$, $\partial\varphi/\partial y = -\partial\psi/\partial x$ 容易得出

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} \frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \frac{\partial\psi}{\partial y} = 0,$$

即 $\nabla\varphi$ 与 $\nabla\psi$ 处处互相垂直. $\nabla\psi$ 沿着曲线 “ $\psi(x, y) = \text{常数}$ ” 的

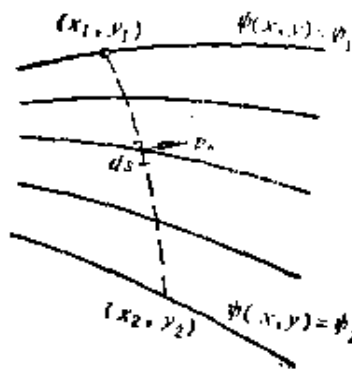


图 11-7

法向, 而 $\nabla\varphi$ 就是 v , 可见曲线 “ $\psi(x, y) = \text{常数}$ ” 处处与 v 相切. 换句话说, “ $\psi(x, y) = \text{常数}$ ” 代表流线.

流线 “ $\psi(x, y) = \text{常数}$ ” 里的常数本身也有鲜明的意义. 参看图 11-7. 设通过点 (x_1, y_1) 的流线是 “ $\psi(x, y) = \psi_1$ ”, 通过点 (x_2, y_2) 的流线是 “ $\psi(x, y) = \psi_2$ ”. 我们要计算这两条流线之间的流

量(以体积计)

$$Q = \int_A^B v_n ds,$$

积分沿着任一路径进行, 例如沿着图中的虚线进行. 虚线的切向单位矢量 $t = i dx/ds + j dy/ds$, 从而垂直于它的法向单位矢量 $n = i dy/ds - j dx/ds$. 于是,

$$v_n = v \cdot n = (\nabla\varphi) \cdot n = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \frac{dy}{ds} - \frac{\partial\varphi}{\partial y} \frac{dx}{ds}.$$

利用科希-里曼方程 $\partial\varphi/\partial x = \partial\psi/\partial y$, $\partial\varphi/\partial y = -\partial\psi/\partial x$, 可把上式改写为

$$v_n = \frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{dx}{ds}.$$

这就可以算出流量

$$\begin{aligned}
 Q &= \int_A^B \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{dx}{ds} \right) ds = \int_A^B \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy \\
 &= \int_A^B d\phi = \phi|_B - \phi|_A = \phi_2 - \phi_1. \quad (50.23)
 \end{aligned}$$

这样,在 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) 两点之间的流量等于通过这两点的流线 “ $\phi(x, y) = \phi_1$ ” 与 “ $\phi(x, y) = \phi_2$ ” 中的常数 ϕ_2 与 ϕ_1 之差 $\phi_2 - \phi_1$.

例 4 流体的速度场为 $v_x = x + 2y + z + 5$, $v_y = 2x + y + z + 3$, $v_z = x + y + z - 6$. 试验证这速度场无旋并求其速度势.

解 先验证此速度场无旋,事实上,按照

$$\omega = \frac{1}{2} \nabla \times v \quad (1)$$

可以求出

$$\omega_x = \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} = 1 - 1 = 0,$$

$$\omega_y = \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} = 1 - 1 = 0,$$

$$\omega_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 2 - 2 = 0,$$

即 $\omega = 0$. 速度场果然是无旋的,存在速度势 φ .

由 $v_x = \partial\varphi/\partial x$ 有

$$\begin{aligned}
 \varphi &= \int \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + f(y, z) \\
 &= \int (x + 2y + z + 5) dx + f(y, z) \\
 &= \frac{1}{2} x^2 + 2xy + xz + 5x + f(y, z). \quad (2)
 \end{aligned}$$

将上面得到的 φ 对 y 求偏导数,并与 $\partial\varphi/\partial y = v_y$ 比较可得

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2x + \frac{\partial f}{\partial y} = 2x + y + z + 3,$$

即

$$\frac{\partial f}{\partial y} = y + z + 3.$$

积分上式得

$$f(y, z) = \frac{1}{2} v^2 + 3y + G(z), \quad (3)$$

再将所得到的 φ 对 z 求偏导数, 并与 $\partial\varphi/\partial z = v_z$ 比较得

$$x + y + \frac{\partial G}{\partial z} = x + y + z - 6,$$

即

$$\frac{\partial G}{\partial z} = z - 6,$$

积分上式得

$$G(z) = \frac{1}{2} z^2 - 6z + C, \quad (4)$$

其中 C 是积分常数. 速度势可以加减任意常数, 所以 C 可以略去不写.

最后求得流场的速度势

$$\begin{aligned} \varphi = & \frac{1}{2} (x^2 + v^2 + z^2) + (2xy + yz + vx) \\ & + (5x + 3y - 6z), \end{aligned} \quad (5)$$

另解 凑全微分. 由(50.19),

$$\begin{aligned} d\varphi = & (z + 2v + z + 5)dx + (2x + v + z + 3)dy \\ & + (x + y + z - 6)dz \\ = & xdx + (2ydx + 2xdv) + (zdx + xdz) \\ & + 5dx + ydy + (zdy + ydz) + 3dy + zdz - 6dz \\ = & d\left(\frac{1}{2}x^2\right) + d(2xy) + d(xz) + d(5x) \\ & + d\left(\frac{1}{2}y^2\right) + d(yz) + d(3y) + d\left(\frac{1}{2}z^2\right) \\ & - d(6z) \end{aligned}$$

因而

$$\begin{aligned} \varphi = & \frac{1}{2} (x^2 + v^2 + z^2) + (2xy + xz + yz) \\ & + (5x + 3y - 6z) + C \end{aligned} \quad (6)$$

略去积分常数 C 与前法结果相同.

(3) 连续性方程

方程(49.4)给出稳恒流动的流管中的连续性方程. 这里要推

导一般情况下的连续性方程。

任取一个闭合曲面 S ，把它所围的体积记作 V 。体积 V 中的总质量 m 可用密度 ρ 的体积积分表示，

$$m = \iiint_V \rho d\tau.$$

由于流体的流动，质量 m 将随时间而变。质量的变化率

$$\frac{dm}{dt} = \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau \quad (50.24)$$

应等于通过 S 进入 V 的流量 Q 。

现在计算 Q 。考虑到曲面 S 上各处流速 \boldsymbol{v} 可能各不相同， \boldsymbol{v} 与曲面的法向之间的夹角也可能各不相同，应将 S 划分为许多小部分。将曲面 S 的小部分记作 $d\boldsymbol{\sigma}$ ，这矢量 $d\boldsymbol{\sigma}$ 指向该小部分的外法向，其大小 $d\sigma$ 则等于该小部分的面积。这样，通过该小部分流进 V 的流量为 $-\rho\boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$ 。于是，通过整个闭合曲面 S 流进 V 的流量

$$Q = - \oiint_S \rho\boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{\sigma}.$$

按照矢量分析的高斯定理，上式右边的闭合曲面积分又可表为 S 所围体积 V 上的体积积分，

$$Q = - \iiint_V \nabla \cdot (\rho\boldsymbol{v}) d\tau. \quad (50.25)$$

(50.24)应当与(50.25)相等，

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau = \iiint_V -\nabla \cdot (\rho\boldsymbol{v}) d\tau.$$

一般地说，两个积分相等并不意味着被积函数相等。但是，上式并不是对特定的某个体积 V 成立，而是对任意的体积 V 都成立，这只能是因为被积函数相等。这样，就得到**连续性方程**：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\boldsymbol{v}) = 0. \quad (50.26)$$

把 $\nabla \cdot (\rho\boldsymbol{v})$ 展开为 $\rho\nabla \cdot \boldsymbol{v} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\rho$ ，上式成为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla) \rho + \rho \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0.$$

利用实体变化率与当地变化率的关系式(49.9), 可把**连续性方程**改写为

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0. \quad (50.27)$$

第十二章 流体动力学

§ 51. 流体动力学的特点

流体没有什么“本来形状”，对切变并不抵抗。不仅流体运动学要适应流体的这个特点，而且这个特点必然也在流体动力学中反映出来。

既然流体不反抗切变，在流体中任一平面的两方之间就**没有切向弹性力**作用。

但是，在运动着的流体中，虽然没有切向弹性力，却可能有另一种切向作用力：流速不等的流层之间的摩擦力。这种摩擦力当然是切向的。流体内部的这种摩擦叫作**内摩擦**。当然，在各部分相对静止的流体中就不会有内摩擦力。

流体在运动中有内摩擦，这个性质叫作**粘滞性**。各种流体的粘滞性的大小相差十分悬殊。如果流体的粘滞性很小，或者在特定的问题中，粘滞性并不起重要作用，就不妨把实际的流体抽象为**无粘滞流体**。

在无粘滞流体中，或者在虽有粘滞性但处于相对静止的流体中，既没有切向弹性力，也没有内摩擦力，即在流体的任一平面两方之间没有切向作用力。本章大部分讲述流体的平衡方程以及无粘滞流体的运动，因而认为流体中没有切向作用力。只是在最后两节 § 55 和 § 56 简略地讲述粘滞流体的运动，在那两节是要考虑内摩擦力的。

在流体内给定一点 O ，通过该点的任一平面两方之间没有切向作用力，这就是说，只有张力强。大家知道，流体是不能拉伸的，

它不能经受张力,只能经受压力。因此,流体中的张胁强总是指每单位面积两方的相互压力,这叫作**压强**。那么,压强 p 与平面取向的关系是怎样的呢?

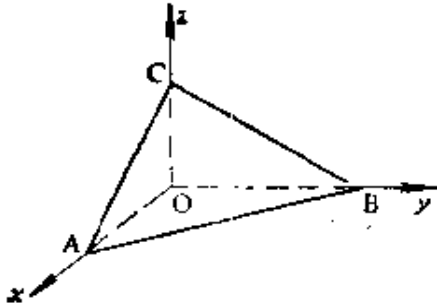


图 12-1

这可以仿照 § 46 加以分析。在给定点 O 的邻近划出小四面体 $OABC$ (图 12-1)。平面 ABC 的取向由外法向的方向余弦 α, β, γ 表示,它的面积则记作 S 。

作用在平面 ABC, OBC, OCA 和 OAB 上的压强分别记作 $p, p_1,$

p_2 和 p_3 。

把平面 OBC, OCA 和 OAB 的面积分别记作 S_1, S_2 和 S_3 。
§ 46 已指出

$$S_1 = \alpha S, S_2 = \beta S, S_3 = \gamma S. \quad (51.1)$$

先研究小四面体在 x 方向所受力的平衡问题。作用在平面 OCA 和 OAB 上的压力分别是 y 方向和 z 方向的,这里不予考虑。作用在平面 ABC 上的压力沿着内法向,大小为 pS , 因而其 x 分量为 $-apS$ 。作用在平面 OBC 上的压力沿 x 向,其大小为 p_1S_1 。于是,得 x 方向的平衡方程 $-apS + p_1S_1 = 0$, 即 $-apS + p_1\alpha S = 0$, 亦即 $p_1 - p = 0$ 。

同理,由 y 方向和 z 方向的平衡方程可得类似结果,即

$$p = p_1, p = p_2, p = p_3. \quad (51.2)$$

这样,在流体中任一给定的点,压强 p 与方向无关。可见流体不同于弹性体,流体中任一给定点的内力无需用胁强张量来描写,只要用与方向无关的压强 p 亦即标量 p 来描写就够了。

方程(51.2)的推导中略去了一切正比于体积的力, § 46 已指出,这样的忽略是正当的。此外,也象 § 46 所指出的那样,即使流体并非处于平衡,方程(51.2)也成立。

§ 52. 流体静力学

(1) 流体的平衡方程

现在仿照 § 47 研究流体的平衡问题，着重的当然不是整体的平衡，而是流体内部各个小部分在内力(以压强为表征)和外力共同作用下的平衡。这里寻求的是流体在平衡时各处的压强之间的关系。

设想在流体内划出一个小长方体，它的三棱分别平行于坐标轴，棱长分别是 dx 、 dy 和 dz 。图 12-2 描画的是它在 xy 平面上的投影。

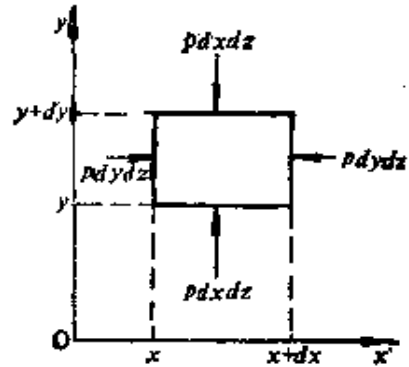


图 12-2

先考察 x 方向的平衡，在静止的流体中没有切应力，所以平行六面体的六个面之中，只有法向沿着 x 方向的那一对平面上的作用力是沿 x 方向的，它们是一 $p(x+dx)dydz$ 和 $p(x)dydz$ ，其合力为

$$- [p(x+dx) - p(x)] dydz = - \frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz. \quad (52.1)$$

虽然 $-p(x+dx)dydz$ 与 $p(x)dydz$ 都是二阶小量，它们的合力 (52.1) 却是三阶小量。正比于体积的体力也是三阶小量，因此在平衡方程中不可略去。将流体所受体力密度记作 $f(x, y, z)$ ，则这个小平行六面体所受体力为 $f(x, y, z) dx dy dz$ 。于是，小平行六面体的平衡条件要求

$$\left(- \frac{\partial p}{\partial x} + f_x \right) dx dy dz = 0.$$

y 方向的平衡和 z 方向的平衡可同样加以考察。结果，流体的平衡条件是

$$- \frac{\partial p}{\partial x} + f_x = 0, \quad - \frac{\partial p}{\partial y} + f_y = 0, \quad - \frac{\partial p}{\partial z} + f_z = 0. \quad (52.2)$$

即

$$\boldsymbol{f} - \nabla p = 0. \quad (52.3)$$

平衡方程(52.3)把流体所受体力密度 \boldsymbol{f} 表为一种梯度，这就是说，作用于流体的体力必须是保守力，流体才可能平衡。

(2) 静止液体的自由表面

流体的平衡条件(52.3)指出，流体静压强 p 的梯度 ∇p 等于体力密度 \boldsymbol{f} 。大家知道，压强梯度 ∇p 垂直于等压面“ $p(x, y, z) = \text{常数}$ ”。这样，在静止流体中，等压面垂直于体力密度 \boldsymbol{f} 。

静止液体的自由表面也是等压面。例如，暴露于大气中的液体表面上各处的压强都等于大气压。静止液体的自由表面既然是等压面，它必定处处垂直于体力密度 \boldsymbol{f} 。这一点其实可以直接看出来：假如 \boldsymbol{f} 并不垂直于自由表面，而具有切向分力，则液体的表面层将作切向流动，不再是静止的液体。

在通常情况下，液体所受的体力仅仅是重力，静止液体的自由表面处处垂直于重力。就小范围而言，各处的重力是彼此平行的，静水的自由表面是垂直于重力的平面，叫作水平面。就大范围而言，各处的重力并不平行，它们相交于地心(这里假定地球为完善



图 12-3

的球形，并且忽略了惯性离心力，静水的自由表面处处垂直于重力，应当是球面。人们常说的海平面实际上是“海球面”。在很长的直隧道中，假如有了积水(图 12-3 用斜线标明的)，由于水面为球面，从洞口向隧道里走去，积水越来越深，甚至可以达到隧道的

顶部。

如果液体所受的体力并不仅仅是重力,那么,静止液体的自由表面便不再是水平面或“水球面”。

例 1 水箱绕竖直轴作匀速转动,角速度为 ω , 试求水箱中自由水面的稳定形状。

解 以水箱作为参考系统, 达到稳定后的水面相对于水箱是静止的。

取固定于水箱的坐标系, z' 轴沿转动轴竖直向上, 原点在箱底, x 轴和 y 轴则在箱的底面上, 图 12-4 描画的是一个竖直剖面即 $x'z'$ 平面。

转动的水箱为非惯性参考系统。采用这个参考系统, 应当认为水质点除了受重力 mg 之外, 还受到惯性离心力的作用。以 $x'z'$ 剖面而论, 这惯性离心力的大小为 $m\omega^2 x'$ 。两力的合力偏离竖直方向的角

$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{m\omega^2 x'}{mg} = \operatorname{arctg} \frac{\omega^2 x'}{g}. \quad (1)$$

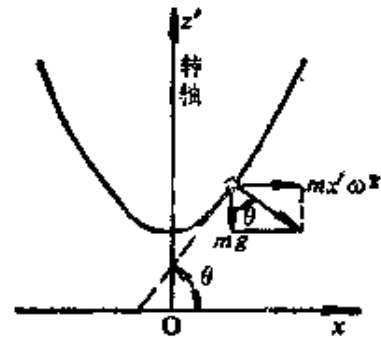


图 12-4

水面垂直于这合力, 所以水面的切线偏离水平的 x' 轴的角亦为 θ , 就是说, 其斜率

$$\frac{dz'}{dx'} = \operatorname{ctg} \theta = \frac{\omega^2}{g} x'. \quad (2)$$

(2) 式给出的斜率随 x' 的不同而不同, 这表明, 水面不是平的而是曲的。为得出水面的形状, 需将(2)积分一次,

$$z' = \frac{\omega^2}{2g} x'^2 + C. \quad (3)$$

积分常数 C 等于水面最低处的水深。(3)式是抛物线方程。

以上只研究了竖直剖面, 我们还要令这个剖面绕 z' 轴旋转, 才得到问题的解。这样旋转的结果, 抛物线(3)应代之以旋转抛物面

$$z' = \frac{\omega^2}{2g} (x'^2 + y'^2) + C. \quad (4)$$

(3) 不可压缩流体中的静压强分布

流体的平衡条件(52.3)指出, 流体静压强 p 的梯度 ∇p 等于体

力密度 f 。这样,只要知道了流体所受体力密度 f ,就可算出静压强的分布。

先说不可压缩流体,

体力密度 $f(\mathbf{r})$ 是势力,我们把相应的势能密度记作 $V(\mathbf{r})$,即

$$f(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r}), \quad (52.4)$$

于是,(52.3)成为

$$\nabla(p + V) = 0.$$

这是说,

$$p(\mathbf{r}) = \text{常数} - V(\mathbf{r}). \quad (52.5)$$

这就是不可压缩流体中的静压强分布公式,式中的常数需根据问题中的物理条件确定。

在通常情况下,流体所受的体力仅仅是重力。取 z 轴竖直向上,沿 z 轴的单位矢量记作 \mathbf{k} ,则重力密度

$$f = -\rho g \mathbf{k},$$

式中 ρ 是流体的密度。相应的势能密度

$$V(\mathbf{r}) = \rho g z.$$

于是,(52.5)给出

$$p(\mathbf{r}) = \text{常数} - \rho g z. \quad (52.6)$$

如果把原点取在液面,并把液面上的压强记作 p_0 ,则以 $z = 0$ 和 $p = p_0$ 代入(52.6)即定出式中的常数之值为 p_0 。这样,(52.6)就成为

$$p(\mathbf{r}) = p_0 - \rho g z, \quad (52.7)$$

式中 $-z$ 是流体中的深度。这正是初等物理学中为人们所熟知的公式。

如果流体所受的体力并不仅仅是重力,那么,流体中的静压强分布当然不可用(52.7)表示。

例 2 试求例 1 那个水箱中的静压强分布。

解 这里不仅要考虑重力势能,而且要考虑惯性离心势能。相应的势能密度是

$$V(\mathbf{r}) = \rho g z - \frac{1}{2} \rho (x'^2 + y'^2) \omega^2, \quad (1)$$

于是,(52.5)给出静压强分布

$$p(\mathbf{r}) = \text{常数} - \rho g z + \frac{1}{2} \rho (x'^2 + y'^2) \omega^2. \quad (2)$$

顺便说一说,静止液体的自由表面应是等压面.由(2)得自由表面的方程

$$\text{常数} = \rho g z - \frac{1}{2} \rho (x'^2 + y'^2) \omega^2, \quad (3)$$

与例 1 的结果相同.

(4) 可压缩流体中的静压强分布

以大气为例,假定压强只随高度而异,则方程(52.3)成为

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g. \quad (52.8)$$

空气是可压缩的,密度 ρ 随压强 p 而变.假定大气温度是均匀的(这不尽合理),由玻义耳-马略特定律得密度 ρ 随压强 p 而变的规律

$$p = \rho \frac{R}{\mu} T, \quad (52.9)$$

式中 μ 为气体分子量, R 为气体常数,以(52.9)代入(52.8),

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{\mu g}{RT} p.$$

分离变数,

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\mu g}{RT} dz.$$

两边分别积分,并把 $z = 0$ 处的压强记作 p_0 ,则

$$p = p_0 e^{-(\mu g/RT)z}. \quad (52.10)$$

这就是大气压强随高度而变的公式,叫作**气压公式**.

一般地说,流体所受体力密度 $f(\mathbf{r})$ 与流体的密度 ρ 有关.然而,可压缩流体的密度 ρ 又取决于压强 p ,它们之间的关系式例如

(52.9)叫作物态方程。研究可压缩流体中的静压强分布，必须将平衡方程(52.3)和物态方程联立起来解算。

对于可压缩流体，往往不用每单位体积流体所受的力 $f(\mathbf{r})$ ，而改用单位质量流体所受的力 $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ ，平衡方程(52.3)这时应改写为

$$\mathbf{P} - \frac{1}{\rho} \nabla p = 0. \quad (52.11)$$

它仍然应与物态方程联立以解算静压强分布。

§ 53. 理想流体稳恒流动的运动定理

通常把不可压缩的无粘滞流体称为**理想流体**。这里研究理想流体的稳恒流动，截取一段细流管，对它应用质点组运动定理。

(1) 动量定理

考察某个时刻 t 充满细流管 AB 段(图 12-5)的流体。过了很短一段时间 Δt ，这部分流体移到了 A'B' 段。

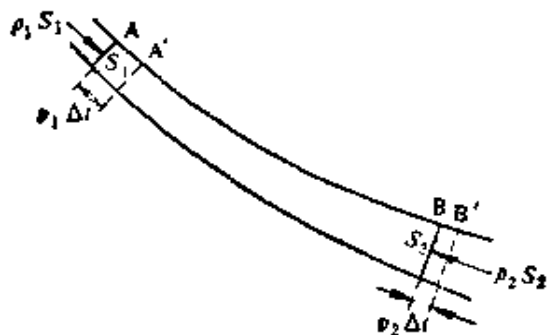


图 12-5

短一段时间 Δt ，这部分流体移到了 A'B' 段。

现在比较 A'B' 段与 AB 段的动量，以便应用动量定理。由于流动是稳恒的，A'B 段的动量始终不变，

$$\begin{aligned} & \text{A'B' 段的动量} - \text{AB 段的动量} \\ &= (\text{A'B} + \text{BB'}) \text{段的动量} - (\text{AA}' + \text{A'B}) \text{段的动量} \\ &= \text{BB' 段的动量} - \text{AA' 段的动量}. \end{aligned}$$

所以实际上只需比较 BB' 段与 AA' 段的动量。

细流管横截面上流速的分布可以认为是均匀的，所以横截面 A 移动到 A' 仍然是横截面，横截面 B 移动到 B' 仍然是横截面，从而 BB' 段与 AA' 段都可看作是母线垂直于底面的柱体。让我们分别计算这两个柱体的动量，BB' 段的长度为 $v_2 \Delta t$ ，乘以横截面积 S_2 即得体积 $S_2 v_2 \Delta t$ ，从而 BB' 段的质量为 $\rho S_2 v_2 \Delta t$ 。试与(49.3)比较，可以看出这质量正是流量 $Q = \rho S_2 v_2$ 与 Δt 的乘积 $Q \Delta t$ 。再乘以 B 处的流速 v_2 即得 BB' 段的动量 $Q v_2 \Delta t$ 。同理，AA' 段的动量为 $Q v_1 \Delta t$ 。因此，在 Δt 时间内我们所取的整段细流管中流体动量的增量为 $Q(v_2 - v_1) \Delta t$ 。

按照动量定理，这段细流管中流体动量的增量应等于这段流体所受外力 F 的冲量 $F \Delta t$ ，

$$Q(v_2 - v_1) \Delta t = F \Delta t,$$

即

$$F = Q(v_2 - v_1). \quad (53.1)$$

F 的反作用力，亦即这部分流体给予周围流体的流动反作用力则是

$$F_{\text{反}} = -F = Q(v_1 - v_2). \quad (53.2)$$

例 1 液流以水平流速 v 射向竖直挡板，试求液流对挡板的正压力。设液流在挡板上并不反跳，已知液流的横截面积为 S 。

解 应用流动反作用力的公式 (53.2)，但这里只要它的水平分量。这样，液流对竖直挡板的正压力为

$$F_{\text{反}} = Q(v - 0) = \rho S v (v - 0) = \rho v^2 S.$$

(2) 伯努利定理

现在比较 A'B' 段与 AB 段的机械能，以便应用功能原理。由于流动是稳恒的，A'B 段的机械能始终不变，所以实际上只需比较 BB' 段与 AA' 段的机械能。

BB' 段的质量前已算出为 $Q \Delta t$ ，从而 BB' 段的动能为

$\frac{1}{2} Q v_2^2 \Delta t$ 。将每单位质量的流体的势能记作 U ，则 BB' 段的势能为 $QU_2 \Delta t$ 。这样， BB' 段的机械能是 $\frac{1}{2} Q v_2^2 \Delta t + QU_2 \Delta t$ 。同理， AA' 段的机械能是 $\frac{1}{2} Q v_1^2 \Delta t + QU_1 \Delta t$ 。因此，在 Δt 的时间内，所截取的一段细流管中流体机械能的增量为

$$\frac{1}{2} Q v_2^2 \Delta t + QU_2 \Delta t - \frac{1}{2} Q v_1^2 \Delta t - QU_1 \Delta t.$$

按照功能原理，这段细流管中流体机械能的增量应等于外力与内力所作功的和。理想流体是不可压缩的且无粘滞，内力所作功的和为零。所以只要计算外力对这段细流管所作功。在流管侧面，由于流体无粘滞，外力垂直于流动方向，从而不作功。这样，只需计算流管的流入端 A 与流出端 B 的外力所作的功。

在流入端 A ，压力 $p_1 S_1$ 作正功 $p_1 S_1 v_1 \Delta t$ 即 $p_1 Q \Delta t / \rho$ 。在流出端 B ，压力 $p_2 S_2$ 作负功 $-p_2 S_2 v_2 \Delta t$ 即 $-p_2 Q \Delta t / \rho$ 。于是，由功能原理，

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} Q v_2^2 \Delta t + QU_2 \Delta t - \frac{1}{2} Q v_1^2 \Delta t - QU_1 \Delta t \\ = \frac{(p_1 - p_2) Q \Delta t}{\rho}. \end{aligned}$$

约去公共因子 $Q \Delta t$ ，并遍乘以 ρ ，即得

$$\frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho U_2 + p_2 = \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho U_1 + p_1. \quad (53.3)$$

或以 ρg 遍除各项使它们都具有长度的量纲，

$$\frac{v_2^2}{2g} + \frac{U_2}{g} + \frac{p_2}{\rho g} = \frac{v_1^2}{2g} + \frac{U_1}{g} + \frac{p_1}{\rho g}. \quad (53.4)$$

公式(53.3)即(53.4)叫作伯努利定理。它是稳恒流动的理想流体中沿着流线的功能原理。

在通常情况下，流体所受外力仅仅是重力，单位质量流体的势能 $U = gz$ ，伯努利定理(53.3)和(53.4)分别成为

$$\frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g z_2 + p_2 = \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g z_1 + p_1, \quad (53.5)$$

$$\frac{v_2^2}{2g} + z_2 + \frac{p_2}{\rho g} = \frac{v_1^2}{2g} + z_1 + \frac{p_1}{\rho g}. \quad (53.6)$$

人们常将 $v^2/2g$, z 和 $p/\rho g$ 分别称作速度头、水头和压力头(头是高度的意思), 伯努利定理(53.6)就可以读作: 在稳恒流动的理想流体中, 沿着同一根流线的各处总头相同。

现在考察伯努利定理(53.5)亦即(53.6)的一些特殊情况。

先说细流管两端截面相等的情况。稳恒流动的连续性方程在这种情况下成为 $\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$ 。由于不可压缩 $\rho_1 = \rho_2$, 这式又成为

$$v_1 = v_2.$$

于是, 伯努利方程(53.5)两边的 $\rho v_1^2/2$ 和 $\rho v_2^2/2$ 相互消去,

$$p_1 - p_2 = \rho g(z_2 - z_1). \quad (53.7)$$

这正好相当于静止流体中的压强分布公式(52.7)。

再说细流管两端压强相等的情况。例如在大水槽的侧壁上开一小孔, 孔在水面下 h 处, 水面上方是敞开的[图 12-6(a)]。试看图中细流管 AB, 它的两端的压强都等于大气压 p_0 ,

$$p_1 = p_2 = p_0.$$

把水当作理想流体, 应用伯努利定理(53.6)。由于方程两边的 p_1

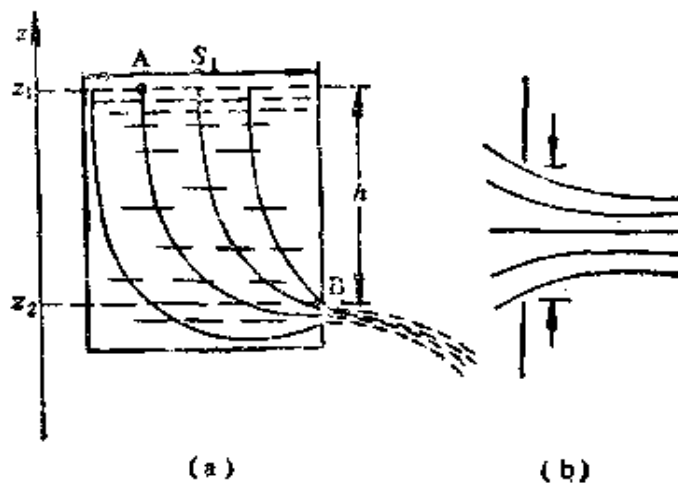


图 12.6

和 p_2 相互消去, 方程成为

$$\frac{v_2^2}{2g} + z_2 = \frac{v_1^2}{2g} + z_1. \quad (53.8)$$

水槽很大, 即水槽中的水面下降很缓慢, 不妨认为水槽面上的流速 $v_1 \approx 0$, (53.8) 就成为 $v_2^2/2g + z_2 = z_1$. 从这式可解得水从小孔流出的流速

$$v_2 = \sqrt{2g(z_1 - z_2)} = \sqrt{2gh}. \quad (53.9)$$

这叫作**托里拆利公式**. 它所给出的速度正好等于物体从高度 h 自由落下所获得的速度.

如小孔的面积为 S , 则从小孔流出的流量

$$Q = \rho S v_2 = \rho S \sqrt{2gh}. \quad (53.10)$$

不过, 实际上, 穿过小孔的流线彼此并不平行 [图 12-6(b)]. 这是因为水槽里的流线向小孔汇聚, 由于惯性, 穿过小孔后的水流横截面积继续缩小. 经过某个短距离之后, 流线才平行, 这里水流横截面积已缩小到小孔面积的大约 65%. 因此, 严格说来, (53.10) 里的 S 应该是这缩小了的横截面积.

例 2 用竖直挡板靠近图 12-6(a) 的小孔以迎接水流, 试求水流对挡板的正压力. 设水流在挡板上并不反跳, 已知水流横截面积为 S .

解 首先, 用托里拆利公式求得小孔水流的流速

$$v = \sqrt{2gh}.$$

其次, 引用例 1 的结果并根据 (53.2), 就求得水流对挡板的正压力

$$F_{\text{正}} = \rho v^2 S = 2\rho ghS.$$

本例已经解毕. 下面作一个有趣的比较.

设想把竖直挡板向小孔靠拢直到把小孔封闭起来, 小孔水流停止. 这时水槽里的水对挡板的作用力纯粹是一种静压力. 按照 (52.7), 小孔处的静压强 $p = p_0 + \rho gh$, p_0 是大气压强. 由于挡板的背水面也受到大气压力, 所以我们将略去 $p = p_0 + \rho gh$ 中的 p_0 而认为 $p = \rho gh$. 于是, 挡板所受压力

$$F = pS = \rho ghS.$$

这仅仅是小孔未封闭时的 $F_{\text{正}} = 2\rho ghS$ 的一半 (如果忽略小孔水流横截面积缩小的效应).

其实, $F = pS$ 是与压强 p 相应的压力, F_R 则是外界迫使液流改变其流速 v 时液流对外界的反作用力, 两者没有理由一定相等。

最后再说细流管两端高度相等的情况。这时, 伯努利方程 (53.5) 两边的 z_1 和 z_2 相互消去,

$$\frac{1}{2} \rho v_2^2 + p_2 = \frac{1}{2} \rho v_1^2 + p_1. \quad (53.11)$$

这样, 如 $v_2 > v_1$, 则 $p_2 < p_1$ 。换句话说, 流速快的地方压强小, 流速慢的地方压强大。有些初学者觉得这个结论难以接受。他们总认为流速快的应该对物体压力大, 比方说, 例 1 的 $F_R = \rho v^2 S$ 就是正比于流速 v 的平方。其实, 他们是把两个不同的问题混淆起来了。伯努利定理说的是同一细流管各处总头相等。(53.11) 是伯努利定理的特例, 由于 $z_1 = z_2$, 既然总头相等, 速度头大的地方当然压力头小, 速度头小的地方当然压力头大。至于例 1 说的并不是液体的压强, 而是液流的反作用力。这反作用力随总头(这里不需计入压力头和水头, 所以总头也就是速度头)的不同而不同。总头越大, 反作用力也就越大。

沿着同一流管, 流速大的地方压强小, 流速小的地方压强大, 这可以用图 12-7 所示的简单装置加以演示。同一水管在 A 处较粗, B 处较细。由稳恒流动的连续性方程(49.4)知道 A 处流速较慢, B 处流速较快。人们可以实地看到 A 和 B 两处竖直侧管中的水面以 A 处较高, 这表示 A 处压强较大。

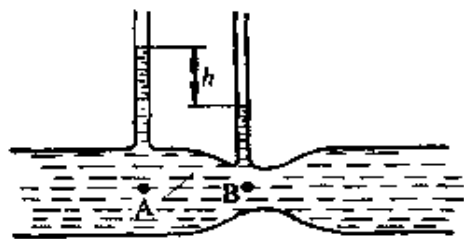


图 12-7

例 3 图 12-7 的 A 和 B 两处的横截面积分别为 S_1 和 S_2 , 两侧管中的水面高度相差 h 。把管中流体当作理想流体, 试计算 A 和 B 两处的流速, 以及管中流量。

解 由稳恒流动的连续性方程(49.4)和伯努利定理(53.5),

$$\begin{cases} S_1 v_1 = S_2 v_2, \\ \frac{1}{2} \rho v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2} \rho v_2^2 + p_2, \end{cases}$$

其中 $p_1 = p_2 = \rho g h$, 从上述代数方程组不难解得

$$v_1 = \frac{S_2}{\sqrt{S_1^2 - S_2^2}} \sqrt{2gh}, \quad v_2 = \frac{S_1}{\sqrt{S_1^2 - S_2^2}} \sqrt{2gh}.$$

至于管中流量

$$Q = \rho v_1 S_1 = \rho v_2 S_2 = \rho \frac{S_1 S_2}{\sqrt{S_1^2 - S_2^2}} \sqrt{2gh}.$$

例 4 当水塔中水面不太高时, 会出现这样的现象: 楼下 C 处不放水时, 楼上 B 处可以放出水来; 但一旦楼下 C 处放水, 楼上 B 处水管就无水, 试加以解释.

解 A 表示供水的大水塔, 其中水面高度为 h_1 , 而 B 的高度为 h_0 , 如图 12-8 所示.

先讨论 C 处不放水的情况. 根据连通管的原理, 只要 $h_1 > h_0$, 楼上的 B 处就可放出水来.

再讨论楼下 C 处放水的情况. 从水塔中的水面起作一流线, 沿流线上取 ①、②及③三点, 以 S_1 及 S_2 表②及③处的水流横截面积, 下面列出各点的压强、速度及高度:

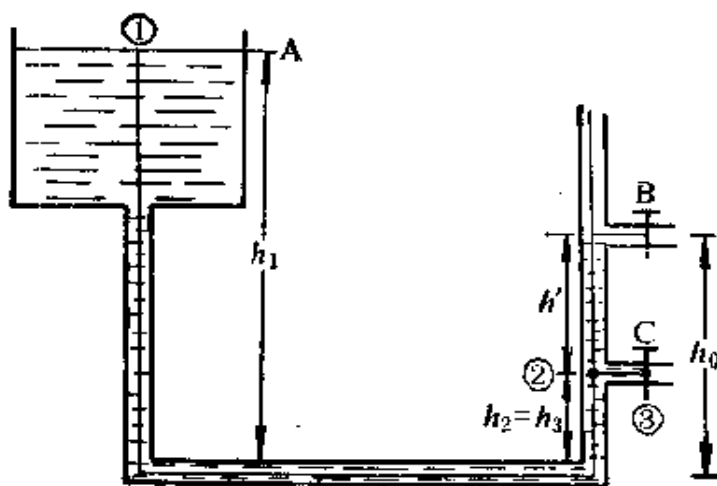


图 12-8

- | | | | |
|---|---------------------|-------------------|---------------|
| ① | $p_1 =$ 大气压 p_0 , | $v_1 \approx 0$, | h_1 ; |
| ② | p_2 , | v_2 , | h_2 ; |
| ③ | $p_3 = p_0$, | v_3 , | $h_3 = h_0$. |

将水看作理想流体, 对①及③应用伯努利定理得:

$$p_0 + \rho g h_1 = p_0 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g h_2$$

求得③处的流速

$$v_2 = \sqrt{2g\Delta h}, \quad (\Delta h = h_1 - h_2)$$

又由连续性方程

$$S_2 v_2 = S_3 v_3$$

可求得②处流速

$$v_3 = S_2 v_2 / S_3$$

现在计算水从②上升的高度 h' , 为此, 先求②处的压强. 对流线上①及②两点应用伯努利定理

$$p_0 + \rho g h_1 = p_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

解出②处的压强

$$\begin{aligned} p_2 &= p_0 + \rho g \Delta h - \frac{1}{2} \rho S_2^2 (2g\Delta h) / S_3^2 \\ &= p_0 + \rho g \Delta h (1 - S_2^2 / S_3^2) \end{aligned}$$

从上式, 我们知道 S_2 不得小于 S_3 , 否则 $p_2 <$ 大气压, ②上方的水和空气将被吸进管路中. 现在利用流体静力学方程 $p_2 = p_0 + \rho g h'$ 计算 h' .

$$p_0 + \rho g h' = p_0 + \rho g \Delta h (1 - S_2^2 / S_3^2)$$

由此解得

$$h' = \Delta h \left(\frac{S_3^2 - S_2^2}{S_3^2} \right) = (h_1 - h_2) \left(\frac{S_3^2 - S_2^2}{S_3^2} \right)$$

下面分三种情况来讨论

i) 楼上 B 处仍能放出水的条件是 $h' + h_2 \geq h_0$, 即

$$(h_1 - h_2) \left(\frac{S_3^2 - S_2^2}{S_3^2} \right) + h_2 \geq h_0$$

亦即

$$h_1 \geq h_2 + \frac{S_3^2}{S_3^2 - S_2^2} (h_0 - h_2)$$

这是说, h_1 至少应比 h_2 还要高出 $(h_0 - h_2) S_3^2 / (S_3^2 - S_2^2)$ 才能保证楼上 B 处仍能出水.

前已指出 $S_2 \geq S_3$, 这里我们进一步看到: S_2 越接近 S_3 , 上面这个条件越

苛刻。假如 $S_2 = S_3$, 则出水条件成为 $h_1 \geq \infty$, 这个条件不可能满足, 只要 C 处放水 B 处总是没水。

ii) 如果

$$h_0 \leq h_1 \leq h_2 + \frac{S_3^2}{S_2^2 - S_3^2} (h_0 - h_2)$$

即 h_1 虽然稍大于 h_0 , 但还未达到前述条件所要求的高度。那么, 当楼下 C 处不放水时, 楼上 B 处可以放出水, 但一旦楼下放水时, 楼上就放不出水来。

iii) 如果

$$h_1 < h_0$$

按连通器原理, 楼上 B 处理所当然地永远也不会出水。

例 5 有一壶向一桶中注水, 设其流量保持为 Q , 壶口与桶底高度差为 H , 桶底面积为 S (图 12-9), 求作用于桶底的压力与时间 t 的关系。

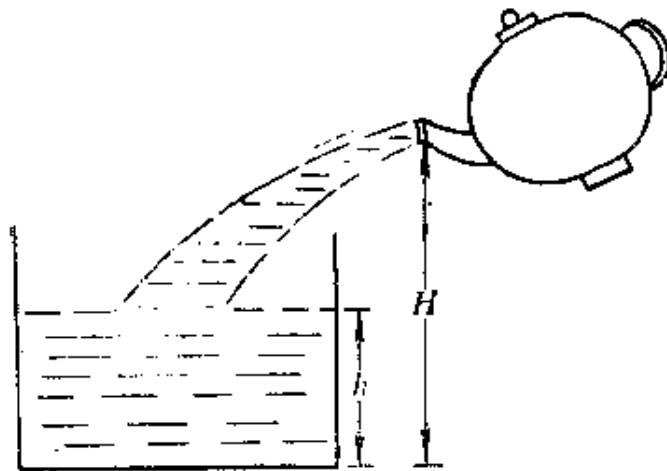


图 12-9

解 将开始注水的时刻取作 $t = 0$, 则桶中水深

$$h = Qt/S.$$

在时刻 t 注入的水到达桶中水面的流速为

$$v = \sqrt{2g(H - h)}.$$

按动量定理, 此时注水对桶的压力为

$$\rho Qv = \rho Q\sqrt{2g(H - h)}.$$

再加上桶中已有的深度为 h 的水柱, 全部压力应为

$$F = \rho g h S + \rho Q \sqrt{2g(H-t)}$$

$$= \rho Q \left[g t + \sqrt{2g \left(H - \frac{Q}{S} t \right)} \right].$$

这就是作用于桶底的压力与时间的关系。

方程(53.11)还有许多有趣的应用。

飞机在飞行中，取机翼作为参考系统，就可以把空气看作是迎面而来的气流。机翼上方的流线比下方的流线密（图 12-10），这表明翼背上的气流速度大于翼腹下的气流速度。速度头大的地方压力头小，速度头小的地方压力头大。这样，翼腹所受气流压力（这是向上的）大于翼背所受气流压力（这是向下的）。结算下来，机翼受到向上的力，这正是使飞机得以腾空的升力。

有一个问题需要说明。翼背（以图 12-10 的点 1 为代表）和翼腹（以图 12-10 的点 2 为代表）并不在同一条细流管上，怎能应用伯努利定理呢？原来，点 1 与远离机翼的点 3 在同一细流管上，点 2 与远离机翼的点 4 在同一细流管上，而在点 3 和点 4 的总头显然相等，因而在点 1 和点 2 的总头也相等。



图 12-10

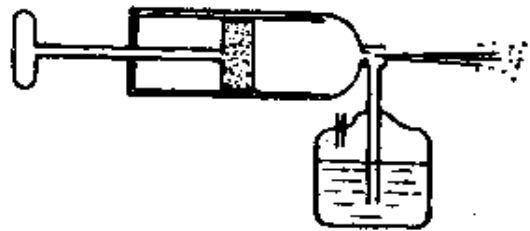


图 12-11

又如喷雾器的喷嘴处气流速度特别大，从而压强特别小，这就将容器中的药液吸了出来，吸出的药液随着气流喷射出去而成为雾状（图 12-11）。

以上关于飞机升力和喷雾器的定性解释是有缺点的。这是因为问题所涉及的是气流，而气体是可压缩的，但伯努利定理(53.5)即(53.6)却是在不可压缩的条件下导出的。不过，只要流速远远

小于气体中扰动的传播速度(即声速), 则可压缩性所引起的误差不大。

*§ 54. 无粘滞流体动力学

(1) 欧拉方程

§ 52 导出了流体的平衡方程。推导的方法是先计算作用在各个小部分上的合力, 然后令合力为零。在这基础上, 本节推导无粘滞流体的动力学方程, 就只要令 § 52 算出的合力等于各该小部分的质量与加速度的乘积就行了。这样, 由(52.3) 就得到无粘滞流体动力学方程

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f} - \nabla p, \quad (54.1)$$

式中 \mathbf{f} 是流体所受体力密度。

因为我们研究的是速度场, 所以上式中的 d/dt 应当按(49.9) 加以改写,

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \nabla p = \mathbf{f}. \quad (54.2)$$

不难验证

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \nabla \left(\frac{1}{2} v^2 \right) - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}), \quad (54.3)$$

于是, (54.2) 又可改写为

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \rho \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) + \rho \nabla \left(\frac{1}{2} v^2 \right) + \nabla p = \mathbf{f}. \quad (54.4)$$

这就叫作流体动力学的**欧拉方程**。

欧拉方程涉及五个变量—— \mathbf{v} 以及 p, ρ , 所以欧拉方程(54.4) 还需要补充以连续性方程和物态方程, 才构成流体动力学的完全方程组。

欧拉方程为非线性的。电磁学中的麦克斯韦方程组看来好象

比欧拉方程复杂,但麦克斯韦方程组是线性的,所以实际上欧拉方程解起来更难。

(2) 欧拉方程的第一次积分

现在研究欧拉方程在几个特殊情况下的第一次积分。

沿流线的积分 设流体是不可压缩的(ρ 为常数),流动是稳恒的($\partial \mathbf{v} / \partial t = 0$),体力密度 \mathbf{f} 是有势的($\mathbf{f} = -\nabla V$, 这 V 是势能密度)。欧拉方程(54.4)这时成为

$$-\rho \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) + \nabla \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + p + V \right) = 0.$$

沿某一流线积分,

$$\begin{aligned} -\rho \int_{\text{流线}} \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{r} + \int_{\text{流线}} \nabla \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + p + V \right) \cdot d\mathbf{r} \\ = 0. \end{aligned} \quad (54.5)$$

按照定义, $\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})$ 垂直于 \mathbf{v} , 亦即垂直于流线, 而 $d\mathbf{r}$ 是沿流线的, 所以 $\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{r} = 0$, (54.5) 成为

$$\int_{\text{流线}} d \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + p + V \right) = 0.$$

由此

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + p + V = \text{常数(沿流线)}.$$

或者, 不用势能密度 V , 改用每单位质量的流体的势能 U , 则上式写成

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + p + \rho U = \text{常数(沿流线)}. \quad (54.6)$$

这正是伯努利定理(53.3)

注意, 伯努利定理(54.6)里的常数对于不同的流线可以是不同的。

在历史上, 伯努利定理的发表(1738年)早于欧拉方程(1755

年), 所以它并不是作为欧拉方程的第一次积分导出的, 而是如 § 53 所示是作为功能原理沿流线导出的。

无旋的稳恒流动 设流体是不可压缩的 (ρ 为常数), 流动是稳恒的 ($\partial \boldsymbol{v} / \partial t = 0$) 而且无旋 ($\nabla \times \boldsymbol{v} = 0$), 体力密度是有势的 ($\boldsymbol{f} = -\nabla V = -\rho \nabla U$)。欧拉方程(54.4)在这情况下成为

$$\nabla \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + p + \rho U \right) = 0.$$

由此,

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + p + \rho U = \text{常数}. \quad (54.7)$$

这也是伯努利定理, 但式中的常数在整个流体中是同一的, 并不随流线而异。

无旋的非稳恒流动 设流体是不可压缩的 (ρ 为常数), 流动并非稳恒的 ($\partial \boldsymbol{v} / \partial t \neq 0$) 但是无旋 ($\nabla \times \boldsymbol{v} = 0$), 体力密度是有势的 ($\boldsymbol{f} = -\nabla V = -\rho \nabla U$)。 (50.18) 给出无旋流动的速度势 φ , 而

$$\boldsymbol{v} = \nabla \varphi.$$

在这种情况下, 欧拉方程(54.4)成为

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \nabla \varphi + \rho \nabla \left[\frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 \right] + \nabla p + \rho \nabla U = 0,$$

即

$$\nabla \left[\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho (\nabla \varphi)^2 + p + \rho U \right] = 0.$$

由此,

$$\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho (\nabla \varphi)^2 + p + \rho U = f(t). \quad (54.8)$$

这是伯努利定理在非稳恒情况下的推广, 有的书中称为压力方程, 它的解称为压力积分即伯努利积分。右边的 $f(t)$ 在整个流体中是同一的, 但可随时间而变。

(3) 涡旋动力学

关于涡旋动力学,这里要证明开耳芬环流定理.

按定义(50.12),环流量

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}.$$

令取 C 为随流体漂移的闭合曲线,并计算 Γ 的变化率

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \oint_C \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{r} + \oint_C \mathbf{v} \cdot \frac{d}{dt}(d\mathbf{r}). \quad (54.9)$$

(54.9)右边第二项

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{v} \cdot \frac{d}{dt}(d\mathbf{r}) &= \oint_C \mathbf{v} \cdot d\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} \\ &= \frac{1}{2} \oint_C d v^2 = \Delta \left(\frac{1}{2} v^2\right). \end{aligned}$$

这里 C 是闭合曲线,沿 C 循行一周回到原处, $v^2/2$ 的增量当然是零.

再看 (54.9) 右边第一项. 设 \mathbf{f} 是有势的, $\mathbf{f} = -\nabla V = -\rho\nabla U$, 则由欧拉方程(54.1),

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla \left(\frac{1}{\rho} p + U\right),$$

从而

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{r} &= - \oint_C \nabla \left(\frac{1}{\rho} p + U\right) \cdot d\mathbf{r} \\ &= - \oint_C d\left(\frac{1}{\rho} p + U\right) \\ &= -\Delta \left(\frac{1}{\rho} p + U\right). \end{aligned}$$

沿 C 循行一周回到原处, $p/\rho + U$ 所获得的增量当然也是零.

于是,(54.9)给出

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 0. \quad (54.10)$$

(50.15)指出环流量 Γ 与表示涡旋强度的 ω 是紧密联系的。这样，(54.10)是说涡旋不能产生或消灭，它随着流体的质点一同漂移。

(4) 绕流对物体的作用力

流体在其流动途中遇到物体，从物体两侧绕过而继续流动，这叫作**绕流**。

定性解释飞机升力的图 12-10 中，描画的就是一种绕流。图中沿机翼剖面周界的环流量

$$\Gamma = \oint_{\text{周界}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} \neq 0.$$

这是很关键的。如果环流量 $\Gamma = 0$ ，则升力将等于零。

其实，理想流体的稳恒平移流绕过物体时，只要绕流是无旋的，则绕流对物体的作用力 \mathbf{R} 就是零。证明如下。

作一个半径 a 很大的球面 S 包围着物体，球面上每一点距离物体都很远。我们把这称作**控制面**。控制面与物体之间那部分流体的动量 \mathbf{K} 的时间变化率 $d\mathbf{K}/dt$ 应等于物体对流体的反作用力 $-\mathbf{R}$ 以及控制面外的流体对这部分流体的作用力 $\iint_S p(-\mathbf{n})dS$ 的合力，

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = -\mathbf{R} - \iint_S p\mathbf{n}dS,$$

即

$$\mathbf{R} = -\frac{d\mathbf{K}}{dt} - \iint_S p\mathbf{n}dS. \quad (54.11)$$

实体变化率 $d\mathbf{K}/dt$ 为当地变化率 $\partial\mathbf{K}/\partial t$ 与通过控制面向里传输动量的速率之和，

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{K}}{\partial t} - \iint_S \rho\mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}).$$

对于稳恒流动，当地变化率 $\partial\mathbf{K}/\partial t = 0$ ，因而

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = -\iint_S \rho\mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}). \quad (54.12)$$

把远离物体处的流速记作 v_0 ，以 v_0 的指向作为球坐标系的极轴，用球坐标系计算(54.12)中的积分，

$$\begin{aligned} \frac{dK}{dt} &= - \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \rho v_0 (v_0 \cos \theta a^2 \sin \theta d\theta d\varphi) \\ &= -\rho v_0 v_0 a^2 2\pi \int_{\theta=0}^{\pi} \cos \theta \sin \theta d\theta = 0. \end{aligned} \quad (54.13)$$

再看(54.11)右边的第二项。对于无旋稳恒流动，由伯努利定理(54.7)，并假定了不存在体力密度，因而没有势能 U ，得

$$p = \text{常数} - \frac{1}{2} \rho v^2.$$

于是，

$$\begin{aligned} \oint_S p n dS &= \oint_S \left(\text{常数} - \frac{1}{2} \rho v^2 \right) n dS \\ &= \left(\text{常数} - \frac{1}{2} \rho v_0^2 \right) \oint_S n dS = 0. \end{aligned} \quad (54.14)$$

以(54.13)和(54.14)代入(54.11)就证明了绕流对物体的作用力 R 为零。

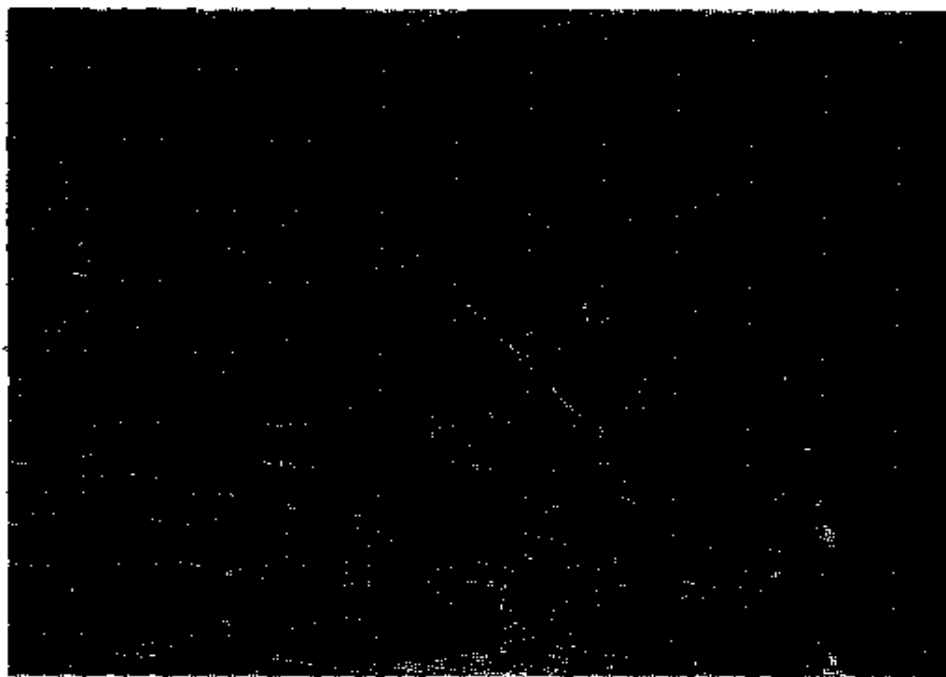


图 12-12

这里 $R = 0$ 是说绕流对物体不仅没有“升力”，就连迎面阻力也没有。这与实验事实矛盾。它指出“理想流体”这个模型只在一定范围里适用。在绕流的情况下，物体后面有“尾流”，粘滞性使得尾流中形成一连串涡流（图 12-12 表示在实际流体中的片状物），这就导致阻力。其次，即使物体是流线形的，后面不存在尾流和涡流，粘滞性也直接导致阻力。这是因为紧靠物体的流体粘附在物体上，这部分流体与其余部分之间就存在内摩擦。

(5) 欧拉方程的线性近似

这里研究小的扰动在流体中的传播，或者具体地说，声振动在流体中的传播。

在这种情况下，必须考虑流体的可压缩性，即流体密度 ρ 随压强 p 的变化。不过，既然说的是小振动，密度的变化 $\rho - \rho_0$ （下标零表示相应的平衡值）和流速 v 都是小量。如果略去二阶小量，欧拉方程(54.4)成为

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} + \nabla p = f,$$

这是欧拉方程的线性近似。研究声振动的传播时，不妨认为 $f = 0$ 。于是，

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} + \nabla p = 0, \quad (54.15)$$

在同样的近似下，连续性方程(50.26)成为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot v = 0, \quad (54.16)$$

我们要从 (54.15) 和 (54.16) 消去 v 或消去 ρ 。为此，先将 (54.15) 中的 ∇p 加以改写，

$$\nabla p = \left(\frac{dp}{d\rho} \right)_0 \nabla \rho,$$

其中 $(dp/d\rho)_0$ 可从物态方程 $\rho = \rho(p)$ 算出。这样一来，(54.15) 成为

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} + \left(\frac{dp}{d\rho} \right)_0 \nabla \rho = 0. \quad (54.17)$$

为从(54.16)和(54.17)消去 v , 拿(54.16)对 t 微分

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \rho_0 \nabla \cdot \frac{\partial v}{\partial t} = 0.$$

以(54.17)的 $\partial v / \partial t$ 代入上式,

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - \left(\frac{dp}{d\rho} \right)_0 \nabla^2 \rho = 0. \quad (54.18)$$

这是著名的波动方程, 方程中的系数 $(dp/d\rho)_0$ 是波速的平方.

以空气为例. 把声振动的传播看作绝热过程, 则物态方程是

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma,$$

其中 γ 是定压比热与定容比热之比, 约为 1.4. 于是,

$$\left(\frac{dp}{d\rho} \right)_0 = \gamma \frac{p_0}{\rho_0}.$$

在标准状况下,

$$p_0 = 1.012 \times 10^5 \text{ 牛顿/米}^2,$$

$$\rho_0 = 1.293 \times 10^{-3} \text{ 千克/厘米}^3$$

$$= 1.293 \text{ 千克/米}^3,$$

从而

$$\text{声速} = \sqrt{\gamma \frac{p_0}{\rho_0}} = \sqrt{1.4 \frac{10.12 \times 10^4}{1.293}} = 332 \frac{\text{米}}{\text{秒}},$$

与实验值相符.

§ 55. 粘滞流体

(1) 粘滞系数

实际的流体或多或少具有粘滞性即内摩擦.

比如, 流体沿 x 方向流动, 即只有 $v_x \neq 0$, 而 $v_y = 0$ 和 $v_z = 0$, 不过流速并不均匀, v_x 随 y 而异, $v_x = v_x(y)$, 换句话说, 在垂

直于 y 轴的各层之间有相对滑动,于是各层之间就有摩擦力作用。可以假定,各层之间每单位面积上正 y 一方对负 y 一方的摩擦力 p_{12} 正比于速度梯度 dv_x/dy ,

$$p_{12} = \eta \frac{dv_x}{dy}. \quad (55.1)$$

比例常数 η 叫作该种流体的粘滞系数。粘滞系数的量纲

$$[\eta] = \frac{[p][y]}{[v]} = \frac{[F]L^{-2}L}{LT^{-1}} = \frac{(MLT^{-2})L^{-2}L}{LT^{-1}} = ML^{-1}T^{-1}.$$

在国际单位制中,粘滞系数的单位是千克/米·秒,这有一个专门的名称:帕斯卡·秒。(帕斯卡是压强的单位,即牛顿/米².)

液体的粘滞系数为 10^{-3} 到 10^0 帕斯卡·秒的数量级,气体的粘滞系数为 10^{-5} 帕斯卡·秒的数量级。粘滞系数与流体的温度有很密切的关系。随着温度的升高,液体的粘滞系数减小,气体的粘滞系数增大。

温度 0°C 的粘滞系数表

液 体	η (帕斯卡·秒)	气 体	η (帕斯卡·秒)
水	1.808×10^{-1}	空 气	1.733×10^{-5}
酒 精	1.770×10^{-1}	氢	0.857×10^{-5}
苯	0.902×10^{-1}	氮	1.891×10^{-5}

(2) 直圆管的流量公式

试研究直圆管中不可压缩粘滞流体的稳恒流动。

粘滞流体在管中的流速不是均匀分布的。流体粘附于管壁,那里流速为零;而在管轴上,流速较快。这样,管中各处流速 v 取决于各该处与管轴的距离 r , r 越大的地方流速越小。这就是说,直圆管中的流体好像划分为许许多多一层套一层的空心圆柱体,从里向外,这些空心圆柱体的流动依次滞后。依次滞后的圆柱体

之间有摩擦力作用。因而，为了维持圆管中的稳恒流动，需要在管的两端加上压强差 $p_1 - p_2$ 。

先求流速 v 与距离 r 的函数关系。从许许多多空心圆柱体中取一个作为代表，它的内半径为 r ，外半径为 $r + dr$ (图 12-13)。把圆管的长度记作 l 。这空心圆柱体的内侧面积为 $2\pi rl$ ，设流体自左向右流动，则在这面积上受到里面流体的摩擦力为

$$\left(\eta \left| \frac{dv}{dr} \right| 2\pi rl \right) \Big|_r,$$

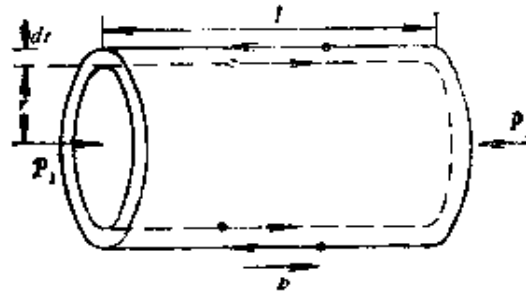


图 12-13

空心圆柱体的外侧面积上则受到外面的流体的摩擦力为

$$- \left(\eta \left| \frac{dv}{dr} \right| 2\pi r l \right) \Big|_{r+dr},$$

注意 dv/dr 是负的，所以两者的合力是

$$\begin{aligned} & \left(\eta \frac{dv}{dr} 2\pi r l \right) \Big|_{r+dr} - \left(\eta \frac{dv}{dr} 2\pi r l \right) \Big|_r \\ &= \frac{d}{dr} \left(\eta \frac{dv}{dr} 2\pi r l \right) dr = 2\pi \eta l \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) dr. \end{aligned}$$

上面得出的合力是负的，它抵制流体的流动。前已指出，管的两端有压强差 $p_1 - p_2$ 。这空心圆柱体的横截面积为 $2\pi r dr$ ，从而两端压力差为 $(p_1 - p_2)2\pi r dr$ 。这压力差正好与摩擦力的合力平衡，流体才得以作稳恒流动，

$$(p_1 - p_2)2\pi r dr + 2\pi \eta l \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) dr = 0.$$

即

$$\frac{p_1 - p_2}{l} + \eta \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) = 0. \quad (55.2)$$

将上式遍乘以 r , 并积分一次, 即得

$$\frac{p_1 - p_2}{2l} r^2 + \eta r \frac{dv}{dr} = C_1. \quad (55.3)$$

考虑到在管轴上 ($r = 0$) 流速最大 ($dv/dr = 0$), 积分常数 C_1 可确定为零。将(55.3)遍除以 r , 并积分一次, 即得

$$\frac{p_1 - p_2}{4l} r^2 + \eta v = C_2. \quad (55.4)$$

考虑到在管壁上 ($r = a$, a 是圆管的半径) 流速为零 ($v = 0$), 积分常数 C_2 可确定为

$$C_2 = \frac{p_1 - p_2}{4l} a^2.$$

于是, (55.4) 给出流速 v 作为 r 的函数

$$v(r) = \frac{p_1 - p_2}{4l\eta} \eta (a^2 - r^2). \quad (55.5)$$

求出了流速 $v(r)$, 流量 Q 就容易计算了。通过图 12-13 所示空心圆柱体的流量按照(49.3)应是 $\rho v 2\pi r dr$, 而通过整个圆管的流量就应是

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^a \rho v 2\pi r dr = \frac{2\pi\rho(p_1 - p_2)}{4l\eta} \int_0^a (a^2 - r^2) r dr \\ &= \frac{\pi\rho a^4}{8l\eta} (p_1 - p_2). \end{aligned} \quad (55.6)$$

这叫作**泊肃叶公式**。它给出不可压缩粘滞流体在压强差 $p_1 - p_2$ 作用下通过直圆管的稳恒流动的流量 Q 。

从另一角度来看, 粘滞流体通过管子时所受到的摩擦力相当于一个阻止流动的压强差, 这叫作**管阻**。外加压强差 $p_1 - p_2$ 则是用来克服管阻, 使流体得以作稳恒流动。因此, 泊肃叶公式也可说是直圆管对不可压缩粘滞流体的管阻 $p_1 - p_2$ 与流量 Q 的关系。

作为推导泊肃叶公式的出发点, 我们认为管中的流动是一层

套一层的。这样的流动叫作**层流**。但如管子两端压强差 $p_1 - p_2$ 太大,或者说,管中流量 Q 太大,超过某一限度,流体不再作层流,各处流速不再平行于管轴而是紊乱的,这样的流动叫作**湍流**。发生湍流时,管阻大大增加,泊肃叶公式不再适用。

(3) 运动定理

§ 53 研究了理想流体稳恒流动的细流管的运动定理。这里讨论一下粘滞性导致怎样的修改。

先说动量定理(53.1)即(53.2)。动量定理是不考虑内力的,所以粘滞流体各部分之间的内摩擦对动量定理并无影响,(53.1)即(53.2)保持有效,

$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1), \quad \mathbf{F}_R = Q(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2). \quad (55.7)$$

不过,(55.7)里的 \mathbf{F} 和 \mathbf{F}_R 应包括流体与周围物体之间的粘滞阻力。

再说伯努利定理(53.3)即(53.4)。伯努利定理是功能原理,功能原理需考虑内力所作的功。粘滞流体的内摩擦力所作的功之和是负的,所以(53.3)和(53.4)应修改为

$$\frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho U_2 + p_2 = \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho U_1 + p_1 - e, \quad (55.8)$$

$$\frac{v_2^2}{2g} + \frac{U_2}{g} + \frac{p_2}{\rho g} = \frac{v_1^2}{2g} + \frac{U_1}{g} + \frac{p_1}{\rho g} - h. \quad (55.9)$$

式中 e 是从细流管的 A 端到 B 端(图 12-5)所耗失的能量密度, h 则是总头的耗失,叫作**耗失头**。

例 液体从一个大容器中沿着一根粗细均匀的水平管流出(图 12-14),在水平管的 C、D、E 各点装上竖直管(作为压力计),问各点的竖直管中液面高度如何? 设该流体是 i)理想流体, ii)不可压缩的粘滞流体。

解 i) 考虑理想流体。在液体中作一流线,在流线上取①、②、③、④、⑤、⑥各点。各点的压强、速度、高度均以其下标相区分。先看①、②、⑥三点,

第①点 $p_1 = p_1, v_1 = 0, h_1 = h_1$

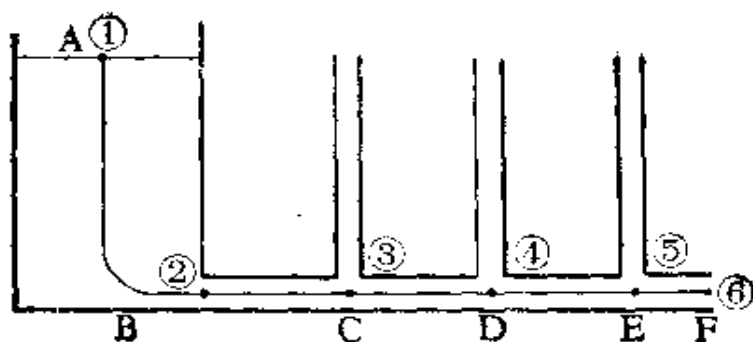


图 12-14

第②点 $p_2 = p_0 + \rho gh$, $v_2 = 0$, $h_2 = 0$;

第⑥点 $p_6 = p_0$, v_6 , $h_6 = 0$.

对①与⑥应用伯努利定理,得

$$p_0 + \rho gh = p_0 + \frac{1}{2} \rho v_6^2$$

即可得

$$v_6 = \sqrt{2gh}$$

水平管的粗细是均匀的,所以 C、D、E、F 各点的横截面积 S 相同,由连续性方程

$$Sv_3 = Sv_4 = Sv_5 = Sv_6,$$

故

$$v_3 = v_4 = v_5 = v_6,$$

而③、④、⑤、⑥点的高度 h 又相同,所以由伯努利定理可知各点的压强也必相同,即

$$p_3 = p_4 = p_5 = p_6 = p_0.$$

既然这些点的压强都等于大气压,液体当然不会在各个竖直支管中上升,因此 C、D、E 处各支管中均无液体。

ii) 考虑不可压缩粘滞流体,仍参照前述所取流线及流线上①、②、③、④、⑤、⑥各点(图 12-15),各点的压强、速度、高度仍以下标相区分。

先研究水平管上各点,例如对③和④应用伯努利定理得:

$$p_3 + \frac{1}{2} \rho v_3^2 + \rho gh_3 - c_1 = p_4 + \frac{1}{2} \rho v_4^2 + \rho gh_4,$$

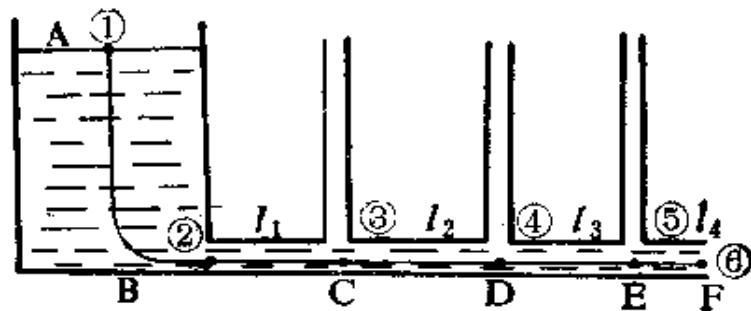


图 12-15

因为 $v_2 = v_1 = v$, $h_2 = h_1$, 所以

$$p_3 - p_4 = \epsilon_3$$

故③与④的竖直支管中水柱高之差

$$h_3 - h_4 = \frac{p_3 - p_4}{\rho g} = \frac{\epsilon_3}{\rho g}$$

另一方面, $p_3 - p_4$ 又可由流量 Q 表出。例如, 在无湍流的情况下, 应用泊肃叶公式,

$$\begin{aligned} p_3 - p_4 &= l_2 \frac{8\eta}{\pi \rho a^4} Q = l_2 \frac{8\eta}{\pi \rho a^4} \pi a^2 \rho v \\ &= l_2 \frac{8\eta}{a^2} v, \end{aligned}$$

式中 a 为水平管半径, η 为液体的粘滞系数, 故

$$\begin{aligned} h_3 - h_4 &= \frac{\epsilon_3}{\rho g} = \frac{1}{\rho g} (p_3 - p_4) \\ &= l_2 \frac{8\eta}{\rho g a^2} v. \end{aligned}$$

同理

$$\begin{aligned} h_4 - h_5 &= l_3 \frac{8\eta}{\rho g a^2} v, \\ h_5 - h_6 &= l_4 \frac{8\eta}{\rho g a^2} v. \end{aligned}$$

这些高度差与水平距离 l 成正比。所以若将各竖直管中水柱上端联结起来, 它们将在一根直线上。这直线一端通过管口 F 处, 另一端和容器侧壁相交于 U' , 将液柱高分为 h' 及 h'' 两段(图 12-16), $h = h' + h''$ 。当液体流到管子

出口处 F 时, 对应于高度为 h'' 的那一部分压力能, 由于粘滞而耗损了, 只有对应于 h' 的那一部分压力能转变为流体的动能。

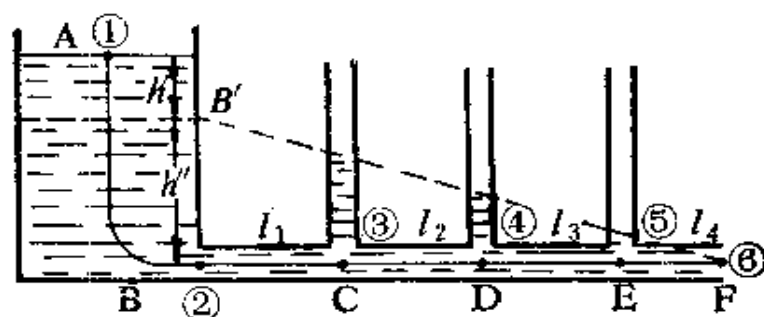


图 12-16

对②和⑥重复上面的计算, 可得

$$h_2 - h_6 = l \frac{8\eta}{\rho g a^3} v,$$

l 为水平管全长; 容易看出 $h_2 - h_6$ 即为图中的 h'' 。

而液体从管口流出的速度 v , 应为

$$v_0 = \sqrt{2g(h - h'')} = \sqrt{2gh'},$$

* § 56. 粘滞流体动力学方程

(1) 纳维尔-斯托克斯方程

现在探讨粘滞流体的动力学方程。

(55.1) 指出, 在粘滞流体中, 除了流体动力学压强即标量 p 之外, 还有一个粘滞胁强张量 p_{ik} 。如(55.1) 这个特例所表明, 粘滞胁强张量应与胁变速率有关。一般可仿照弹性体的胁强与胁变关系(46.12), 假定粘滞胁强张量为

$$p_{ik} = \theta(\nabla \cdot \mathbf{v})\delta_{ik} + 2\eta\dot{e}_{ik}, \quad (56.1)$$

其中 θ 是第二粘滞系数, δ_{ik} 是克朗内克记号

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & (i = k), \\ 0 & (i \neq k), \end{cases} \quad (56.2)$$

e_{ik} 则是(50.3)和(50.5)所定义的协变速率。

对于不可压缩的粘滞流体, $\nabla \cdot v = 0$, (56.1) 变为

$$p_{ik} = 2\eta e_{ik}. \quad (56.3)$$

设只有 $e_{12} = e_{21} \neq 0$, 其他的 e_{ik} 都为零, 则(56.3)归结为(55.1)。

这样, 在粘滞流体中, 完全的协强张量是 $-p\delta_{ik} + p_{ik}$, 即

$$\begin{bmatrix} p_{11} - p & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} - p & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} - p \end{bmatrix}. \quad (56.4)$$

仿照(48.1), 得到粘滞流体的动力学基本方程

$$\begin{cases} \rho \frac{dv_x}{dt} = f_x + \frac{\partial}{\partial x}(p_{11} - p) + \frac{\partial}{\partial y} p_{12} + \frac{\partial}{\partial z} p_{13}, \\ \rho \frac{dv_y}{dt} = f_y + \frac{\partial}{\partial x} p_{21} + \frac{\partial}{\partial y}(p_{22} - p) + \frac{\partial}{\partial z} p_{23}, \\ \rho \frac{dv_z}{dt} = f_z + \frac{\partial}{\partial x} p_{31} + \frac{\partial}{\partial y} p_{32} + \frac{\partial}{\partial z}(p_{33} - p). \end{cases} \quad (56.5)$$

按照(56.1)将 p_{ik} 用 e_{ik} 表出, 又按定义(50.3)和(50.5)将 e_{ik} 用 v 表出, 一般 η 和 θ 随温度变化较快, 但若设 θ 与 η 可以看作常数时, 则(56.5)就成为

$$\begin{cases} \rho \frac{dv_x}{dt} = f_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \eta \nabla^2 v_x + (\eta + \theta) \frac{\partial}{\partial x} (\nabla \cdot v), \\ \rho \frac{dv_y}{dt} = f_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \eta \nabla^2 v_y + (\eta + \theta) \frac{\partial}{\partial y} (\nabla \cdot v), \\ \rho \frac{dv_z}{dt} = f_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \eta \nabla^2 v_z + (\eta + \theta) \frac{\partial}{\partial z} (\nabla \cdot v). \end{cases} \quad (56.6)$$

这可合并为矢量式

$$\rho \frac{dv}{dt} = f - \nabla p + \eta \nabla^2 v + (\eta + \theta) \nabla (\nabla \cdot v). \quad (56.7)$$

粘滞流体的动力学方程(56.7)叫作纳维尔-斯托克斯方程。

因为我们研究的是速度场, 所以纳维尔-斯托克斯方程(56.7)中的 d/dt 应当按(49.9)加以改写,

$$\rho \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \rho(\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{f} - \nabla p + \eta \nabla^2 \boldsymbol{v} + (\eta + \theta) \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{v}), \quad (56.8)$$

或者,利用(54.3)还可以进一步改写,

$$\begin{aligned} & \rho \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} - \rho \boldsymbol{v} \times (\nabla \times \boldsymbol{v}) + \rho \nabla \left(\frac{1}{2} v^2 \right) \\ & = \boldsymbol{f} - \nabla p + \eta \nabla^2 \boldsymbol{v} + (\eta + \theta) \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{v}). \end{aligned} \quad (56.9)$$

粘滞流体的纳维尔-斯托克斯方程(56.9)与无粘滞流体的欧拉方程(54.4)比较,方程(56.9)右边多出 $\eta \nabla^2 \boldsymbol{v}$ 和 $(\eta + \theta) \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{v})$ 两项。纳维尔-斯托克斯方程解起来更难一些。

不过,对于不可压缩粘滞流体在直圆管中的稳恒流动,纳维尔-斯托克斯方程的求解倒是不难的。事实上,由于 $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$ (不可压缩)和 $d\boldsymbol{v}/dt = 0$ (直管中稳恒流动)而且体力密度 $\boldsymbol{f} = 0$, 纳维尔-斯托克斯方程(56.7)成为

$$-\nabla p + \eta \nabla^2 \boldsymbol{v} = 0. \quad (56.10)$$

上式的 ∇p 和 \boldsymbol{v} 都是沿着管轴的。取圆柱坐标系 r, θ, z , 其中 z 轴就沿着管轴。这样一来, p 是 z 的函数, \boldsymbol{v} 是 r 的函数, $\nabla^2 \boldsymbol{v}$ 也沿着管轴,其大小为

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right).$$

于是,方程(56.10)成为

$$-\frac{dp}{dz} + \eta \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) = 0.$$

这正是(55.2),由此可解得管中流速分布如(55.5)以及管中流量如泊肃叶公式(55.6)。

本节的附录用纳维尔-斯托克斯方程研究球体匀速缓缓通过粘滞流体的情况,求得小球所受阻力

$$F = 6\pi\eta a v_0, \quad (56.11)$$

其中 a 是小球半径, v_0 是小球的速度。这叫作斯托克斯公式, 斯

托克斯公式在一些基本实验中起着很重要的作用，例如经典的密立根油滴实验(证实电荷有一最小单位即电子电荷)就用到斯托克斯公式。

(2) 雷 诺 数

关于流动的一些理论问题和工程问题需要进行模拟实验。在模拟实验中，不仅几何尺寸比原型缩小了，就是流速甚至于流体的种类都可以不同于原型。那么，在模型与原型之间，怎样作比较呢？或者，换成一般的提法，两种流动怎样才是流体动力学相似的呢？

为了回答流体动力学相似性这个问题，应该把纳维尔-斯托克斯方程用无量纲的形式写出。以不可压缩粘滞流体的稳恒流动为例，如果体力密度 $f = 0$ ，则纳维尔-斯托克斯方程(56.8)成为

$$\rho(\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} = -\nabla p + \eta \nabla^2 \boldsymbol{v}. \quad (56.12)$$

在所研究的速度场中取某个特征长度 a_0 和某个特征速度 v_0 。引入无量纲坐标

$$x_1 = \frac{x}{a_0}, \quad y_1 = \frac{y}{a_0}, \quad z_1 = \frac{z}{a_0},$$

则

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} &= a_0 \frac{\partial}{\partial x}, & \frac{\partial}{\partial y_1} &= a_0 \frac{\partial}{\partial y}, & \frac{\partial}{\partial z_1} &= a_0 \frac{\partial}{\partial z}, \\ \nabla_1 &= i \frac{\partial}{\partial x_1} + j \frac{\partial}{\partial y_1} + k \frac{\partial}{\partial z_1} = a_0 \left(i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} \right. \\ &\quad \left. + k \frac{\partial}{\partial z} \right) = a_0 \nabla. \end{aligned}$$

还引入无量纲速度

$$v_1 = \frac{v}{v_0}.$$

于是，以 $a_0/\rho v_0^2$ 遍乘(56.12)各项即得

$$(\mathbf{v}_1 \cdot \nabla_1) \mathbf{v}_1 = -\nabla_1 p_1 + \frac{1}{v_0 a_0 \rho / \eta} \nabla_1^2 \mathbf{v}_1. \quad (56.13)$$

其中

$$p_1 = \frac{p}{\rho v_0^2}$$

是无量纲压强。(56.13)就是无量纲的纳维尔-斯托克斯方程，其中出现的唯一的参数是

$$\frac{v_0 a_0}{\eta / \rho}.$$

通常把这参数称作**雷诺数**，记作 R ，

$$R = \frac{v_0 a_0}{\nu}, \quad (56.14)$$

式中

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \quad (56.15)$$

叫作**运动学粘滞系数**。

这样，两种流动，不仅其尺寸成比例，而且雷诺数相同，则它们的无量纲的动力学方程相同，因而是动力学相似的。

例如，关于管中流动是层流还是湍流的问题，就可用雷诺数来判断。如雷诺数不超过某个临界值，流动是层流；否则为湍流。在管口平直的情况下，临界雷诺数只有大约 1200。如将管口作成喇叭形，临界雷诺数可提高到 20000。

在其他条件相同的情况下，流体的粘滞系数越大，则雷诺数越小，有利于层流；密度越大，则雷诺数越大，有利于形成湍流。事实上，湍流是一种不稳定的流动。当流体质点由于某些原因而获得垂直于原来流速方向的横向分速度时，粘滞性有消除横向分速的趋势，惯性质量则有保持横向分速的趋势，所以前者有利于流动的稳定，后者不利于稳定。

(3) 边界层

对于不可压缩流体 ($\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$) 的无旋流动 ($\nabla \times \mathbf{v} = 0$)，

$$\nabla \cdot v = 0, \nabla^2 v = \nabla(\nabla \cdot v) - \nabla \times (\nabla \times v) = 0.$$

这就是说,粘滞流体的动力学方程(56.9)竟然完全等同于无粘滞性的动力学方程(54.4)!粘滞性不起作用!

说粘滞性不起作用,这话也不完全对。原来,边界条件是有差别的。例如,在静止的边界上,无粘滞流体的法向速度为零,切向速度是任意的,粘滞流体的法向速度和切向速度则都是零。不过,在流体内部,这两种流体的动力学方程相同,可以说粘滞性不起作用,粘滞流体的运动与无粘滞流体的运动相同。而在靠近边界的一层中,流动情况有所不同。我们将这一层称作**边界层**。从流体内部跨过边界层到达边界上,切向速度就降到零。

粘滞系数小,边界或浸在流体中的物体大,且流速快,则边界层的厚度就小,从而流动的绝大部分是在边界层以外,与无粘滞流动很少差别。例如 §53 关于飞机升力的定性解释(图 12-10)就完全按照理想流体来处理,并没有说到粘滞性。

[附] 球体所受粘滞阻力

这里研究半径为 a 的球以匀速 v_0 缓缓通过不可压缩粘滞流体,并推导球体所受粘滞阻力的斯托克斯公式(56.11)。

这个问题采用球体作为参考系统比较方便。相对于这个参考系统,球是静止的,流体则迎面流来,从球的两侧绕过而继续流动,这就成为绕流问题,而且这绕流是稳恒流动。在远离球体的地方,流速为 $-v_0$ 。

我们用纳维尔-斯托克斯方程(56.8)来研究这个绕流问题。由于是稳恒流动, $\partial v / \partial t = 0$; 由于流体不可压缩, $\nabla \cdot v = 0$; 由于流速缓慢, $\rho(v \cdot \nabla)^2 v$ 项含有流速的二次幂,与其他各项相比可以忽略。我们还假定作用于流体的体力密度 f 为零。于是,方程(56.8)简化为

$$-\nabla p + \eta \nabla^2 v = 0. \quad (56.16)$$

对(56.16)的每一项施行散度运算 $\nabla \cdot$, 由于 $\nabla \cdot v = 0$ 即得

$$\nabla^2 p = 0. \quad (56.17)$$

这就是说,压强 p 满足拉普拉斯方程。

我们用球坐标系来解拉普拉斯方程(56.17)。关于拉普拉斯方程的球坐

标系解法,读者可参看数学物理偏微分方程方面的书籍.

取球心作为球坐标系的极点,通过球心而沿着 $-v_0$ 的轴作为极轴. 这极轴是问题中的对称轴,流体中的压强 p 和流速 v 都与球坐标 (r, θ, φ) 中的“经度” φ 无关,就是说

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0. \quad (56.18)$$

这个“轴对称”性质还意味着流速 v 沿 φ 增长方向的分量

$$v_\varphi = 0. \quad (56.19)$$

在远离球体的地方,流速 v 沿 r 增长方向的分量 v_r 和沿 θ 增长方向的分量 v_θ 分别是

$$v_r|_{r \rightarrow \infty} \sim v_0 \cos \theta \quad v_\theta|_{r \rightarrow \infty} \sim -v_0 \sin \theta. \quad (56.20)$$

压强 p 作为拉普拉斯方程(56.20)的解,可用球函数表出. 考虑到“轴对称”性质(56.18),这里的球函数只限于 $\cos \theta$ 的勒让德多项式 $P_l(\cos \theta)$, 即

$$p = \sum_{l=0}^{\infty} A_l \frac{1}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta). \quad (56.21)$$

考虑到边界条件(56.20),其中 $\cos \theta$ 即 $P_1(\cos \theta)$,不妨揣想在(56.21)中只有 $l=1$ 的一项,即

$$p = A_1 \frac{1}{r^2} \cos \theta. \quad (56.22)$$

现在把(56.22)代入(56.16)去求解 v . 在轴对称条件(56.21)下,方程(56.16)在 r 增长的方向上的分量是

$$\frac{\eta}{r^2} \left[\frac{\partial^2 (r^2 v_r)}{\partial r^2} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \right] = -\frac{2A_1}{r^3} \cos \theta. \quad (56.23)$$

参照(56.20),我们假定

$$v_r = \frac{R_1(r)}{r} \cos \theta,$$

以此代入(56.23)得 $R_1(r)$ 的微分方程

$$r^2 \frac{d^2 R_1}{dr^2} + 2r \frac{dR_1}{dr} - 2R_1 = -\frac{2A_1}{\eta},$$

它的通解是

$$R_1(r) = \frac{A_1}{\eta} + Br + \frac{C}{r^2},$$

其中 B 和 C 是积分常数. 这样就求出了

$$v_r = \left(\frac{A_1}{2\eta r} + B + \frac{C}{r^3} \right) \cos \theta. \quad (56.24)$$

至于 v_θ 则容易从不可压缩条件 $\nabla \cdot v = 0$ 求得。事实上，在球坐标系中， $\nabla \cdot v = 0$ 在条件(56.21)下的表示式是

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \sin \theta) = 0,$$

即

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \sin \theta) = \left(-\frac{A_1}{2\eta r} - 2B + \frac{C}{r^3} \right) \sin \theta \cos \theta. \quad (56.25)$$

参照(56.20)，我们假定

$$v_\theta = R_2(r) \sin \theta,$$

以此代入(56.25)即解得

$$R_2(r) = -\frac{A_1}{2\eta r} - B + \frac{C}{2r^3}.$$

这就求出了

$$v_\theta = \left(-\frac{A_1}{2\eta r} - B + \frac{C}{2r^3} \right) \sin \theta. \quad (56.26)$$

接下来的问题是确定积分常数。以(56.24)和(56.26)代入边界条件(56.20)就定出积分常数 B ，

$$B = v_0.$$

在球面上还有边界条件

$$v_r|_{r=a} = 0, \quad v_\theta|_{r=a} = 0.$$

以(56.24)和(56.26)代入球面上的边界条件，得

$$\frac{A_1}{2\eta a} + v_0 + \frac{C}{a^3} = 0, \quad -\frac{A_1}{2\eta a} - v_0 + \frac{C}{2a^3} = 0.$$

由此解得积分常数 A_1 和 C ，

$$A_1 = -\frac{3}{2} v_0 \eta a, \quad C = \frac{1}{2} v_0 a^3.$$

到这里，我们已将绕流问题解出：

$$\begin{cases} v_r = \left(-\frac{3}{2} \frac{a}{r} + 1 + \frac{1}{2} \frac{a^3}{r^3} \right) v_0 \cos \theta, \\ v_\theta = \left(\frac{3}{4} \frac{a}{r} - 1 + \frac{1}{4} \frac{a^3}{r^3} \right) v_0 \sin \theta, \\ p = -\frac{3}{2} \eta a \frac{1}{r^2} v_0 \cos \theta. \end{cases} \quad (56.27)$$

在球面上,

$$p|_{r=a} = -\frac{3}{2}\eta\frac{1}{a}v_0\cos\theta.$$

由于轴对称,球面上的压强分布的合力是沿着 z 轴的阻力

$$\begin{aligned} F_1 &= \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} (-p\cos\theta)|_{r=a} a^2 \sin\theta d\theta d\varphi \\ &= 3\pi\eta a v_0 \int_0^{\pi} \cos^2\theta \sin\theta d\theta = 2\pi\eta a v_0. \end{aligned} \quad (56.28)$$

我们还需要计算粘滞应强张量在球面上的分布(参看图 12-17)的合力

$$\begin{aligned} F_2 &= \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} (p_{rr}\cos\theta - p_{r\theta}\sin\theta)|_{r=a} a^2 \sin\theta d\theta d\varphi \\ &= 2\pi a^2 \int_{\theta=0}^{\pi} (p_{rr}\cos\theta - p_{r\theta}\sin\theta)|_{r=a} \sin\theta d\theta. \end{aligned} \quad (56.29)$$

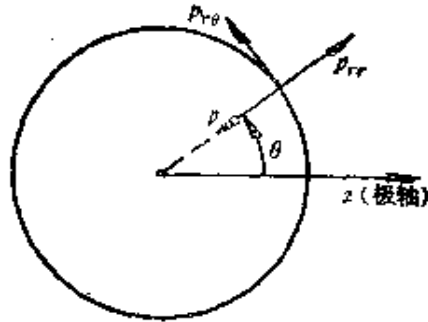


图 12-17

按照(56.3),

$$p_{rr} = 2\eta\dot{\epsilon}_{rr}, \quad p_{r\theta} = 2\eta\dot{\epsilon}_{r\theta}, \quad (56.30)$$

而

$$\begin{cases} \dot{\epsilon}_{rr}|_{r=a} = \frac{\partial v_r}{\partial r}|_{r=a} = 0, \\ \dot{\epsilon}_{r\theta}|_{r=a} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v_r}{r\partial\theta} + \frac{r\partial\theta}{\partial r} \right]_{r=a} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial\theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} v_\theta \right]_{r=a} \\ = -\frac{3}{4} \frac{1}{a} v_0 \sin\theta. \end{cases}$$

以这里算出的 $\dot{\epsilon}_{rr}|_{r=a}$ 和 $\dot{\epsilon}_{r\theta}|_{r=a}$ 代入(56.30); 又将其结果代入(56.29), 即得

$$F_2 = 3\pi\eta a v_0 \int_0^{\pi} \sin^3\theta d\theta = 4\pi\eta a v_0. \quad (56.31)$$

将(56.28)和(56.31)相加,终于得到球体粘滞阻力的斯托克斯公式

$$F = F_1 + F_2 = 6\pi\eta a v_0.$$

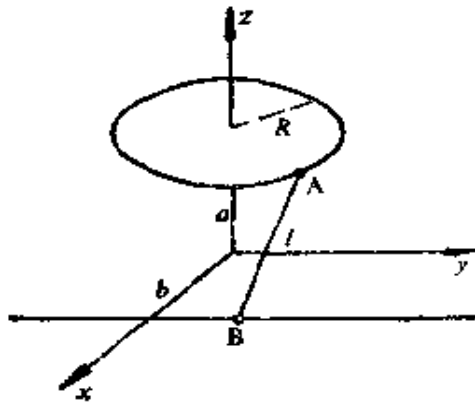
附 录

习 题

1. 矢量力学

1.1 火车以 15 米/秒的速度行驶，途中要在某站暂停一分钟，设火车刹车时的加速度为 -0.3 米/秒²，启动时的加速度为 0.5 米/秒²，问这次暂停总共耽误多少时间？

1.2 杂技演员单手将三个球轮流循环上抛，设各球上升达 1.25 米，求相继两次抛球的时间间隔。



题 1.3

1.3 质点 A 以匀速 v_0 在圆周 $x^2 + y^2 = R^2, z = a$ 上运行，它通过长为 l 的杆带动质点 B 在直线 $x = b, z = 0$ 上滑动，求质点 B 的速度。

1.4 小船在水中滑行，受水的阻力而逐渐停止，经测得速度 $v \propto 1/(t + c)$ ， c 为常数，求小船的加速度与速度的关系。

1.5 一人以 1.5 米/秒的速度向东行走，觉得风从正北吹向正南，当他加快到以 3 米/秒的速度向东行走时，则觉得风从东北吹向西南，求风向和

风速.

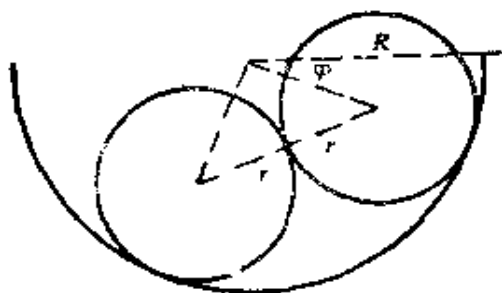
1.6 质点在平面上运动,速度矢量与加速度矢量的夹角 α 保持不变.试证在此情况下, $v e^{-\alpha \theta} = \text{常数}$, 这里 v 是速率, θ 是轨道切线的方位角.

1.7 质点作平面运动,其速度的 x 分量 v_x 保持不变.试证加速度 $a = v^3/v_x R$, R 是曲率半径.

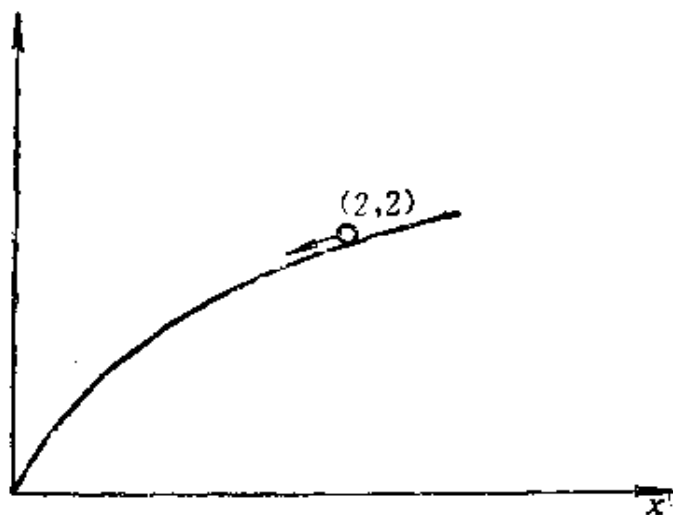
1.8 质点作平面运动,其加速度矢量 \mathbf{a} 始终通过某个定点 O .试证 $\mathbf{a} = v dv/d\rho$, ρ 是质点与 O 的距离.

1.9 证明球坐标系是正交坐标系,并求出元弧长的平方 $(ds)^2$ 在此坐标系中的表示式.

1.10 在半径为 R 的光滑圆槽内放进两个光滑圆柱,两柱的半径都是 r ,但重量分别为 P_1 和 P_2 .试求两柱平衡时的角 φ ,并求两柱对槽的压力.



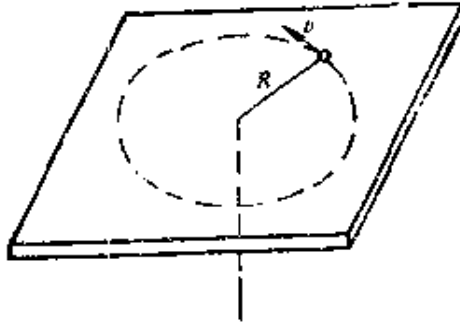
题 1.10



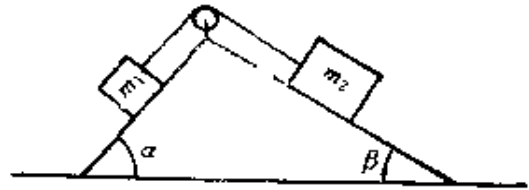
题 1.12

1.11 在光滑水平桌面上运动的质点的质量为 m ，系于绳的一端，绳子穿过桌面上的小孔到桌下，手拉绳的下端，使这一端以匀加速 a ，向下运动，求绳中张力，此时桌面上的绳长为 R ，质点的速度为 v 。

1.12 质点沿光滑抛物线 $y^2 = 2x$ 无初速地滑下，质点的初始坐标为 $(2, 2)$ ，问质点在何处脱离抛物线。



题 1.11



题 1.13

1.13 光滑三棱柱放在光滑水平桌面上，不可伸长的绳绕过棱脊的轻滑轮，两端各系着质量为 m_1 和 m_2 的物体，这两物体分别在棱柱的两个光滑斜面上，求解两物体和棱柱的运动情况。

1.14 在匀强电场中有一带电质点，其质量为 m ，带电荷 e ，初速为零，电场强度 E 随时间而变化的规律是 $E = A \sin \omega t$ ，求解质点的运动，质点的重量远远小于电场力，可以略去。

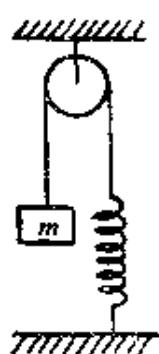
1.15 研究单摆的运动，它的悬挂点并非固定，而是 (i) 沿竖直圆周作匀速运动；(ii) 在竖直方向按 $A \cos \Omega t$ 的规律运动， A 和 Ω 是常数；(iii) 在水平方向按 $A \cos \Omega t$ 的规律运动；(iv) 系在一个质量与摆球相同的小环上，小环套在光滑水平钢丝上。

1.16 弹簧的自然长度为 l_1 ，劲度系数为 k_1 ，上端固定，下端挂着质量为 m_1 的质点。这质点又挂着另一弹簧，其自然长度为 l_2 ，劲度系数为 k_2 ，下端挂着质量为 m_2 的另一质点，求解两质点的运动情况。

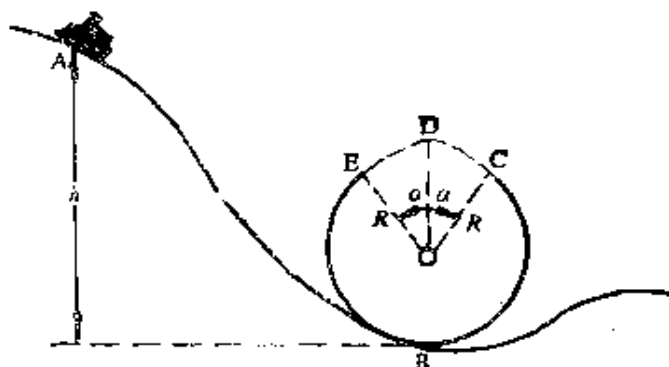
1.17 轻绳绕过轻滑轮，一端挂着质量为 m 的质点，另一端通过劲度系数为 k 的弹簧与地面连接，求解质点的运动情况。

1.18 弹性绳的劲度系数 $k = 24$ 千克/米，水平放置，一端固定在壁上，另一端系着 $m = 0.3$ 千克的物体，物体置于粗糙水平面上，摩擦系数为 $\mu = 1/4$ 。挪动物体使绳伸长 $A = 0.01$ 米然后放手，试问当弹性绳的长度

恢复到自然长度时,物体的速度多大?



题 1.17



题 1.22

1.19 单摆必须振幅很小才是作谐振动. 如果要求不论振幅大小总是作谐振动, 质点应改在什么样的曲线止运动?

1.20 小船以匀速 v_0 行进. 撤去动力, 由于水的阻力, 小船将逐渐减慢, 设水的阻力正比于船速. 问小船的速度按怎样的规律变化? 什么时候停下来? 停下来之前共通过多少路程?

1.21 用细线悬挂 0.1 千克的摆球. 手持摆球使悬线与竖直方向成 θ_0 角, 放手任其摆动. 如细线最多只能承受 0.2 千克, 要避免细线被拉断, θ_0 的值最大多少?

1.22 飞车表演: 车从高度 h 的 A 点沿光滑轨道滑下, 在 B 点进入竖直圆形轨道, 轨道在 C 中断, 飞车作抛物线运动, 恰好在 E 重新进入圆形轨道. $\angle COD = \angle DOE = \alpha$. 试求完成上述表演的适当的 h . 如要使这 h 尽可能地小, α 角应为多大?

1.23 光滑细钢丝, 弯成一条尖点朝上的摆线 $x = a(\theta + \sin \theta)$, $y = a(1 - \cos \theta)$. 有一质点穿在这钢丝上, 求解它的运动情况. 如钢丝是粗糙的, 它与质点之间的摩擦系数为 μ , 又如何?

1.24 在塔顶上, 许多弹子以相同的初速同时从同一地点向四面八方散去, 问在其后任一时刻, 此等弹子将联成怎样的曲面?

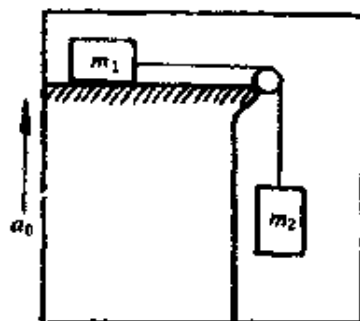
1.25 以匀加速 a_0 行驶的车厢中有一单摆. 手扶摆球使摆绳竖直向下, 放手任其摆动, 求解单摆的运动. 设已知 $a_0 \ll g$.

1.26 竖直弹性杆上端有一圆球, 其质量为 2.5 千克. 球左右偏离时, 杆使球趋向平衡位置的恢复力正比于所偏离的距离. 当偏离距离为 1 厘米

时,恢复力为 0.1 千克. 如底座作振幅为 1 毫米、周期为 1.1 秒的谐振动,求圆球的振幅.



题 1.26

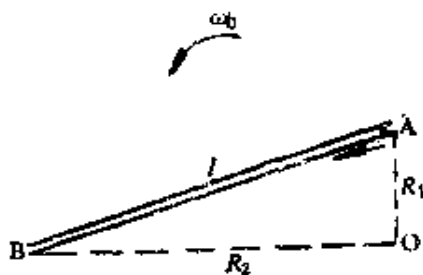


题 1.27

1.27 电梯内桌面上有一物体 m_1 , 系在轻绳的一端, 轻绳绕过轻滑轮而悬挂着另一物体 m_2 . 桌上物体沿桌面滑动, 摩擦系数为 μ . 试求两物体的加速度以及绳中张力. 电梯以匀加速 a_0 上升.

1.28 等腰直角三角形 ABC 的直角顶点在 C, 三角形绕另一顶点 A 以匀角速 ω 转动. 某一质点 M 以不变的相对速度沿 BC 边运动. 三角形转一圈, 质点恰好从 B 到 C. 已知 BC 边长 l , 求质点 M 从 B 点出发时的“绝对”速度和“绝对”加速度.

1.29 炮弹沿平射弹道(即近似当作直线的弹道)飞行, 速度 $v_0 = 900$ 米/秒. 射击处在纬度 $\varphi = 60^\circ$. 目标在 18 公里远处, 求地球自转所引起的炮弹偏差. 略去空气阻力不计.



题 1.30

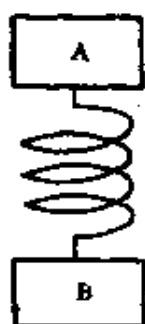
1.30 直管 AB 长 l , 以匀角速 ω 绕固定点 O 在水平面内转动. 管的内壁是光滑的. 管内有一质点, 开始时它在 A, 相对速度 v' , 指向 B 端. 求解质点的运动, 它对管的压力, 离管所需时间.

1.31 直管放在光滑水平面上. 管内有一质点, 它与管的内壁之间的摩

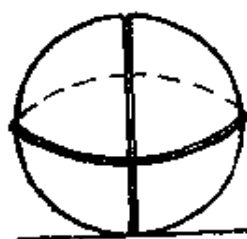
擦系数为 μ ，管与质点的质量分别为 M 与 m ，管长 l ，开始时，管的转动角速度为 ω_0 ，质点距管的中点的距离为 a ，初速为零，求解质点在管中的运动。

1.32 轮船以 20 公里/小时匀速航行，发动机功率 5000 马力，机械效率为 60%，求轮船所受阻力。

1.33 列车全重 500 吨，功率 600 千瓦，所受阻力为 50 吨，(i) 当列车速度为 1 米/秒之时，加速度多大？(ii) 最高速度多大？(iii) 列车初速为零，求解列车运动情况。



题 1.34



题 1.41

1.34 物体 A 和 B 的质量相等，用多大的力将 A 掀下，放手后会使 B 跳起来？

1.35 列车的最后一节在行驶中脱离了列车，脱离后继续前进距离 l 而停止，设机车牵引力未变，最后一节停止时，列车在它前方多远？列车总质量为 M ，其中最后一节为 m 。

1.36 光滑斜坡与水平面作 α 角，火炮沿斜坡滑下距离 l 再向水平方向发射一炮弹，发射后的瞬时，炮身静止，设炮身重 P ，炮弹重 p ，求炮弹速度。

1.37 以 60° 仰角、10 米/秒的速度将小球向 3 米远处的竖直墙掷去，碰撞的恢复系数为 e ，求解碰撞后的运动。

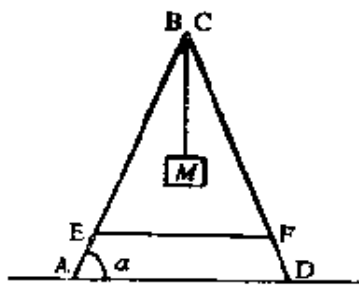
1.38 三个完全弹性的球静止地排列在一条直线上，打击第一球使它获得沿该直线的速度 v ，因而与第二球碰撞，第二球又与第三球发生碰撞，为使碰撞后第三球的速度尽可能大，第二球的质量应为多大？

1.39 手持匀质软绳的上端，让绳自由下垂，绳的下端恰好触及桌面，放手任绳下落，求绳在下落过程中对桌的压力。

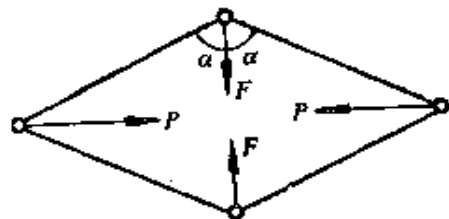
1.40 匀质软绳全长 l ，每单位长度质量为 ρ 。绳盘在地面上，绳尾系于轻气球。气球受升力 B 自地面升起，求解气球的上升情况。

1.41 匀质球，用竖直平面剖分为两半，再用绳沿着半腰捆起来放在光滑桌面上。求绳中张力[匀质半球的质心距离其底面 $(3/8)R$]。

1.42 AB 和 CD 是两根相同的棒，质量各为 m ，长度各为 l 。在 EF 之间又用绳拉紧， $AE = DF = l/n$ 。地面是光滑的。求绳中张力及棒两端所受的力。



题 1.42

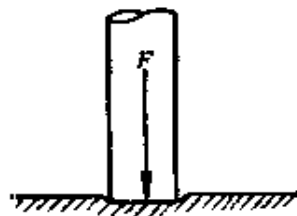


题 1.43

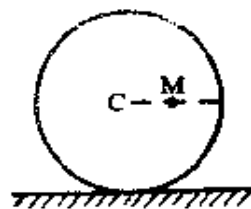
1.43 四根等长的轻杆，由铰链连结为菱形。力 F 将一对顶角拉紧，作用于另一对顶角的力 P 应为多大才得平衡？

1.44 轻三脚架放在光滑水平面上，着地点恰为等边三角形的顶点。三脚的长度同为 l ，与竖直线成同一角度 θ 。三角架承载重量 W 。为免三脚向外滑动，用绳环绕三脚的着地点成为等边三角形的绳圈，求绳中张力。

1.45 半端枢轴轴承如图。轴与轴承之间的压力 F 均匀分布在半径为 R 的圆截面上。如摩擦系数为 μ ，求摩擦力的力矩。



题 1.45



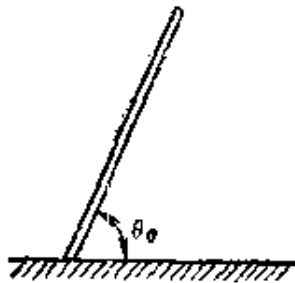
题 1.46

1.46 匀质厚圆盘竖立地站立在地面上，盘与地之间摩擦系数为 μ 。在盘的某个半径中点附着 一个质点 M ，其质量与盘相等。用手扶持圆盘使 M

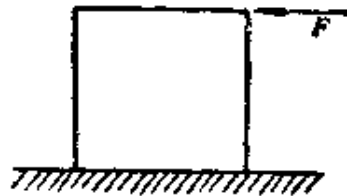
与圆心在同一高度。在放手的瞬间，如不发生滑动，盘的角加速度应为多大？不滑动的条件是什么？

1.47 两个匀质圆柱各自独立地绕它们自身的轴旋转，两轴互相平行，一个圆柱半径为 R_1 、质量为 M_1 ，另一个半径为 R_2 、质量为 M_2 。开始它们分别以角速度 ω_1 和 ω_2 沿同一方向转动，然后平移它们，使其互其接触。问当它们达稳定状态以后，每一圆柱的最终角速度为多少？

1.48 匀质棒下端放在粗糙地面，手持上端使棒与地面作 θ_0 角，放手后，棒即倒下，但棒的下端未滑动。求在放手的瞬间棒对地面的作用力。已知棒的质量为 m ，又，摩擦系数至少多大才不致滑动？



题 1.48

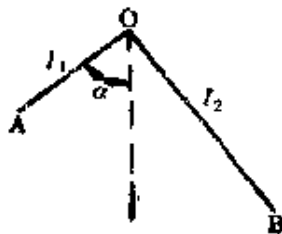


题 1.49

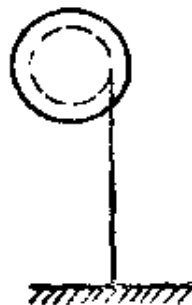
1.49 水平的力 F 作用于立方体的上表面，试图推倒它。立方体边长 l ，质量 m 。问立方体与地面的摩擦系数 μ 至少应为多大立方体才不致滑动？所加的力 F 应为多大？

1.50 矩形匀质薄板绕其一边摆动，此边与竖直方向作 θ 角。求摆动周期。

1.51 匀质直角尺 AOB 的平面是竖点的，可绕通过 O 点而垂直于 AOB 平面的水平轴左右摆动，同时又可绕通过 O 点的竖直轴线转动。设在绕竖直轴线匀速转动中，OA 边与竖直线的夹角稳定在 α ，试求转动的角速。



题 1.51



题 1.54

1.52 小球质量 m , 半径 R , 被水平地弹射出去, 质心速度 v_0 , 转动角速为零. 小球被弹射后即粗糙水平面上运动, 摩擦系数为 μ . 经多少时间才变为无滑动的滚动? 小球原先的动能最终如何分配?

1.53 小球静止在粗糙水平面上. 怎样敲击小球可使它一开始就作无滑动的滚动?

1.54 轮的半径为 R , 轴的半径为 r . 用柔软轻绳绕在轴上而将轮轴悬挂起来, 就成为麦克斯韦滚摆. 求轮轴下降阶段或上升阶段的加速度.

1.55 匀质梯子下端放在光滑地面上, 上端靠在光滑墙上. 手扶梯子, 使与地面作 θ_0 角. 放手任其滑下. 滑到何处梯的上端将离开墙面?

1.56 粗糙的半球形碗, 半径为 R . 有半径为 r 的小球从碗边无初速地从碗边向下滚动. 求这小球经过碗底的速度.

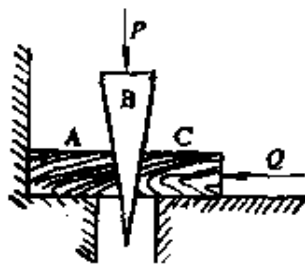


题 1.57

1.57 半圆柱的平面是光滑的, 放在光滑水平面上. 柱的凸面是粗糙的, 有半径为 r 的小球从柱的最高点无初速无滑动地滚下. 小球滚到何处将脱离大球?

2. 达朗伯原理

2.1 用虚功原理求解 1.10, 1.41, 1.42, 1.43 以及 1.44 等问题.



题 2.2

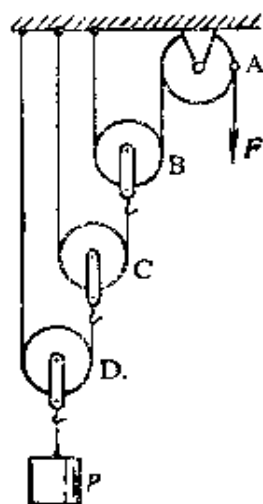


题 2.3

2.2 顶角为 2α 的尖劈 B 插入 AC 之间, 劈上受到力 P 作用, 问应以多大的力 Q 才可以抵住 C 不动? 设各个接触面都是光滑的.

2.3 内燃机以及曲柄连杆机构. 汽缸中气体压强为 p , 大气压强为 p_0 , 活塞为圆形, 半径为 R . 问由于气体推动活塞, 连杆将以多大的力转动曲柄?

2.4 一组滑车由定滑轮 A 与动滑轮 B, C, D 组成. 为支持重为 P 的物体, 应以多大的力 F 施于绳端? 每个动滑轮的重量均为 p , 摩擦力均可不计. 试对 n 个动滑轮的情况作出推论.



题 2.4



题 2.5

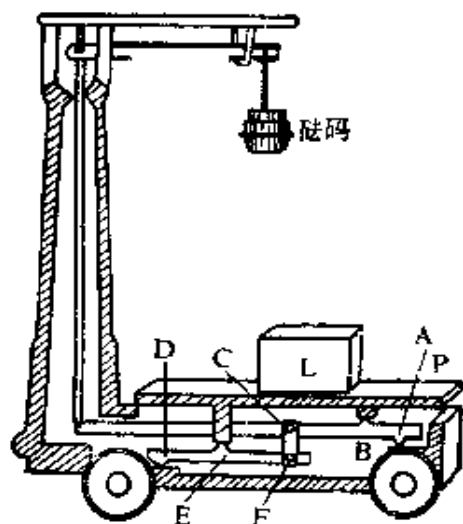
2.5 光滑钢丝弯成半径为 R 的半圆形并竖直放置. 钢丝上穿着两个质点, 其重量分别为 P 与 Q , 两质点由长度为 $2l$ 的不可伸长的轻绳连起来. 求平衡时绳与水平面所作角度 θ .

2.6 光滑圆锥的顶角为 2α , 圆锥的轴是竖直的, 锥尖朝上. 圆锥上套着一个弹性圈, 圈的重量为 W , 自然长度为 L , 劲度系数为 k . 试求弹性圈平衡时与锥尖的距离.

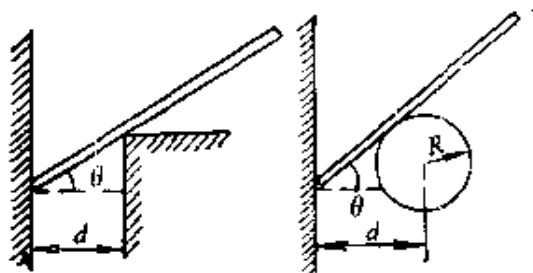
2.7 图为磅秤结构示意图. 物体 L 放在平台上, 物体以及平台的重量由刀口 B 和 E 分担, 并通过杠杆组的作用由砝码表示出来. 物体不论放在平台上什么位置, 磅秤应给出同一结果. 试证明, 这就要求 $AB:BC = DE:EF$.

2.8 长为 $2l$ 的匀质杆, 一端抵在光滑墙上, 杆身斜靠在 (i) 与墙相距 d 的光滑棱角上, (ii) 柱轴与墙相距 d 而半径为 R 的光滑圆柱上. 求杆与水

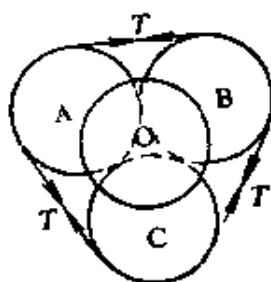
平面所夹角度 θ 。



题 2.7



题 2.8



题 2.9

2.9 三个完全一样的匀质球放在光滑水平面上，彼此相切，用一根绳子在球心的高度缠绕三球，将它们捆扎起来，又将第四个相同的球放在三球之上，求绳中张力 T ，已知每个球的重量为 P 。

2.10 光滑半球形碗是固定的，匀质棒长为 L ，斜靠在碗边，棒的下端为碗所承托，上端则伸出碗外，试求棒的平衡位置，在怎样的条件下才有可能平衡？

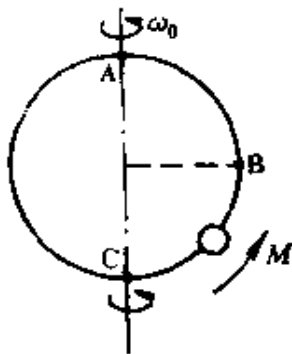
2.11 用达朗伯原理求解 1.13, 1.17 以及 1.51 等题。

3. 拉格朗日动力学

3.1 按拉格朗日方式求解 1.13, 1.16, 1.17, 1.54 等题以及 57 例 3 和

例4.

3.2 半径为 R 的光滑钢丝圆圈以匀角速 ω_0 绕竖直直径转动, 质点 M 穿在圆圈上. (i) 写出质点的拉格朗日方程. (ii) 设质点开始时在圆圈最低点 C , 它的初速恰足以使它上升到圆圈的最高点 A . 试计算质点从 C 到 B 所花时间. (iii) 求质点在圆圈上的平衡位置, 并求在平衡位置附近作小振动的频率. (iv) 求出 ω_0 的临界数值 ω_c , 它将质点的运动划分为两种类型. 从物理上阐释这种划分的意义.



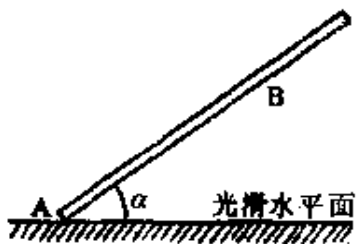
题 3.2



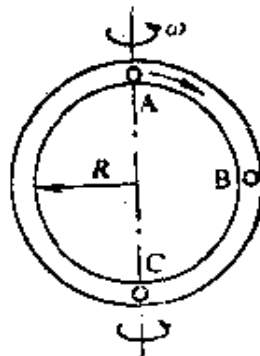
题 3.3

3.3 匀质绳, 长为 l , 一半搁在光滑桌面上, 另一半垂挂于桌外. 绳无初速落下. 问在绳全部离开桌面的瞬间, 绳的速度多大?

3.4 用手扶持匀质杆 AB 使斜立于光滑水平面上. 放手任杆倾倒. 求解杆的运动. 已知棒长为 $2l$.



题 3.4



题 3.5

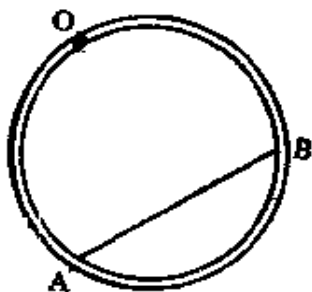
3.5 空心圆环可绕竖直轴 AC 自由转动, 转动惯量为 I . 环的半径为 R . 环的初始角速度为 ω_0 , 质量为 m 的质点静止于环内 A 点. 由于微小于扰, 小球向下滑动. 问质点滑到 B 点和 C 点时, 环的角速度和质点的速度各

是多大? 环的内壁是光滑的。

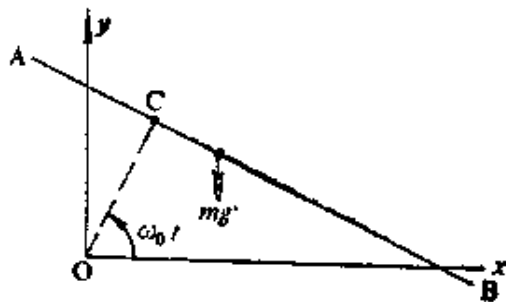
3.6 半径为 r 的匀质柱在半径为 R 的柱形槽内作无滑动的滚动, 写出这种滚动的拉格朗日方程。试求这匀质柱在槽底附近作小幅度摆动的周期。

3.7 试推导球坐标系中的质点运动方程。

3.8 匀质圆环, 半径为 R , 质量为 M , 可绕通过 O 点而垂直于环面的水平轴自由转动。匀质杆 AB , 长为 l , 质量为 m , 两端 A 和 B 在环上自由滑动。试求解这一系统的运动情况。



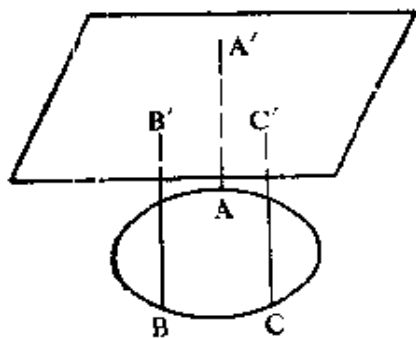
题 3.8



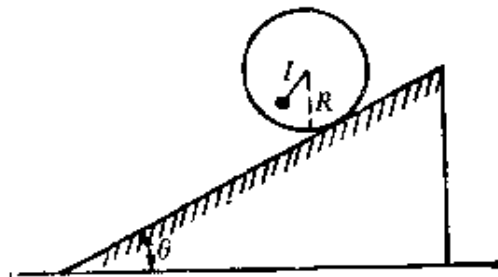
题 3.11

3.10 圆环以匀角速 ω 绕通过环上一点而垂直于环面的竖直轴转动。一质点穿在环上, 试求解这质点的运动。环与质点的接触是光滑的。

3.11 细杆 AB 绕 O 点以匀角速 ω 在竖直面里转动。求解质点的运



题 3.12



题 3.13

动情况 $q(t)$, 已知初始条件 $q(0) = 0, \dot{q}(0) = 0$.

3.12 匀质圆环水平地悬挂着, 三根悬线的长度都是 l . 在环平衡时, 悬线都是竖直的, 悬线系在环的 A, B, C 三点, 这三点恰将环三等分. 试求此环小幅度扭转振动的频率.

3.13 质量为 M 的楔子置于光滑的水平桌面上, 楔子底面是光滑的, 斜面却是粗糙的, 质量为 m , 而半径为 R 的圆柱体沿着楔子斜面无滑动地滚下. 求解楔子和圆柱体的运动.

圆柱具有很轻的细轴, 这轴又悬挂着一个单摆, 摆长 $l (< R)$, 摆球质量为 m_1 . 写出这系统的拉格朗日方程.

3.14 质量为 m 的质点连结于不可伸缩的轻杆的一端, 杆的另一端则可绕固定点向任意方向自由运动, 这一装置叫作球摆. 试求解球摆的运动.

3.15 试证对于冲击作用, 拉格朗日方程成为

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right)_* - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right)_\# = S_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, \dots, r),$$

这里 S_α 是广义冲击力 Q_α 的冲量, 即 $\int_{t_0}^{t^*} Q_\alpha dt$.

3.16 由拉格朗日函数(13.12)出发, 写出相应的拉格朗日方程.

3.17 由拉格朗日函数(13.8)出发, 写出相应的拉格朗日方程.

3.18 质点无初速地从光滑的静止大球顶端滑下. 问滑到何处, 质点就会脱离球面飞出?

3.19 光滑钢丝弯成抛物线, 其轴是竖直的, 顶点在下. 质点沿这抛物线滑下, 试证质点对钢丝的压力正比于质点所经处的曲率.

4. 有心力 散射

4.1 试对轨道微分方程(14.12)进行变数代换 $\rho = 1/u$, 从而导出如下形式的轨道微分方程:

$$\frac{1}{2} m' h^2 \left[\left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 + u^2 \right] + V \left(\frac{1}{u} \right) = E',$$

将上列方程逐项对 u 微分, 推导如下形式的轨道微分方程即所谓比内公式:

$$m' h^2 \left[\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u \right] = -F \left(\frac{1}{u} \right).$$

4.2 已知质点在有心力作用下的轨道是螺线 $\rho = k\theta^2$, 这里 k 是常数. 试求它所受的有心力的表示式 $F(\rho)$.

4.3 已知质点在有心力作用下的轨道是对数螺线 $\rho = ke^{a\psi}$, 这里 k 和 a 都是常数, 试求它所受的有心力的表示式 $F(\rho)$.

4.4 已知质点在有心力作用下的轨道是通过力心的圆, 试证质点所受有心力是 ρ^{-3} 吸引力.

4.5 求解质点在有心力 $F(\rho) = -k\rho$ 作用下的运动, k 是正的常数.

4.6 求解质点在有心力 $F(\rho) = k\rho$ 作用下的运动, k 是正的常数.

4.7 质点在有心力场中运动, 场中的势能

$$V(\rho) = -k \frac{e^{-\alpha\rho}}{\rho},$$

其中 k 和 α 都是正的常数. 试求力的表示式 $F(\rho)$, 对质点的运动情况进行定性的讨论, 并求质点作圆运动的周期和径向微振动的周期.

4.8 质点在平方反比引力场 $F(\rho) = -k/\rho^2$ 中作圆运动. 如 k 突然变为原来数值的一半. 试证质点的轨道将成为抛物线.

4.9 两质点由于万有引力的作用, 互相环绕作圆运动, 周期为 τ . 假如两者在运行中突然停止, 试证两者将在 $\tau/4\sqrt{2}$ 的时间相撞.

4.10 某个彗星在地球轨道平面里沿抛物线运动, 其近日点在地球轨道以内. 把地球轨道(假定为圆)的半径与彗星近日距离之比记作 $n(n > 1)$, 试证彗星运行在地球轨道以内的时间为

$$\frac{1}{3\pi} \frac{n+2}{n} \sqrt{\frac{2(n-1)}{n}} \text{年}.$$

4.11 质点在平方反比引力场中沿椭圆轨道运动. 如质点的最大角速度与最小角速度之比为 n , 试证轨道离心率为 $(\sqrt{n} - 1)/(\sqrt{n} + 1)$.

4.12 质点在有心力场中运动. 这有心力基本上是平方反比引力, 但附加有 ρ^{-3} 的摄动,

$$F(\rho) = -\frac{k^2}{\rho^2} + \frac{C}{\rho^3},$$

这里 k^2 和 C 是常数. 试证质点的轨道方程可表为

$$\rho = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \alpha\psi}.$$

这是椭圆, 但因 $\alpha \neq 1$, 这椭圆是进动的, 试在 $\alpha \approx 1$ 的条件下推导椭圆进动速率的公式.

4.13 在地球上以第三宇宙速度 v_3 正对太阳方向发射一行星 (“正对太阳”是指相对地球而言), 试求轨道方程(地球轨道近似看成圆).

4.14 由于核电荷部分地被原子中的电子所屏蔽, 屏蔽库仑势为 $V(r) = -e^{r/a}(k/r)$, 其中 $k > 0$ ($k = Ze^2$, Z 为原子序数), $a > 0$. 试讨论电子在上述位势中作圆运动的稳定性条件.

4.15 一质量为 m 的质点, 受到 $F(r) = -(k/r)\exp(-r/a)$ 的力作用, 试求在此力场中圆轨道稳定性的条件.

4.16 证明中心力场中圆轨道稳定的条件是

$$\frac{F'(r_0)}{F(r_0)} + \frac{3}{r_0} > 0$$

$F(r)$ 为力函数, r_0 为圆轨道半径.

4.17 在散射问题中, 如果不是平方反比斥力, 而是平方反比引力, 试推导偏转角的公式.

4.18 试研究立方反比斥力 $F(\rho) = k\rho^{-3}$ 的散射问题. 试证散射截面

$$\sigma(\theta) = \frac{k\pi^2}{2E} \frac{\pi - \theta}{\theta^2(2\pi - \theta)^2 \sin \theta}.$$

4.19 在核子物理中常用矩形势阱, 它是一种有心力场的势能

$$V(\rho) = \begin{cases} 0 & (\rho > a), \\ -V_0 & (\rho \leq a). \end{cases}$$

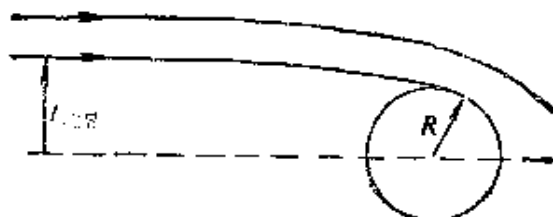
试证在古典力学中这种势阱的散射有如光线在球上的折射, 这球的半径为 a 而相对折射率

$$n = \sqrt{\frac{E + V_0}{E}},$$

并证散射截面

$$\sigma(\theta) = \frac{\pi^2 a^2 \left(n \cos \frac{\theta}{2} - 1 \right) \left(n - \cos \frac{\theta}{2} \right)}{4 \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + n^2 - 2n \cos \frac{\theta}{2} \right)^2}.$$

4.20 俘获截面. 宇宙飞船关闭了发动机, 以速度 v_0 航行. 飞船的目标是远处某一行星. 试求临界瞄准距离 $l_{\text{临界}}$, 只要瞄准距离小于这临界值,



题 4.20

就能在该行星上降落. πR^2 叫作该行星的俘获截面.

5. 微 振 动

5.1 求§7例4的微振动解.

5.2 求解题1.10和题1.56的微振动.

5.3 质量都是 m 的两个质点如图所示与三根弹簧相连接. 弹簧都是水平的. 两侧弹簧的劲度系数为 k , 当中弹簧的劲度系数为 K . 试求解这两质点的水平方向的运动.



题 5.3

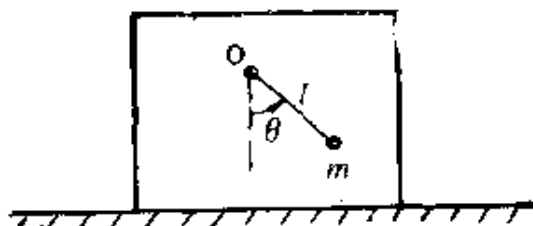
5.4 一滑块质量为 $2m$, 放在光滑水平面上, 滑块上 O 点系着一长为 l 而质量为 m 的单摆. 假定为平面运动, 求这系统的微振动解.

5.5 平面双摆的悬挂点并非固定, 而是系在质量为 M 的环上, 环套在光滑水平钢丝上. 试写出其拉格朗日方程, 并就 $M = 2m_1 = 2m_2$, 且 $l_1 = l_2$ 的特例求解.

求这装置微振动的解.

5.6 匀质环, 质量为 M , 半径为 R , 可绕通过环上一点而垂直于环面的水平轴自由转动. 质量为 m 的质点穿在环上, 可以自由滑动. 写出这系统的拉格朗日方程. 求微振动解.

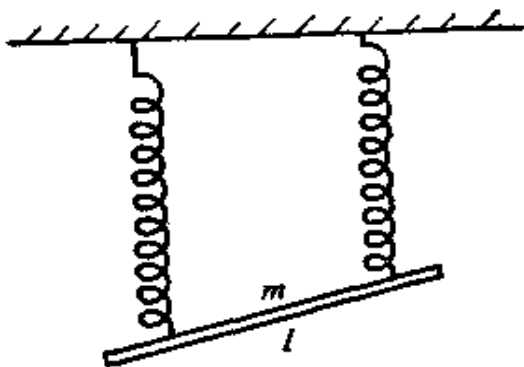
5.7 匀质矩形薄板, 边长为 a 与 b , 质量为 m . 四角各用一根弹簧悬挂起来, 这些弹簧的自然长度和劲度系数相同. 平衡时, 薄板是水平的而弹簧是竖直的. 试求解板的微振动. 在振动中, 质心只沿竖直线运动, 板面并



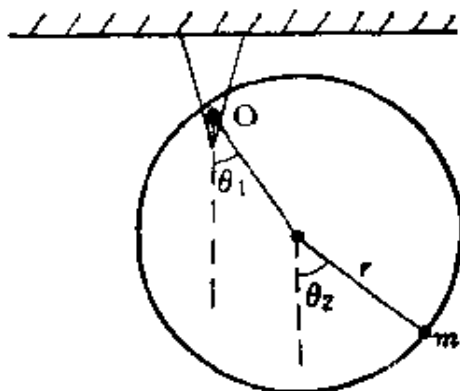
题 5.4

不保持水平。

5.8 某一力学系统作小振动。试将系统的动能和势能用简正坐标表
出。计算动能和势能的时间平均值，验证两者相等。



题 5.9



题 5.10

5.9 在两根轻弹簧(自然长度均为 l_0 , 弹性系数均为 k) 的下端悬一细
棒, 棒长为 l , 质量为 m , 因两弹簧拉伸情况不同而作微振动, 运动限在竖直
平面内, 求微振动解。

5.10 有一圆环可绕过定点 O 的水平轴自由转动, 质点 m 在圆环内无摩
擦地滑动。设运动限在竖直平面内, 求系统的微振动解。

6. 刚体力学

6.1 试证

$$I_{ij} = I'_{ij} + I^c_{ij} \quad (i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3)$$

其中 I_{ij} 和 I'_{ij} 分别是同一物体相对于点 O 和相对于质心的惯量张量, 而
 I^c_{ij} 则是该物体的质心相对于点 O 的惯量张量。

6.2 在通过某一物体质心的惯量主轴上取定一点 O 。试证通过质心的惯量主轴平行于通过点 O 的惯量主轴。

6.3 计算匀质椭球体 $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ 对于中心点 O 的惯量张量。

6.4 计算匀质长方形薄板对于中心点的惯量张量。($a > b > c = 0$, a, b, c 为长、宽、厚)

6.5 计算 6.4 题中长方形薄板对于其对角线的转动惯量。

6.6 匀质长方形薄板, 边长为 a 与 b , 质量为 m , 以匀角速 ω 。绕其对角线 AB 转动。求其顶点 A 和 B 处的轴承上所受的作用力。

6.7 匀质杆置于水平桌面上, 杆身垂直于桌边, 杆长的三分之二伸出桌外。放手后, 杆就以桌边为轴转动。将杆与水平面的夹角记作 θ 。试求 $\dot{\theta}$ 与 θ 的关系。设杆与桌边的摩擦系数为 μ , 试求开始滑动时的 θ 值。

6.8 轮船上的一个飞轮绕水平轴线转动, 角速度为 ω 。轮相对于其转轴的转动惯量为 I 。轮船正以速率 v 通过曲率半径为 R 的航线。试求两轴承上的动反作用力。两轴承相距 l , 飞轮位于它们的中点。

6.9 对称刚体作无外加力矩的定点运动。试证明: 动量矩 J 、角速度矢量 ω 以及刚体的对称轴三者共面。(参见图 6-13)

6.10 对称刚体作无外加力矩的定点运动。正文中解答式(25.2)指出, 角速度矢量 ω 在刚体坐标系中绕着对称轴进动, 进动角速度 Ω 为

$$\Omega = \frac{|I_2 - I_1|}{I_1} \omega_3$$

试证: (i) 角动量 J 在刚体坐标系中也以角速 Ω 绕对称轴进动。(ii) 取空间坐标系的 z 轴沿角动量 J , 则 $\dot{\theta} = 0, |\dot{\phi}| = \Omega, \dot{\phi} = I_2 \omega_3 / I_1 \cos \theta$ 。(iii) ω 绕 J 进动角速度亦为 $I_2 \omega_3 / I_1 \cos \theta$ 。 ω 与 J 的夹角 α 则由下式给出:

$$\sin \alpha = \frac{|I_2 - I_1|}{I_1} \sin \beta \cos \theta$$

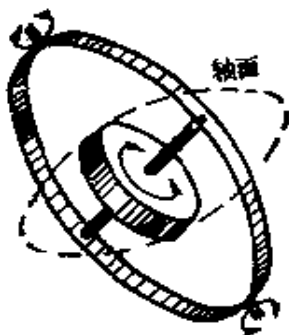
β 是 ω 与刚体对称轴的夹角。

6.11 对称刚体作无外加力矩的定点运动, 其转动惯量 $I_1 = I_2 = 2I_3$, 对称轴与 J 之间夹角为 $\theta = 60^\circ$ 。已知其自转角速度 $\dot{\phi}$, 试求其进动角速度。

6.12 非对称刚体作无外加力矩的定点运动, 这种定点运动的欧拉方程是(25.7)。试从(25.7)出发推导角动量守恒(25.8)和动能守恒(25.9)。

6.13 试研究“§26 对称重刚体的定点运动”的一个特例, 其中 $\theta = 0$ 。这

就是说,对称重刚体的对称轴竖直向上,而刚体绕着竖直的对称轴旋转。指出图 6-16 在这特例中的特点,把稳定的和不稳定的两种情况加以区分,证明稳定与否视 $4I_1 mgh/I_2^2 \omega_3^2$ 小于或大于 1 而定。



题 6.14

6.14 把对称刚体的对称轴装在一个环上,环可绕一根轴线转动,这使得刚体的对称轴只能在一个平面里,这平面就叫作轴面。使这装置的轴面与水平面重合,并使刚体绕其对称轴自转。刚体还参预了地球的自转。试利用欧勒方程证明,如刚体的自转远比地球的自转为快,则对称轴将在子午线左右

来回摆动,从而可以指示南北方向。

6.15 对称重刚体绕其竖直的对称轴作稳定的旋转。在距离支点为 d 的地方以垂直于对称轴的冲量 I 施加于刚体。求证此后最大章动角近似为 $2\arctg(I d/I_2 \omega_3)$ 。

6.16 用(26.1)式导出 $I_1 \ddot{\theta} = mgh \sin \theta - \dot{\phi}(J_3 \sin \theta - I_1 \dot{\phi} \sin \theta \cos \theta)$ 。

7. 哈密顿动力学

7.1 按哈密顿方式求解 1.13, 1.16, 1.17, 1.54 等题以及 §7 例 3 和例 4。

7.2 按哈密顿方式求解 3.2—3.14 题。

7.3 按哈密顿方式研究有心力问题。

7.4 按哈密顿方式研究对称重刚体的定点运动。

7.5 质点在势力场中运动,力场具有轴对称性。以这对称轴作为静止坐标系 $Oxyz$ 的 z 轴。又取一以角速 ω 绕 z 轴旋转的转动坐标系 $Ox'y'z'$ 。写出质点的哈密顿函数,这哈密顿函数要用质点相对于转动坐标系的坐标表出。说出这哈密顿函数的物理意义。它是否运动积分?

7.6 根据韦伯的电动力学观点,两电荷之间的作用力是

$$F(\rho) = \frac{1}{\rho^2} \left(1 - \frac{\dot{\rho}^2 - 2\rho\dot{\rho}}{c^2} \right).$$

设一质点受到上式所给出的有心力 $F(\rho)$ 的作用,试写出这质点的广义势能 U 、拉格朗日函数以及哈密顿函数。

7.7 验算 §31 例 1 的(8)式和例 2 的(4)式所给出的几个泊松括号。

8. 力学变分原理

8.1 §32例研究了初速为零的捷线问题, 请研究一下初速 $v_0 \neq 0$ 的捷线问题.

8.2 试求平面上给定两点之间的最短路径.

8.3 试求球面上给定两点之间的最短路径.

8.4 试应用光学中的费马原理研究光线在 xy 平面上的传播, 已知折射率 n 反比于坐标 y .

8.5 在 xy 平面上给定两点, 试用曲线把两点相联, 使联线绕 x 轴旋转所形成的曲面面积最小.

8.6 试用哈密顿原理研究有心力问题.

8.7 试由哈密顿原理直接导出复摆的运动微分方程.

8.8 在给定两点之间挂上一段匀质重绳, 试求绳在平衡时的形状.

8.9 根据雅可俾最小作用量原理, 求质量为 m 的质点在均匀重力场中的运动轨道.

9. 正则变换 哈密顿-雅可俾方程

9.1 验证 $Q = \log\left(\frac{1}{q} \sin p\right), P = q \cot p$ 是正则变换.

9.2 验证

$$\begin{cases} Q = \log(1 + q^{\frac{1}{2}} \cos p), \\ P = 2(1 + q^{\frac{1}{2}} \cos p)q^{\frac{1}{2}} \sin p \end{cases}$$

是正则变换, 并验证母函数是

$$U_2(p, Q) = -(e^Q - 1)^2 \cot p.$$

9.3 变换 $Q = q^\alpha \cos \beta p, P = q^\alpha \sin \beta p$ 中的参数 α 和 β 应取怎样的值, 变换才是正则的?

9.4 利用变换公式(22.5)试证

$$\frac{\partial p_\alpha}{\partial Q_\beta} = -\frac{\partial P_\beta}{\partial q_\alpha}, \quad \frac{\partial q_\alpha}{\partial Q_\beta} = \frac{\partial P_\beta}{\partial p_\alpha}, \quad \frac{\partial p_\alpha}{\partial P_\beta} = \frac{\partial Q_\beta}{\partial q_\alpha}, \quad \frac{\partial q_\alpha}{\partial P_\beta} = -\frac{\partial Q_\beta}{\partial p_\alpha}.$$

9.5 运用哈密顿-雅可俾方程研究均匀重力场中的抛射体问题(不计空气阻力).

9.6 运用哈密顿-雅可俾方程研究对称重刚体的定点运动。

9.7 三维谐振子,其三个方向的劲度系数各不相同。试用作用量变数-角变数方法求其频率。

9.8 各向同性三维谐振子,试分别在直角坐标系和球坐标系中用作用量变数-角变数方法求其频率。

9.9 试证,如单摆振幅不大,则单摆的能量 $E = Jf$ 。

如单摆在摆动过程中,摆长徐徐缩短(缩短的速率远远小于摆动频率)。试证 $J = E/f$ 保持为常数。

9.10 试推导§37末尾的作用量 $J_r, J_\theta,$ 和 J_ϕ 的表示式。

9.11 质量为 m 的质点在势场为 $V(x, y, z)$ 的空间运动。

(i) 写出这个系统的哈密顿-雅可俾方程

(ii) 用哈密顿-雅可俾方程求 $V = 0$ 的系统的运动规律。

9.12 质点在势场 $V = \frac{a}{r^2} - \frac{bs}{r^3}$ 中运动, r 为质点位矢长度, s 是位矢的 z 分量, a 和 b 是常数。求哈密顿主函数 S 和哈密顿特征函数 W 。

10. 弹性体

10.1 铜的极限强度为 40 千克/毫米²,密度 $\rho = 9 \times 10^{-3}$ 千克/厘米³,如截面是均匀的,则悬垂着的铜丝或竖立着的铜棒的长度最大多少?

10.2 铜杆长 60 厘米,钢杆长 40 厘米,两者的截面相同,都是 3 厘米²。两杆衔接为一根杆。在此复合杆两端加以 500 千克正压力,求杆中胁强。全杆缩短多少?

10.3 在 15°C 铺设的铁轨,到 -10°C 轨中胁强多大? 假定铺设后铁轨不能伸缩。已知线胀系数(温度每升高 1°C 所导致的相对伸长) $\alpha = 1.25 \times 10^{-6}$,而杨氏模量 $Y = 2 \times 10^4$ 千克/毫米²。

10.4 两段钢杆,其长分别为 l_1 和 l_2 , 截面分别为 S_1 和 S_2 。两段焊接为一根杆。在 t_0 °C 时将此复合杆两端固定。求 t °C 时此复合杆中胁强。已知这两钢杆的线胀系数为 α ,杨氏模量为 Y 。

10.5 匀质重杆上端悬挂起来。在自重 P 作用下,长度改变多少? 体积改变多少? 在它自由落下时又如何?

10.6 铜条长 1 米,重 2 千克,在光滑桌面上以匀角速 2 弧度/秒绕其一端转动。求铜条内各处的张力,并求铜条的伸长。

10.7 天平横梁长 $2l = 250$ 毫米, 截面为矩形, 水平边长 $a = 8$ 毫米, 竖直边长 $b = 10$ 毫米, 杨氏模量 $Y = 1.5 \times 10^4$ 千克/毫米². 天平最大荷重限制为 $p = 500$ 克. 求梁的最大弛垂度.

10.8 长为 $a + b$ 的轻杆, 两端支住, 在距一端为 a 处载有负荷 P . 求杆的最大弛垂度.

10.9 长为 l 的杆受弯曲力矩 M 作用, 计算杆中所储总能量.

10.10 空心圆杆的内半径是外半径的一半. 试求扭转力矩 M 作用下杆中最大切应力. 并与同样外径的实心杆或同样截面的实心杆比较.

10.11 长为 l 的杆受扭转力矩 M 作用, 计算杆中所储总能量.

10.12 某根杆的形变函数

$$\xi = -\frac{\sigma \rho g}{Y} xz, \eta = -\frac{\sigma \rho g}{Y} yz, \zeta = \frac{\rho y}{2Y} (z^2 + \sigma x^2 + \sigma y^2 - l^2).$$

大略描绘变形后的杆. 试求应变张量和应力张量. 验证它们满足平衡方程, 并对边界条件进行讨论.

10.13 对弹性体加以限制, 使它在受到 x 方向和 y 方向的外力作用时, z 方向长度不变. 试证

$$e_{11} = \frac{1}{Y_1} (p_{11} - \sigma_1 p_{22}), e_{22} = \frac{1}{Y_1} (p_{22} - \sigma_1 p_{11}),$$

式中

$$Y_1 = \frac{Y}{1 - \sigma^2}, \sigma_1 = \frac{\sigma}{1 - \sigma}$$

分别称为有效杨氏模量和有效泊松比.

11. 流体运动学

11.1 某一流动的拉格朗日描述是

$$\begin{cases} x = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \cos \left(\omega t + \operatorname{arctg} \frac{y_0}{x_0} \right), \\ y = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \sin \left(\omega t + \operatorname{arctg} \frac{y_0}{x_0} \right). \end{cases}$$

试改为用欧勒方式描述的速度场.

11.2 已知如下的速度场. 试描绘流线; 计算张变速率、切变速率和转动角速度; 如是无旋流动, 求出速度势; 判断流体是可压缩的还是不可压缩

的.

$$(i) v_x = \frac{kx}{x^2 + y^2}, v_y = \frac{ky}{x^2 + y^2}, v_z = 0 (k \text{ 是常数});$$

$$(ii) v_x = -\frac{ky}{x^2 + y^2}, v_y = \frac{kx}{x^2 + y^2}, v_z = 0 (k \text{ 是常数});$$

$$(iii) v_x = \frac{-2xyz}{x^2 + y^2}, v_y = \frac{(x^2 - y^2)z}{x^2 + y^2}, v_z = \frac{y}{x^2 + y^2};$$

$$(iv) v_x = -A + B \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{ky}{x^2 + y^2},$$

$$v_y = B \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{kx}{x^2 + y^2}, v_z = 0. (k, A, B \text{ 是常数});$$

$$(v) v_x = k a \rho^n e^{-k(n+1)\varphi}, v_y = a \rho^n e^{-k(n+1)\varphi}, v_z = 0$$

(k, n, a 是常数).

11.3 已知速度势为

$$(i) ax(x^2 - 3y^2) \text{ (常数 } a > 0),$$

$$(ii) -\frac{1}{2\pi} c\varphi \text{ (}\varphi \text{ 是极坐标中的极角, } c \text{ 是常数),}$$

试求速度场和流线.

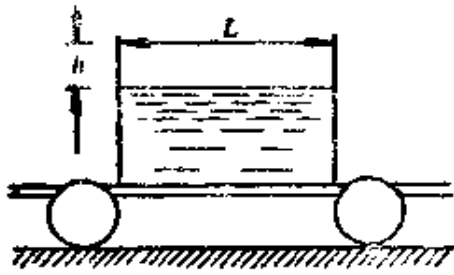
11.4 已知速度势为复变函数 $A \ln\left(z - \frac{1}{z}\right)$ 的实部, 其中常数 $A > 0$, 试求速度场和流线.

12. 流体动力学

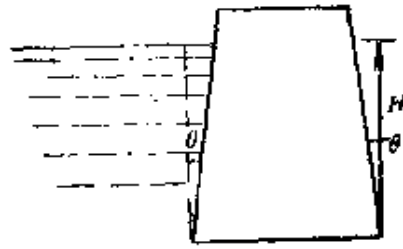
12.1 在静止流体中没有切应力. 试根据这条件从(47.4)导出(52.2). 在无粘滞流体中没有切应力. 试根据这条件从(48.1)导出(54.1).

12.2 小车上有一敞口水柜, 水柜沿小车行进方向的长度为 L . 当小车静止时, 水面在水柜的敞口下方 h 处. 今使小车以匀加速 a_0 前进, 试求水柜中水面形状. 为免水从敞口溢出, a_0 不得超过怎样的数值? 并求水中的压强分布.

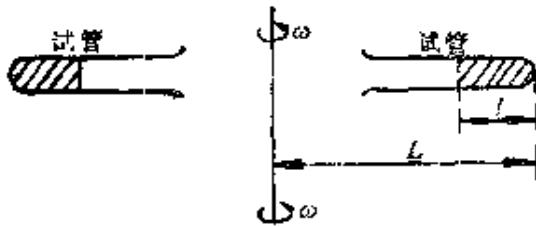
12.3 马德堡半球是半球形壳, 两个这种壳密合在一起构成空心球壳. 现将球壳中的空气尽行抽出, 问需用多大的力才能够把这两个壳分开? 已知球的半径为 R , 球外的大气压为 p_0 .



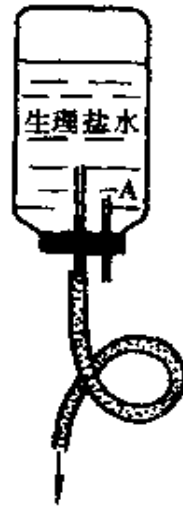
题 12.2



题 12.4



题 12.5



题 12.9

12.4 水坝为什么上窄下宽? 图示的水坝每米坝长所受水的压力为多大? 此压力对底边的力矩多大?

12.5 离心机高速旋转时, 试管几乎是水平的, 设试管内所盛液体的深度为 l , 液体密度为 ρ , 试管底与转轴距离为 L , 求试管底的压强。

12.6 气压公式(37.10)的推导中假定了气体温度均匀。试将这一假定改为 $p = C\rho^n$ (C 和 n 是常数, n 叫作多方指数), 从而推导修订的气压公式。

12.7 圆柱形光滑玻璃杯, 直径为 D , 杯中有一匀质棒, 棒长 $l (> D)$, 密度为 $\rho (< \text{水的密度 } \rho_0)$, 注水入杯, 使水深为 h , 求棒对杯的压力。

12.8 风正对一堵墙吹来, 风速 20 米/秒。设风吹到墙上并不弹回, 求风对墙的压强。(空气密度 1.3 千克/米³。)

12.9 图示静脉滴注生理盐水时使滴注速率保持一定的装置, 改变管口 A 的高度可以改变这速率, 试说明能保持速率一定的原理。

12.10 灭火唧筒向上喷水。喷嘴截面 1.5 厘米²，喷水的流量为 60 升/分钟。喷出的水柱在 2 米高处的截面多大？

12.11 大水槽侧壁开有一系列小孔。试证各孔射出的水到达地面的速率相等。

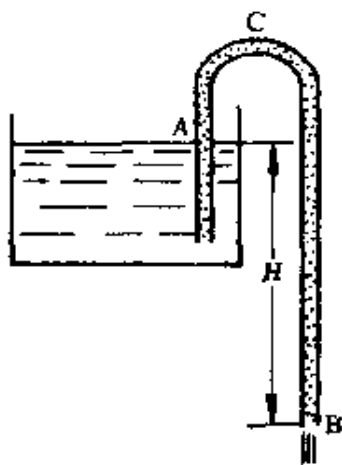
12.12 大水槽截面为 S ，储水高度 H 。槽底有小孔，面积为 s 。求水全部漏光所需时间以及漏去一半所需时间。

12.13 注射器活塞面积为 S ，针头面积为 s 。以力 F 推动活塞使药液从针头射出。求活塞移动速率。

12.14 洒水车的大水槽后端水面下 h 处有一小孔。洒水车以匀加速 a 前进。试求水从小孔流出的速率。水槽沿洒水车行进方向的长度为 $2l$ 。

12.15 圆柱形水槽绕自身的轴匀速转动，转速为 ω 。水槽侧壁有一小孔，孔的高度在槽中水面最底处的下方 h 处。求水从小孔流出的速率。水槽半径为 R 。

12.16 虹吸管将液体从高处(例如 A)升至更高处(例如 C)然后输送到低处(例如 B)去。试计算液体在 B 处流出的速率。在虹吸的 AC 段，液体为什么会从低向高流动？



题 12.16

12.17 §54 给出欧拉方程在几种情况下的第一次积分，这几种情况都属于不可压缩流体。现在研究气体，它是可压缩流体。假定气体在流动中遵守绝热过程的规律 $p = C\rho^\gamma$ ，这里 C 和 γ 都是常数， γ 是定压比热与定容比热之比。试推导沿着水平流线的第 一 次积分

$$\frac{1}{2} v^2 + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} = \text{常数}.$$

12.18 利用上题结果以及细流管的连续性方程，试证气体沿截面 S 不均匀的水平管道流动时，如 (i) $v < a$ (a 是气体中

声速， $a^2 = dp/d\rho = \gamma p/\rho$)，则 $dv/dS < 0$ ；(ii) $v > a$ 则 $dv/dS > 0$ 。

12.19 在密立根油滴实验中，观察到一个油滴在重力场中以匀速 v 下降。已知这种油的密度 ρ 和空气的密度 ρ_0 ，试计算这油滴的半径和质量。

答 案

1.1 1分40秒.

1.2 0.34秒.

1.3 $v_B = v_0 \cos \varphi - \frac{v_0 \sin \varphi (R \cos \varphi - b)}{\sqrt{l^2 - a^2 - (R \cos \varphi - b)^2}}$, φ 是质点A在xy平面上的投影相对于x轴之方位角 ($\varphi = v_0 t / R$).

1.4 $a_{cc} = v^2$.

1.5 西北风, 风速2.12米/秒.

1.9 $ds^2 = (dr)^2 + r^2(d\theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta (d\varphi)^2$

1.10 设 $P_1 > P_2$, 记 $r/(R-r) = \sin \theta$, 则

$$\varphi = \operatorname{arctg}[(P_1 \cos 2\theta + P_2)/P_1 \sin 2\theta],$$

两柱对槽压力各为 $P_1 \sin(\theta + \varphi)/\cos \theta$ 与 $P_2 \sin(\theta + \varphi)/\cos \theta$.

1.11 $m(a_1 + v^2/R)$. 注意不是 ma_1 .

1.12 在 $x = 1/2$, $y = 1$ 处.

1.13 棱柱向右加速度

$$\frac{(m_1 \sin \alpha - m_2 \sin \beta)(m_1 \cos \alpha + m_2 \cos \beta)g}{[(m_1 + m_2)(M + m_1 + m_2) - (m_1 \cos \alpha + m_2 \cos \beta)^2]},$$

m_1 沿棱柱的斜面向上加速度

$$\frac{(M + m_1 + m_2)(m_2 \sin \beta - m_1 \sin \alpha)g}{[(m_1 + m_2)(M + m_1 + m_2) - (m_1 \cos \alpha + m_2 \cos \beta)^2]}.$$

1.14 取x轴的指向同于E, $x = (eA/m\omega)t - (eA/m\omega^2)\sin \omega t$. 注意 $(eA/m\omega)t$ 项之存在.

1.15 (i) 运动方程 $l\ddot{\theta} + g \sin \theta = l\omega_0^2 \sin(\omega_0 t - \theta)$, ω_0 为悬点匀速圆周运动角速度.

(ii) 运动方程 $l\ddot{\theta} + (g - lQ^2 \cos \Omega t) \sin \theta = 0$.

(iii) 运动方程 $l\ddot{\theta} + g \sin \theta = lQ^2 \cos \Omega t \cos \theta$, 小振动 $\theta = C_1 \cos(\sqrt{g/l}t + C_2) + [lQ^2/(g - lQ^2)] \cos \Omega t$.

(iv) 运动方程 $l\ddot{\theta} + 2g \sin \theta / (1 + \sin^2 \theta) = 0$, 小振动 $\theta = C_1 \cos$

$(\sqrt{2g/l}t + C_2)$.

1.16 取 x 轴竖直向下, 原点在弹簧的悬挂点,

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2) + (m_1 + m_2)g/k_1 + l_1,$$

$$x_2 = B_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1) + B_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2) + (m_1 + m_2)g/k_1 + m_2 g/k_2 + l_1 + l_2,$$

其中 $\omega_{1,2}^2 = [m_1 k_2 + m_2 k_1 + m_2 k_2$

$$\pm \sqrt{(m_1 k_2 + m_2 k_1 + m_2 k_2)^2 - 4m_1 m_2 k_1 k_2}] / 2m_1 m_2,$$

$$A_1 : B_1 = (-m_2 \omega_1^2 + k_2) : k_2 = k_2 : (-m_1 \omega_1^2 + k_1 + k_2),$$

$$A_2 : B_2 = (-m_1 \omega_2^2 + k_1) : k_1 = k_1 : (-m_2 \omega_2^2 + k_1 + k_2).$$

1.17 取 x 轴竖直向上, 原点位于弹簧无伸缩时质点所在处, $x = C_1 \cos$

$(\sqrt{k/m}t + C_2) - mg/k$.

1.18 约 0.17 米/秒.

1.19 摆线 $x = (g/4\omega^2)(2\theta + \sin 2\theta)$, $y = (g/4\omega^2)(1 - \cos 2\theta)$,

其中 ω 为摆的角频率.

1.20 $v = v_0 e^{-(k/m)t}$, 永不停止. 路程永不超过 mv_0/k .

1.21 60°

1.22 $k = R(1 + \cos \alpha) + R/2 \cos \alpha$, $\alpha = 45^\circ$.

1.23 在光滑钢丝的情况下, 质点作谐振动, 角频率为 $\sqrt{g/4a}$. 注意这个结果并不要求振动幅度小. 曲线之所以称为“摆线”就是由于这个缘故.

如钢丝是粗糙的, 设质点从尖点 ($\theta = \pi$) 出发, 无初速地向 θ 减小的一方运动, 则

$$v^2 = \frac{4ag}{1 + \mu^2} e^{\mu\theta - \mu\pi} + 2ag \left[\frac{2\mu \sin \theta + (1 - \mu^2) \cos \theta}{1 + \mu^2} - 1 \right].$$

1.24 球心以加速度 g 下落而半径按 $v_0 t$ 增大的球面.

1.25 摆绳与竖直线的夹角

$$\theta = [\arctg(a_0/g)] [\cos \sqrt{\sqrt{g^2 + a_0^2}/l} \cdot t - 1].$$

1.26 1.14 毫米.

1.27 相对于电梯的加速度 $(g + a_0)(m_2 - \mu m_1)/(m_1 + m_2)$, 绳中张力 $(1 + \mu)m_1 m_2 (g + a_0)/(m_1 + m_2)$.

1.28 沿 BC 边, $v_x = \omega l(1 + 1/2\pi)$, $a_x = \omega^2 l$; 垂直于 BC 边, $v_y = \omega l$, $a_y = \omega^2 l(1 \pm 1/\pi)$, 其中 ± 号取决于转向.

1.29 在北(南)半球, 偏右(左) 22.73 米, 偏上 $13.13 \cos \theta$ 米, 其中 θ 为炮击方向与东(西)方之间的夹角.

1.30 取转动坐标系, 原点在 O, x' 轴平行于管,

$$x' = \frac{1}{2} \left(\frac{v'}{\omega_0} - \frac{R_1^2}{l} \right) e^{\omega_0 t} - \frac{1}{2} \left(\frac{v'}{\omega_0} + \frac{R_1^2}{l} \right) e^{-\omega_0 t}.$$

如 $v' > R_1^2 \omega_0 / l$, 从 B 口离管, 时间在

$$\{ \ln [R_1^2 \omega_0 + \sqrt{(R_1^2 - R_2^2) \omega_0^2 + v'^2 (R_1^2 + R_2^2)}] - \ln [v' \sqrt{R_1^2 + R_2^2} - R_1^2 \omega_0] \} / \omega_0.$$

如 $v' < R_1^2 \omega_0 / l$, 从 A 口离管, 时间在

$$\{ \ln [R_1^2 \omega_0 + v' \sqrt{R_1^2 + R_2^2}] - \ln [R_1^2 \omega_0 - v' \sqrt{R_1^2 + R_2^2}] \} / \omega_0.$$

质点对侧壁作用力 $= m \omega_0^2 R_1 R_2 / l + 2m \omega_0 \sqrt{\omega_0^2 x'^2 - 2\omega_0^2 R_1^2 x' / l + v'^2} = m \omega_0^2 [R_1 R_2 / l + (v' / \omega_0 - R_1^2 / l) e^{\omega_0 t} + (v' / \omega_0 + R_1^2 / l) e^{-\omega_0 t}]$, 质点对管壁底面作用力 $= mg$.

1.31 取转动坐标系, x' 轴的正向同于质点在管内运动方向, 原点在管的中点.

$$[Ml^2/12 + mMx'^2/(M+m)]\omega = [Ml^2/12 + mMx'^2/(M+m)]\omega_0,$$

$$m\ddot{x}' = m\omega^2 x' - \mu N \frac{M+m}{M},$$

$$N = \sqrt{m^2 g^2 + (2m\omega \dot{x}' + M\dot{\omega} x')^2}.$$

1.32 3.969×10^3 牛顿.

1.33 (i) 0.22 米/秒². (ii) 1.22 米/秒. (iii) $t = 1.25 \ln [6 / (6 - 4.9v)] - 1.02v$.

1.34 $F \geq 2mg$, m 是物体 A 或 B 的质量.

1.35 $lM/(M-m)$.

1.36 $\sqrt{2gl(P+p)} \sqrt{\sin \alpha / p \cos \alpha}$.

1.37 在墙上 3.43 米高处发生碰撞. 碰后作抛射体运动, 其初始速度之水平分量为 5*v* 米/秒, 竖直分量为 2.78 米/秒.

1.38 $m_1 = \sqrt{m_1 m_2}$.

1.39 已落于桌上之绳重的 3 倍.

1.40 如不计气球质量,则气球的高度 $x(t) = -gt^2/6 + \sqrt{B/\rho}t$. (按照这一答案, $x(0) = 0$, $\dot{x}(+0) = \sqrt{B/\rho} \neq 0$, 但 $\dot{x}(-0) = 0$, 从而 $a(0) = \infty$, 这是由于 $m(0) = 0$. 如计及气球质量可避免 $a(0) = \infty$, 但要遇到椭圆积分.)

1.41 $3mg/32$.

1.42 绳中张力 $(M+m)g(\text{ctg}\alpha)n/2(n-1)$. 棒的 A 端受到向上的力 $(m+M/2)g$. 棒的 B 端受到向下的力 $Mg/2$ 以及水平向外的力 $(M+m)g(\text{ctg}\alpha)n/2(n-1)$.

1.43 $F\text{ctg}\alpha$.

1.44 $(\sqrt{3}/9)W\text{tg}\theta \approx 0.19W\text{tg}\theta$.

1.45 $(2/3)\mu FR$.

1.46 $\dot{\theta} = g/R(3 + \sqrt{5})$, $\mu \geq 4/(11 + 4\sqrt{5})$.

1.47 $\omega_1 = (M_1R_1\Omega_1 - M_2R_2\Omega_2)/(M_1 + M_2)R_1$,

$\omega_2 = (M_2R_2\Omega_2 - M_1R_1\Omega_1)/(M_1 + M_2)R_2$.

1.48 竖直分力 $mg(1 - 3\cos^2\theta_0/4)$, 水平分力 $3mg \sin\theta_0 \cos\theta_0/4$, $\mu \geq 3 \sin\theta_0 \cos\theta_0/(4 - 3\cos^2\theta_0)$.

1.49 $\mu \geq 1/2, F = mg/2$.

1.50 $2\pi\sqrt{2a/3g \sin\theta}$ (薄板边长为 a 与 b , 以长为 b 的一边作为转轴).

1.51 $\sqrt{3(l_1^2 \cos\alpha - l_2^2 \sin\alpha)g/2(l_2^2 - l_1^2) \sin\alpha \cos\alpha}$.

1.52 所经时间 $t = 2v_0/7\mu g$. 最后的能量分配: 平动动能占 $25/49$, 转动动能占 $10/49$, 损失 $2/7$.

1.53 在距地面高度为 $(7/5)R$ 处水平地敲击小球.

1.54 $2g/[3 + MR^2/(M+m)r^2]$, 式中 M 与 m 分别是轮与轴的质量. 如果轴的突出于轮的部分很短, 其质量可以忽略, 则为 $2g/(2 + R^2/r^2)$.

1.55 $\arcsin\{(2/3)\sin\theta_0\}$.

1.56 $\sqrt{10g(R-r)/7}$.

1.57 从小球球心到圆柱轴的垂直线与竖直方向夹角 θ 满足下列方程之时,

$$5(3M - 2m)m \cos^3\theta + 20(M + m)m \cos^2\theta - (119M + 14m)(M + m) \cos\theta + 70M(m + M) = 0.$$

2.2 $(P/2)\operatorname{ctg}\alpha$.

2.3 垂直于曲柄的推力为

$$(P-p)\pi R^2 \sin\phi(1+r\cos\phi/\sqrt{P^2-r^2\sin^2\phi}).$$

2.4 $P/2^* + (1-1/2^*)p$.

2.5 $\operatorname{arctg}[(Q-P)l/(Q+P)\sqrt{R^2-l^2}]$.

2.6 $(L+W/2\pi k \operatorname{tg}\alpha)/2\pi \operatorname{tg}\alpha$.

2.8 (i) $\cos\theta = \sqrt[3]{d/l}$. (ii) 方程 $l\cos^3\theta + R\sin\theta = d$ 的根.

2.9 放置第四个球使绳中张力增大 $(\sqrt{6}/18)P$.

2.10 棒与水平面夹角 θ 满足 $\cos\theta = (L + \sqrt{L^2 + 128R^2})/16R$. 条件 $L \leq 4R$. (这里 R 是碗的半径.)

3.2 (i) $R\ddot{\theta} = \omega_0^2 R \sin\theta \cos\theta - g \sin\theta$.

(ii) $t = \sqrt{\frac{R}{\omega_0^2 R + g}} \ln \left[\sqrt{\frac{\omega_0^2 R + 2g}{g}} + \sqrt{\frac{\omega_0^2 R + g}{g}} \right]$.

(iii) 如 $\omega_0 < \sqrt{g/R}$, 平衡位置在最低点, 小振动圆频率 $\sqrt{(g - \omega_0^2 R)/R}$.

如 $\omega_0 > \sqrt{g/R}$, 平衡位置从最低点向上移角度 $\operatorname{arccos}(g/\omega_0^2 R)$, 小振动圆频率 $\sqrt{\omega_0^2 - g^2/\omega_0^2 R^2}$.

(iv) $\omega_c = \sqrt{g/R}$. 如 $\omega_0 < \omega_c$, 则惯性离心力的切向分力恒小于重力的切向分力, 除非在最低点(两者在此都是零), 所以平衡位置在最低点. 如 $\omega_0 > \omega_c$, 则惯性离心力的切向分力既可大于也可小于重力的切向分力, 而在 $\operatorname{arccos}(g/\omega_0^2 R)$ 处两者相等.

3.3 $\sqrt{3gl/2}$.

3.4 将棒与水平夹角记作 θ , 则

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{6g(\sin\alpha - \sin\theta)}{l(1+3\cos^2\theta)}}, \dot{x}_0 = 0, \dot{y}_0 = l\dot{\theta}\cos\theta.$$

3.5 质点滑至 B, 环的角速度 $l\omega_0/(1+mR^2)$, 质点相对速度

$$\sqrt{2gR + 1R^2\omega_0^2/(1+mR^2)}.$$

质点滑至 C, 环的角速度 ω_0 , 质点相对速度 $2\sqrt{gR}$.

3.6 $\pi\sqrt{6(R-r)/g}$.

$$3.7 \quad \begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) = F_r, \\ m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta) = F_\theta, \\ m(r\ddot{\varphi} \sin \theta + 2\dot{r}\dot{\varphi} \sin \theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi} \cos \theta) = F_\varphi. \end{cases}$$

3.8 将圆环内通过点 O 的直径与竖直方向的夹角记作 θ , 从棒的质心到环心的连线与竖直方向的夹角记作 φ , 又 $h = \sqrt{R^2 - l^2/4}$, 则

$$\begin{cases} (2M + m)R^2\ddot{\theta} + mRk\ddot{\varphi} \cos(\varphi - \theta) + mRk\dot{\varphi}^2 \sin(\theta - \varphi) \\ \quad + (M + m)gR \sin \theta = 0, \\ m(R^2 - l^2/6)\ddot{\varphi} + mRk\ddot{\theta} \cos(\varphi - \theta) + mRk\dot{\theta}^2 \sin(\varphi - \theta) \\ \quad + mgh \sin \varphi = 0. \end{cases}$$

3.9 取 x 轴竖直向下, 原点在弹簧上端, 将棒与竖直方向的夹角记作 θ ,

$$\begin{cases} 2L\ddot{\theta} - 3\ddot{x} \sin \theta + 3g \sin \theta = 0, \\ 2\ddot{x} - L\ddot{\theta} \sin \theta - L\dot{\theta}^2 \cos \theta + (2k/M)(x - l) - 2g = 0. \end{cases}$$

3.10 质点沿环的切向运动方程为 $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0$.

3.11 $(g/2\omega_0^2)(\text{ch}\omega_0 t - \cos \omega_0 t)$.

3.12 $\sqrt{g/l}$.

3.13 楔子加速度 $2m_1 g \sin \theta \cos \theta / [3(M + m_1) - 2m_1 \cos^2 \theta]$, 圆柱体滚下加速度 $2g \sin \theta / [3 - 2m_1 \cos \theta / (M + m_1)]$.

加上摆球后, 系统有三个自由度: 楔子向右位移 x , 圆柱沿斜面向下位移 j , 摆球悬线与竖直朝下方向之夹角 φ (以逆时针为正).

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} [(M + m_1 + m_2)x - (m_1 + m_2)j \cos \theta + m_2 l \dot{\varphi} \cos \varphi] = 0, \\ \frac{d}{dt} [(3m_1/2 + m_2)j - (m_2 + m_1)\dot{x} \cos \theta - m_2 l \dot{\varphi} \cos(\theta - \varphi)] \\ \quad = (m_1 + m_2)g \sin \theta, \\ l\ddot{\varphi} + \ddot{x} \cos \varphi - \ddot{j} \cos(\theta - \varphi) + g \sin \varphi = 0. \end{cases}$$

3.14 同于 §11 例 5, 但没有 ϕ 这个自由度, 且 $I_1 = mk^2$ (k 是杆长), $I_2 = 0$.

$$3.16 \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) = F.$$

$$3.17 \quad \frac{d}{dt} (mv) = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

3.18 $\arccos(2/3)$.

$$4.2 \quad -mh^2(6k/\rho^2 + 1/a^2)$$

$$4.3 \quad -mh^2(1 + a^2)/\rho^2,$$

$$4.5 \quad \begin{cases} x = A_1 \cos(\sqrt{k/m}t + \varphi_1), \\ y = A_2 \cos(\sqrt{k/m}t + \varphi_2). \end{cases}$$

$$4.6 \quad \begin{cases} x = A_1 e^{\sqrt{k/m}t} + B_1 e^{-\sqrt{k/m}t}, \\ y = A_2 e^{\sqrt{k/m}t} + B_2 e^{-\sqrt{k/m}t}. \end{cases}$$

4.7 $F(\rho) = -k\rho^{-\alpha}/\rho^2 - k\alpha e^{-\alpha\rho}/\rho$, 稳定圆运动的条件 $R < (\sqrt{5} + 1)/2\alpha$, 周期 $2\pi m^{-1/2} R^{3/2} [k(1 + \alpha R)e^{-\alpha R}]^{-1/2}$, 径向微振动周期 $2\pi m^{-1/2} R^{3/2} [k(1 + \alpha - \alpha^2 R^2)e^{-\alpha R}]^{-1/2}$.

$$4.12 \quad C/2mh\alpha^2 \sqrt{1 - \theta^2}.$$

$$4.13 \quad r = R_{\text{max}}/[1 + (\sqrt{2} - 1)\cos(\varphi - \pi/2)].$$

$$4.14 \quad r_0 \leq 1.62a.$$

$$4.15 \quad r_0 < a.$$

$$4.20 \quad \sqrt{R^2 + 2GMR/\nu_0^2}.$$

$$5.1 \quad \text{57例4: } \theta = \theta_0 \cos \omega t, \quad X = \frac{3mR \cos \alpha}{5M + 3m} \theta_0 (\cos \omega t - 1),$$

$$\omega^2 = \frac{3(5M + 3m)g \cos \alpha}{(5M + 3m)(3 \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)R - 9mR \cos^2 \alpha}$$

$$5.2 \quad \text{题 1.10 的 } \omega^2 = \frac{m_1 \sin(\varphi_0 + 2\theta) + m_2 \sin \varphi_0}{(m_1 + m_2)(R - r)} g, \quad \text{式中 } \varphi_0 \text{ 见该题}$$

答案.

$$\text{题 1.56 的 } \omega^2 = 5g/7(R - r).$$

$$5.3 \quad \text{简正坐标 } x_1 - x_2, x_1 + x_2.$$

$$\text{简正角频率 } \sqrt{(k + 2K)/m}, \sqrt{k/m}.$$

$$5.4 \quad \text{若初始条件为 } x_0 = 0, \dot{x}_0 = 1; \theta_0 = 0.1, \dot{\theta}_0 = 0, \text{ 则 } x = t + \frac{1}{30} \left(1 - \cos \sqrt{\frac{3g}{2l}} t \right); \quad \theta = \frac{1}{10} \cos \sqrt{\frac{3g}{2l}} t.$$

$$5.5 \quad \theta_1 = A^{(1)} \cos(\sqrt{g/l}t + \varphi_1) + A^{(2)} \cos(2\sqrt{g/l}t + \varphi_2),$$

$$\theta_2 = 2A^{(1)} \cos(\sqrt{g/l}t + \varphi_1) - A^{(2)} \cos(2\sqrt{g/l}t + \varphi_2),$$

$x = C_1 t + C_2 - l A^{(1)} \cos(\sqrt{g/l} t + \varphi_1) - (1/4) l A^{(2)} \cos(2\sqrt{g/l} t + \varphi_2)$,
其中 x 是环在钢丝上的坐标。

5.6 将圆环内通过该固定点的直径与竖直方向的夹角记作 φ , 从环心到质点的联线与竖直方向的夹角记作 θ ,

$$\begin{cases} (2M + m)R\ddot{\varphi} + mR\ddot{\theta} + (M + m)g\varphi = 0, \\ R\ddot{\theta} + R\ddot{\varphi} + g\theta = 0. \end{cases}$$

微振动简正坐标 $(M + m)\varphi + m\theta, \varphi - \theta$.

简正角频率 $\sqrt{g/2R}, \sqrt{(M + m)g/MR}$.

5.7 质心上下振动的圆频率 $\sqrt{k/m}/2$, 薄板绕其两根中线转动的角频率都是 $2\sqrt{3k/m}$.

5.9 $\omega_1 = \sqrt{2k/m}, \omega_2 = \sqrt{6k/m}$.

5.10 $\omega_1 = \sqrt{z/2r}, \omega_2 = \sqrt{2g/r}$.

6.3
$$\begin{bmatrix} m(b^2 + c^2)/5 & 0 & 0 \\ 0 & m(c^2 + a^2)/5 & 0 \\ 0 & 0 & m(a^2 + b^2)/5 \end{bmatrix}$$

6.4
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{12} m a^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} m b^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} m (a^2 + b^2) \end{bmatrix}$$

6.5 $ma^2b^2/6(a^2 + b^2)$

6.6 $m(a^2 - b^2)\omega_0 ab/12(a^2 + b^2)^{3/2}$.

6.7 $\theta = \sqrt{3g \sin \theta/l}, \theta = \arctg(\mu/2)$.

6.8 $I\omega v/Rl$.

6.10 提示: 可利用(24.11), (25.2)与(23.20).

6.11 $\dot{\varphi} = 2\dot{\psi}$.

6.14 回转仪对称轴与子午线的夹角 φ 的运动方程为 $I_1\ddot{\varphi} + I_3\dot{\psi}\Omega \cos \lambda \sin \varphi = 0$, 式中 Ω 为地球自转角速度, λ 为纬度, I_3 为绕对称轴的转动惯量, $\dot{\psi}$ 为回转仪自转角速度.

7.5 $H = (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)/2m - \omega(x'p_y - y'p_x) + V(\sqrt{x'^2 + y'^2}, z)$, H 守恒, 但 H 并非机械能. 如用坐标与速度表出, $H = (m\dot{x}'^2 + m\dot{y}'^2 + m\dot{z}'^2)/2 - m\omega^2(x'^2 + y'^2)/2 + V(\sqrt{x'^2 + y'^2}, z')$, 前一项为相对运动动能, 第二项可说成“惯性离心势能”.

$$7.6 \quad U = 1/\rho + \rho^2/c^2\beta, L = m(\beta^2 + \rho^2\dot{\phi}^2)/2 - U,$$

$$H = p_\phi^2/2m\rho^2 + c^2\rho\beta^2/2(mc^2\rho - 2) + 1/\rho.$$

$$8.1 \quad \begin{cases} x = C_1(\theta - \sin\theta) + C_2, \\ y = C_1(1 - \cos\theta) - v_0^2/2g. \end{cases}$$

8.2 直线.

$$8.3 \quad \begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma z = 0 (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1), \\ x^2 + y^2 + z^2 = R^2. \end{cases} \text{ 大圆上的弧.}$$

8.4 圆, 圆心在 x 轴上.

8.5 悬链线 $y = C_1 \text{ch}[(x + C_2)/C_1]$.

8.7 $\varphi = \varphi_0 \cos(\sqrt{mgh/l}t + \alpha)$, φ_0 与 α 由初始条件确定.

8.8 悬链线 $y = C_1 \text{ch}[(x + C_2)/C_1] + \lambda$, 式中的 C_1, C_2 以及拉格朗日不定乘子由两个端点以及绳长 l 确定, “悬链线”一词就是由此而得的.

8.9 抛物线

$$9.3 \quad \alpha = 1/2, \beta = 2.$$

$$9.7 \quad \sqrt{k_1/m}, \sqrt{k_2/m}, \sqrt{k_1/m}.$$

$$9.8 \quad \sqrt{k/m}.$$

$$9.11 \quad \text{(i)} \quad (1/2m) \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 \right] + V(x, y, z) + \partial S / \partial t = 0$$

$$\text{(ii)} \quad x = v_x t + x_0, y = v_y t + y_0, z = v_z t + z_0.$$

$$9.12 \quad S = -Et + W$$

$$W = C_1 \varphi + \int \sqrt{2mE - \frac{C_1^2}{r^2}} dr + \int \sqrt{C_2 + 2mb \cos\theta - \frac{C_1^2}{\sin^2\theta} - 2ma} d\theta$$

m 是质点的质量, E 为总能量, C_1, C_2 为积分常数.

10.1 4.44千米.

10.2 $p = 167$ 千克/厘米², $\Delta l = 0.121$ 毫米.

10.3 6.25 千克/毫米².

10.4 $p_1 = YS_2(l_1 + l_2)\alpha(t - t_0)/(l_1S_2 + l_2S_1)$,

$p_2 = YS_1(l_1 + l_2)\alpha(t - t_0)/(l_1S_1 + l_2S_2)$.

10.5 $\Delta l = Pl/2SY, \Delta V = Pl(1 - 2\sigma)/2Y$,

自由下落时 $\Delta l = 0, \Delta V = 0$,

10.6 张力 $4(1 - x^2)$ 牛顿, 伸长 $8/3SY$ 米, 式中 x 为与固定端之距离, S 为横截面积.

10.7 0.0326 毫米.

10.8 如 $a > b, \delta_{\max} = Pb(l^2 - b^2)^{3/2}/9\sqrt{3}YI$;

如 $a < b, \delta_{\max} = Pa(l^2 - a^2)^{3/2}/9\sqrt{3}YI$.

10.9 $M^2l/2YI$.

10.10 $32M/15\pi r^3$, 大于同样外径的实心杆, 小于同样截面的实心杆.

10.11 $M^2l/n\pi r^4$.

10.12 $e_{11} = e_{22} = -\sigma\rho gz/Y, e_{33} = \rho gz/Y, e_{12} = e_{21} = e_{13} = e_{31} = e_{23} = e_{32} = 0$.

$p_{11} = p_{22} = 0, p_{33} = \rho gz, p_{12} = p_{21} = p_{13} = p_{31} = p_{23} = p_{32} = 0$.

在题 10.5 中, 如取 x 轴竖直向上, 原点在杆的下端, 则胁强分布同于本题, 平衡方程和边界条件都能满足.

11.1 $v = -\omega yj + \omega xj$.

11.2 (i) 流线方程: $y = C_1x, z = C_2$.

胁变速率 $\frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \begin{bmatrix} k(y^2 - x^2) & -2kxy & 0 \\ -2kxy & k(x^2 - y^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

速度势 $k \ln \sqrt{x^2 + y^2} + C$. 不可压缩.

(ii) 流线方程: $z = C_1, x^2 + y^2 = C_2$.

胁变速率 $\frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \begin{bmatrix} 2kxy & k(y^2 - x^2) & 0 \\ k(y^2 - x^2) & -2kxy & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

除原点外无旋, 速度势 $k \arctg(y/x) + C$. 不可压缩.

(iii) 流线方程: $x + y^2/x = C_1, z = C_2e^{-x}$.

$$\text{胁变速率} \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \begin{bmatrix} 2yz(x^2 - y^2) & xz(3y^2 - x^2) & -xy(x^2 + y^2 + 1) \\ xz(3y^2 - x^2) & -4x^2yz(x^2 - y^2)(x^2 + y^2 + 1)/2 \\ -xy(x^2 + y^2 + 1) & (x^2 - y^2)(x^2 + y^2 + 1)/2 & 0 \end{bmatrix}$$

可压缩, 有旋, 不存在速度势.

$$(iv) \text{ 流线方程: } Ay + k \ln \sqrt{x^2 + y^2} - By/(x^2 + y^2) = C_1, z = C_2.$$

$$\text{胁变速率} \frac{1}{(x^2 + y^2)^3}$$

$$\begin{bmatrix} 2Bx(3y^2 - x^2) + 2kxy(x^2 + y^2) & -2By(3x^2 - y^2) - k(x^4 - y^4) & 0 \\ -2By(3x^2 - y^2) - k(x^4 - y^4) & 2Bx(x^2 - 3y^2) - 2kxy(x^2 + y^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

速度势 $-Ax - Bx/(x^2 + y^2) + k \arctg(y/x) + C$, 不可压缩.

$$(v) \text{ 流线方程: } \rho^{n+1} e^{-k(n+1)\varphi} = C_1, z = C_2.$$

$$\begin{cases} \dot{e}_{11} = \alpha(x^2 + y^2)^{(n-1)/2} e^{-k(n+1)\arctg(y/x)} \frac{kx - y}{x^2 + y^2} [(n-1)x + k(n+1)y], \\ \dot{e}_{22} = \alpha(x^2 + y^2)^{(n-1)/2} e^{-k(n+1)\arctg(y/x)} \left\{ k + \frac{ky + x}{x^2 + y^2} [(n-1)y - k(n+1)x] \right\}, \\ \dot{e}_{33} = 0, \text{ 可压缩.} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{e}_{12} = \dot{e}_{21} = (1/2)\alpha(x^2 + y^2)^{(n-1)/2} e^{-k(n+1)\arctg(y/x)} [4nkxy \\ \quad + (x^2 - y^2)(n-1 - k^2 - nk^2)], \\ \dot{e}_{13} = \dot{e}_{31} = 0, \dot{e}_{23} = \dot{e}_{32} = 0. \end{cases}$$

有旋, 不存在速度势.

11.3 (i) 速度场 $\boldsymbol{v} = 3\alpha(x^2 - y^2)\boldsymbol{i} - 6\alpha xy\boldsymbol{j}$, 流线方程 $y^3 - 3x^2y = C$.

(ii) 速度场 $\boldsymbol{v} = -(c/2\pi\rho)\boldsymbol{j}$, 其中 \boldsymbol{j} 是横向单位矢量, 流线方程: $\rho = \text{常数}$.

11.4 流线方程: $y(x^2 + y^2 + 1) = Cx(x^2 + y^2 - 1)$.

$$\boldsymbol{v} = A \left[\frac{x+1}{(x+1)^2 + y^2} + \frac{x-1}{(x-1)^2 + y^2} - \frac{x}{x^2 + y^2} \right] \boldsymbol{i} \\ + Ay \left[\frac{1}{(x+1)^2 + y^2} + \frac{1}{(x-1)^2 + y^2} - \frac{1}{x^2 + y^2} \right] \boldsymbol{j}.$$

12.2 取 x 轴在水柜底面上, 指向同于 \boldsymbol{a}_0 , y 轴沿水柜后壁竖直向上. 设静止时水深 h_0 , 运动时水面方程 $y = h_0 + a_0 L/2g - (a_0/g)x$, 不溢出的条件为 $a_0 \leq 2gh/L$. 压强 $p = p_0 + \rho g(h_0 + a_0 L/2g) - \rho(a_0 x + gy)$, 式

中 p_0 为大气压强.

12.3 $\pi R^2 p_0$. 注意不是 $4\pi R^2 p_0$.

12.4 每米坝长受力 $\rho g H^2 / 2 \cos \theta$, 对底边的力矩 $\rho g H^3 / 6 \cos^2 \theta$.

12.5 $p_0 + \rho \omega^2 l (L - l/2)$.

12.6 $[p_0^{(n-1)/n} - (n-1)gz/nC^{1/n}]^{n/(n-1)}$.

12.7 棒两端对杯的水平压力各为 $[\rho - h^2 \rho_0 / (l^2 - D^2)] S l D g / 2 \sqrt{l^2 - D^2}$. 下端对杯的竖直压力 $l S g [\rho - h \rho_0 / \sqrt{l^2 - D^2}]$.

12.8 520 牛顿/米².

12.9 滴注开始不久, 管口 A 即成为气液分界处, 且其后保持为气液分界面, 从而该处压强保持为大气压不变.

12.10 4.37 厘米².

12.12 $(S/s) \sqrt{2H/g}$ 与 $(S/s)(\sqrt{2} - 1) \sqrt{H/g}$. 注意后者并非前者之半.

12.13 $\sqrt{2F/\rho S} (s/\sqrt{S^2 - s^2}) \approx (s/S) \sqrt{2F/\rho S}$

12.14 $\sqrt{2gh + 2la_0}$.

12.15 $\sqrt{2gh + \omega^2 R^2}$.

12.16 $\sqrt{2gH}$

12.19 $r = (3/2) \sqrt{2\eta\sigma/(\rho - \rho_0)g}$,

$m = 9\sqrt{2} \pi \rho [\eta\sigma/(\rho - \rho_0)g]^{1/2}$.