第5章综合习题题解

1. 设 m, n 为正整数, 证明

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin mx \cdot \cos nx \,\mathrm{d}x = 0$;

(2) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin mx \cdot \sin nx \,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \cos mx \cdot \cos nx \,\mathrm{d}x = \begin{cases} \pi, & \text{如 } m = n \\ 0, & \text{如 } m \neq n \end{cases}$.

证明 直接验证.

点评: 本题在Fourier 分析中起到基础性作用. 对任意两个可积函数, 积分

$$(f, g) = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

定义了一种内积. 本题说明三角函数在上述内积定义下是正交（垂直）的.

2. 设 m, n 为正整数, 记

$$B(m, n) = \int_0^1 x^m(1-x)^n \,\mathrm{d}x.$$

证明: (1) $B(m, n) = B(n, m)$; (2) $B(m, n) = \dfrac{m!n!}{(m+n+1)!}$.

证明 利用分部积分有

$$\begin{aligned}
B(m, n) &= \int_0^1 x^m(1-x)^n \,\mathrm{d}x = \frac{1}{m+1}\int_0^1 (1-x)^n \,\mathrm{d}x^{m+1} \\
&= \frac{n}{m+1}\int_0^1 x^{m+1}(1-x)^{n-1}\,\mathrm{d}x = \frac{n}{m+1}B(m+1, n-1) \\
&= \cdots \\
&= \frac{m!n!}{(m+n)!}\int_0^1 x^{m+n}\,\mathrm{d}x = \frac{m!n!}{(m+n+1)!},
\end{aligned}$$

并且显然满足 $B(m, n) = B(n, m)$.

点评: 如果把正整数 m, n 换成连续变量

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x.$$

则给出了一种二元函数 $B(p, q)$ 称为Euler 函数（下学期讲）.

3. 计算下列积分.

$$(1) \int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(1+x-\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x;$$

$$(2) \int_{0}^{n\pi} x|\sin x|\,\mathrm{d}x \quad (n \text{ 为自然数});$$

$$(3)\text{设}\ \ f(x)=\int_{x}^{x+2\pi}(1+\mathrm{e}^{\sin t}-\mathrm{e}^{-\sin t})\,\mathrm{d}t+\frac{1}{1+x}\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t,$$

求 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$

解

$$(1)\ \int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(1+x-\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\mathrm{d}\left(x\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}\right)=x\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}\Big|_{1/2}^{2}=\frac{3}{2}\mathrm{e}^{5/2}.$$

$$(2)\ \int_0^{n\pi} x|\sin x|\,\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}x|\sin x|\,\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\pi}(u+k\pi)|\sin u|\,\mathrm{d}u$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\pi}(u+k\pi)\sin u\,\mathrm{d}u=n\int_0^{\pi}u\sin u\,\mathrm{d}u+\sum_{k=0}^{n-1}k\pi\int_0^{\pi}\sin u\,\mathrm{d}u$$

$$=n\pi+n(n-1)\pi=n^2\pi.$$

(3) 因为$1+\mathrm{e}^{\sin t}-\mathrm{e}^{-\sin t}$ 是以 2π 为周期的周期函数, $\mathrm{e}^{\sin t}-\mathrm{e}^{-\sin t}$ 是奇函数, 所以利用周期性和对称区间上奇函数积分

$$\int_x^{x+2\pi}(1+\mathrm{e}^{\sin t}-\mathrm{e}^{-\sin t})\,\mathrm{d}t=\int_{-\pi}^{\pi}(1+\mathrm{e}^{\sin t}-\mathrm{e}^{-\sin t})\,\mathrm{d}t$$
$$=2\pi+\int_{-\pi}^{\pi}(\mathrm{e}^{\sin t}-e^{-\sin t})\,\mathrm{d}t=2\pi$$

这样等式化简为

$$f(x)=2\pi+\frac{1}{1+x}\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t,$$

两边对 x 积分, 并注意到在对 x 积分过程中, $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ 是常数, 因此得

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=2\pi+\int_0^1\left(\frac{1}{1+x}\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x$$
$$=2\pi+\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\int_0^1\frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x=\ln 2\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t,$$

解得

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi}{1-\ln 2}.$$

点评: (1) 中可通过微分发现被积函数满足 $\left(1+x-\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}\left(x\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}\right)$. 即被积函数的原函数是$x\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}$. (2) 中对积分区间分段. (3) 中对于周期为 T 的函数$f(x)$, 在一个周期内$[x,x+T]$ 的积分与周期的起点 x 无关（习题 5.1第21题）:

$$\int_x^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^0 f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t + \int_T^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

上式右边第三个积分通过变换 $t = u+T$ 和 $f(x)$ 的周期性, 与第一个积分抵消, 所以

$$\int_x^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t.$$

4. 证明 $\frac{1}{2n+2} < \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\,\mathrm{d}x < \frac{1}{2n} \quad (n=1,2,\cdots).$

证明 令 $u = \tan x$, 所以

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{u^n}{1+u^2}\,\mathrm{d}u.$$

对于 $0<u<1$, 有不等式:

$$\frac{u^n}{2} < \frac{u^n}{1+u^2} < \frac{u^n}{2u} = \frac{u^{n-1}}{2},$$

因此对不等式积分得

$$\frac{1}{2n+2} < \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\,\mathrm{d}x < \frac{1}{2n}.$$

点评: 本题一个直接推论是:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\,\mathrm{d}x = 0,$$

类似积分极限（如第15题）一般先估计积分, 再取极限.

5. 设函数 f 在 $[a,b]$ 上可积, 且 $\int\limits_a^b f(x)dx > 0$, 证明: 必有一个区间 $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$, 使得对任意 $x \in [\alpha,\beta]$, 有 $f(x) > 0$. (比较习题5.1中第8题.)

证明 (**反证法**) 记$a=\int\limits_a^b f(x)dx>0$, 取 $\varepsilon=\dfrac{a}{2}>0$, 则存在 $\delta>0$, 对$[a,b]$ 的任意分割:

$$T:\ a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b,$$

只要 $|T|<\delta$, 就有

$$a-\frac{a}{2}<\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k<a+\frac{a}{2},$$

对任意 $\xi_k\in[x_{k-1},x_k]$ 成立.

如果 $f(x)$ 在任何闭子区间 $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$ 上, 都存在一点 $\xi\in[\alpha,\beta]$, 使得 $f(\xi)\leqslant 0$, 那么对$[x_{k-1},x_k]$, $k=1,\cdots,n$, 取 $\xi_k\in[x_{k-1},x_k]$, $k=1,\cdots,n$, 使得 $f(\xi_k)\leqslant 0$, 就有

$$0\geqslant\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k>a-\frac{a}{2}=\frac{a}{2}>0,$$

矛盾. 因此假设不成立, 即一定存在 $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$ 使得 $f(x)>0$, $x\in[\alpha,\beta]$.

点评: 本题条件如果改为函数 $f(x)$ 连续, 那么问题就变得简单了.由$\int\limits_a^b f(x)dx>0$, 推出 $f(x)$ 不可能是非负函数, 因此一定存在一点 $x_0\in[a,b]$ 使得 $f(x_0)>0$, 根据连续性的基本性质: $f(x)$ 在 x_0 的附近恒正, 即存在$[\alpha,\beta]\subset[a,b]$ 使得$f(x)$ 在$[\alpha,\beta]$ 上恒正.

虽然连续函数和可积函数在本题条件下具有相同性质, 但是证明方法完全不同.

6. (1) 设 f 是处处连续的偶函数, 则 f 必有一个原函数为奇函数;
(2) 设 f 是处处连续的奇函数, 则 f 的任一个原函数都是偶函数. (试比较习题3.1, 第15题.)

证明 设 $f(x)$ 连续, 取 $f(x)$ 的一个原函数为

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t,$$

那么作换元 $t\to -t$, 有

$$F(-x)=\int_0^{-x}f(t)\,\mathrm{d}t=-\int_0^{x}f(-t)\,\mathrm{d}t=\begin{cases}-\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=-F(x) & \text{当 } f(x) \text{ 是偶函数;}\\ \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=F(x) & \text{当 } f(x) \text{ 是奇函数}\end{cases},$$

所以结论成立.

点评：因为原函数不唯一, 所以偶函数只有一个原函数是奇函数, 而奇函数的所有原函数都是偶函数. 这是分别关于原点对称和y 轴对称的奇偶性的差别之一.

7. 举例说明, 存在一个连续的周期函数 f, 使得 f 的原函数都不是周期函数. (试比较习题3.1, 第16题.)

证明 取 $f(x)=|\sin x|$, 则 $f(x)$ 是周期为 π 的连续函数. 记

$$F(x)=\int_0^x|\sin t|\,\mathrm{d}t,$$

则对任意的 $T\neq 0$:

$$F(x+T)-F(x)=\int_x^{x+T}|\sin t|\,\mathrm{d}t>0,$$

所以 $F(x)$ 不是周期函数.

点评：以上两题分别给出奇函数、偶函数和周期函数的原函数是否保留原有性质的讨论. 在积分时, 充分利用积分的奇偶性、周期性会使得积分简化. 请结合习题把奇偶性、周期性函数的积分性质梳理一遍.

8. 设

$$\frac{a_0}{n+1}+\frac{a_1}{n}+\cdots+a_n=0,$$

证明: 多项式

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$$

在 $(0,1)$ 内至少有一个零点. (本题是第 3 章综合习题的第3题, 这里要求用积分的手法来论证.)

证明 假设 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ 在 $(0,1)$ 内没有零点, 则作为连续函数, $f(x)>0,\ x\in(0,1)$ 或 $f(x)<0,\ x\in(0,1)$, 不妨设 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上恒正, 因此

$$0<\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n)\,\mathrm{d}x=\frac{a_0}{n+1}+\frac{a_1}{n}+\cdots+a_n,$$

矛盾, 因此 $f(x)$ 在$(0,1)$ 内必存在零点.

9. 设函数 f 在 $[0,\pi]$ 上连续, 且有

$$\int_0^\pi f(x)\sin x\,\mathrm{d}x=\int_0^\pi f(x)\cos x\,\mathrm{d}x=0.$$

试证在 $(0,\pi)$ 内存在两点 x_1 和 x_2, 使得 $f(x_1)=f(x_2)=0.$.

证明 若 $f(x)\equiv 0$, 结论显然，不妨设 $f(x)$ 不是恒等于 0 的函数. 证明分以下步骤完成:

第一步：若 $f(x)$ 在$(0,\pi)$ 上不变号, 则 $f(x)\sin x$ 在$(0,\pi)$ 上也不变号, 不妨设 $f(x)\sin x$ 非负, 推出 $\int\limits_0^{\pi} f(x)\sin x\,\mathrm{d}x>0$，与题意矛盾. 因此 $f(x)$ 在$(0,\pi)$ 上变号, 推出至少存在一个零点.

第二步：设$f(x)$ 在$(0,\pi)$ 上变号, 若 $f(x)$ 只有一个零点 $x_1\in(0,\pi)$, 则 $f(x)$ 在 x_1 两侧异号, 不妨设

$$f(x)>0,\ x\in(0,x_1);\ f(x)<0,\ x\in(x_0,\pi).$$

由此推出

$$\begin{aligned}0&=\cos x_1\int_0^{\pi} f(x)\sin x\,\mathrm{d}x-\sin x_1\int_0^{\pi} f(x)\cos x\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\pi} f(x)\sin(x-x_1)\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^{x_1} f(x)\sin(x-x_1)\,\mathrm{d}x+\int_{x_1}^{\pi} f(x)\sin(x-x_1)\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

但是在右边第一个积分中, 因 $0<x<x_1$, 推出 $-\pi<-x_1<x-x_1<0$, 所以 $\sin(x-x_1)<0$, 但当 $0<x<x_1$ 时 $f(x)>0$, 推出

$$\int_0^{x_1} f(x)\sin(x-x_1)\,\mathrm{d}x<0;$$

在右边第二个积分中, 因 $x_1<x<\pi$, 推出 $0<x-x_1<\pi-x_1<\pi$, 所以 $f(x)<0,\ \sin(x-x_1)>0$, 推出

$$\int_{x_1}^{\pi} f(x)\sin(x-x_1)\,\mathrm{d}x<0,$$

所以矛盾, 因此 $f(x)$ 至少有两个零点.

10. 设 $f(x)$ 处处连续, $f(0)=0$, 且 $f'(0)$ 存在. 记

$$F(x)=\int\limits_0^1 f(xy)\,\mathrm{d}y,$$

证明 $F(x)$ 处处可导, 并求出 $F'(x)$.

证明 显然 $F(0)=0$, 当 $x\neq 0$ 时, 作变换 $xy=u$, 则

$$F(x)=\int_0^1 f(xy)\,\mathrm{d}y=\frac{1}{x}\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u.$$

在$x\neq 0$ 处:

$$F'(x)=\frac{f(x)}{x}-\frac{F(x)}{x}\ (x\neq 0).$$

在 $x=0$ 处:

$$F'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x}=\frac{f'(0)}{2}.$$

11. (1) 设

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x^2}, & |x|\leqslant 1 \\ 1, & |x|>1. \end{cases};\quad F(x)=\int\limits_0^x f(t)\,\mathrm{d}t,$$

试研究 $F(x)$ 在哪些点可导. (提示: 与习题5.1 中第 16 题不同, 本题无法求出 $F(x)$ 的显式表示.)

(2) 设 $f(x)=\int\limits_0^x \cos\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$, 求证 $f'_+(0)=0$.

解 (1) 因为 $f(x)$ 可积, 所以 $F(x)$ 处处连续.

当 $x>1$ 时,

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t+\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^1 \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t+x-1;$$

当 $|x|\leqslant 1$ 时,

$$F(x)=\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t;$$

当 $x<-1$ 时,

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{-1} f(t)\,\mathrm{d}t+\int_{-1}^x f(t)\,\mathrm{d}t=-\int_0^1 \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t+x+1;$$

$$\Longrightarrow F(x)=\begin{cases} \int_0^1 \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t+x-1, & x>1, \\ \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t, & |x|\leqslant 1, \\ -\int_0^1 \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t+x+1, & x<-1. \end{cases}$$

按照“分段函数分段处理”的原则, $F(x)$ 在 $x \neq \pm 1$ 处处可导. 在 $x=1$ 处:

$$
\begin{aligned}
F'_-(1) &= \lim_{x\to 1^-}\frac{F(x)-F(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x-1}\left(\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x-1}\left(\int_1^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right) = \mathrm{e}^{-1}; \\
F'_+(1) &= \lim_{x\to 1^+}\frac{F(x)-F(1)}{x-1} \lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x-1}\left(\int_0^1 \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t + \int_1^x \mathrm{d}t - \int_0^1 \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{x-1} = 1
\end{aligned}
$$

所以 $F(x)$ 在 $x=1$ 不可导, 同理推出在 $x=-1$ 也不可导.

(2) 因为

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \int_0^x \cos\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = -\int_0^x t^2\,\mathrm{d}\left(\sin\frac{1}{t}\right) \\
&= -t^2\sin\frac{1}{t}\Big|_0^x + 2\int_0^x t\sin\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = -x^2\sin\frac{1}{x} + 2\int_0^x t\sin\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t,
\end{aligned}
$$

所以 $f(0)=0$, 且

$$
f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\left(-x^2\sin\frac{1}{x} + 2\int_0^x t\sin\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\right) = 0.
$$

点评：对于分段函数, 在分段点处的连续性和可导性一般采用是否左右连续或左右可导来判断.

12. 设函数 f 处处连续.证明

$$
\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_a^b [f(x+h)-f(x)]\,\mathrm{d}x = f(b)-f(a).
$$

证明

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{h}\int_a^b [f(x+h)-f(x)]\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{h}\int_a^b f(x+h)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{h}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{h}\int_{a+h}^{b+h} f(u)\,\mathrm{d}u - \frac{1}{h}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{h}\int_b^{b+h} f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{h}\int_a^{a+h} f(x)\,\mathrm{d}x,
\end{aligned}
$$

因为 $f(x)$ 连续, 所以最右边两个变上限积分可导, 利用L'Hospital 法则, 有

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_a^b[f(x+h)-f(x)]\,\mathrm{d}x &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}\int_b^{b+h}f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{1}{h}\int_a^{a+h}f(x)\,\mathrm{d}x\right)\\ &= f(b)-f(a).\end{aligned}$$

13. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可微.证明

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x\,\mathrm{d}x=0.\quad \lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x=0.$$

证明 作分部积分, 有

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\sin\lambda x\,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{\lambda}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\cos\lambda x\\ &= -\frac{1}{\lambda}f(x)\cos\lambda x\Big|_a^b+\frac{1}{\lambda}\int_a^b f'(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x\\ &= -\frac{1}{\lambda}(f(b)\sin\lambda b-f(a)\sin\lambda a)+\frac{1}{\lambda}\int_a^b f'(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{\lambda}(f(b)\,\mathrm{d}\sin\lambda b-f(a)\sin\lambda a)\right| &\leqslant \frac{1}{|\lambda|}|f(b)|+|f(a)|\to 0\ (\lambda\to\infty);\\ \left|\frac{1}{\lambda}\int_a^b f'(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x\right| &\leqslant \frac{1}{|\lambda|}\int_a^b|f'(x)|\,\mathrm{d}x\to 0\ (\lambda\to\infty),\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x\,\mathrm{d}x=0.$$

点评：这里“连续可微”指的是导函数也连续. 本题的特例是

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=0.\quad \lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=0.$$

14. 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int\limits_0^x|\sin t|\,\mathrm{d}t=\frac{2}{\pi}.$

证明 因为 $\int\limits_0^x |\sin t|\,\mathrm{d}t$ 是 x 的正的单调增函数, 对任意充分大的 x, 存在正整数 n, 使得

$$n\pi \leqslant x < (n+1)\pi,$$

所以

$$\int_0^{n\pi} |\sin t|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x |\sin t|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{(n+1)\pi} |\sin t|\,\mathrm{d}t.$$

其中

$$\int_0^{(n+1)\pi} |\sin t|\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t|\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \int_0^{\pi} \sin t\,\mathrm{d}t = 2(n+1)$$
$$\int_0^{n\pi} |\sin t|\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t|\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{\pi} \sin t\,\mathrm{d}t = 2n,$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{(n+1)\pi} \int_0^{n\pi} |\sin t|\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{x} \int_0^x |\sin t|\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n\pi} \int_0^{(n+1)\pi} |\sin t|\,\mathrm{d}t,$$
$$\Longrightarrow \frac{2n}{(n+1)\pi} \leqslant \frac{1}{x} \int_0^x |\sin t|\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{2(n+1)}{n\pi},$$

令 $x \to +\infty$, 有 $n \to +\infty$, 得

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \int\limits_0^x |\sin t|\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}.$$

点评：本题的特点是利用不等式$n\pi \leqslant x < (n+1)\pi$, 引进离散变量, 再采取包夹方法.

15. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x = 0.$

证明 对任意的 $0 < \varepsilon < 1$, 取 $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$, 则

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}-\delta} \sin^n x\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx \\ &< 2\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right)\right]^n + \delta = 2\cos^n\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

因 $0 < \cos\frac{\varepsilon}{2} < 1$, 故存在 $N > 0$ 使得当 $n > N$ 时, 有

$$\left|2\cos^n\frac{\varepsilon}{2}\right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

所以当 $n > N$ 时, 有

$$\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, \mathrm{d}x\right| < \varepsilon.$$

点评: 本题必须对积分进行估计后再取极限, 不能直接将极限取进积分号:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \lim_{n\to\infty} \sin^n x \, \mathrm{d}x = 0,$$

这样做是错误的. 只有引进所谓“一致性”（第7章详细讨论）概念后, 才可讨论积分与极限两种运算的交换问题. 另外, 如果利用已知结果

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, \mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{n!!}, & n \text{ 为奇数}, \\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \frac{\pi}{2}, & n \text{ 为偶数}. \end{cases}$$

再求极限, 过程相当复杂.

16. 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数, 且 $f(x) \geqslant 0$ (对 $x \in [a,b]$). 记 $f(x)$ 在这区间上的最大值为 M, 则

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b f^n(x) dx\right)^{\frac{1}{n}} = M.$$

证明 根据闭区间上连续函数一定能够取到最大值的结果, 设 $f(x_0) = M$ $x_0 \in (a,b)$. 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得

$$f(x) > M - \frac{\varepsilon}{2}, \ x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a,b),$$

因此

$$M\sqrt[n]{b-a} \geqslant \left(\int_a^b f^n(x) dx\right)^{\frac{1}{n}} \geqslant \left(\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f^n(x) dx\right)^{\frac{1}{n}} \geqslant \left(M - \frac{\varepsilon}{2}\right) \sqrt[n]{2\delta},$$

令 $n \to +\infty$, 并利用 $\sqrt[n]{\alpha} \to 1$ $(n \to +\infty)$ 对 $\alpha > 0$ 成立的结果, 就有

$$M + \varepsilon > M \geqslant \lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b f^n(x) dx\right)^{\frac{1}{n}} \geqslant M - \frac{\varepsilon}{2} > M - \varepsilon$$

对任意的$\varepsilon > 0$ 成立, 即

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b f^n(x) dx\right)^{\frac{1}{n}} = M.$$

注: 若 x_0 在 $[a,b]$ 的端点, 只要将 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 换成半个区间即可.

17. (1) 设 $f(x)$ 是 $[1,+\infty)$ 上的递增、非负函数, 则对任意自然数 n, 有

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant f(n);$$

(2) 设 $f(x)$ 是 $[1,+\infty)$ 上的递减、非负函数, 则对任意自然数 n, 有

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant f(1).$$

此外, 极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x\right) = \alpha$$

存在, 且 $0 \leqslant \alpha \leqslant f(1)$.

证明 (1) 当 $f(x)$ 是 $[1,+\infty)$ 上的递增、非负函数时, 有

$$f(k) \leqslant \int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant f(k+1),$$

对 $k=1,2,\cdots,n-1$ 求和得

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) - f(n) \leqslant \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k) - f(1),$$

所以

$$0 \leqslant f(1) \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant f(n).$$

(2) 当 $f(x)$ 是 $[1,+\infty)$ 上的递减、非负函数时, 对于 $k \leqslant x \leqslant k+1$, 有

$$f(k) \geqslant \int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant f(k+1),$$

对 $k=1,2,\cdots,n-1$ 求和得

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) - f(n) \geqslant \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \sum_{k=1}^{n} f(k) - f(1),$$

所以

$$f(1) \geqslant \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant f(n) \geqslant 0,$$

令

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x, \quad n = 1, 2, \cdots$$

则 $a_n \geqslant 0$ 有下界, 且

$$a_{n+1} - a_n = f(n+1) - \int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 0,$$

所以数列 $\{a_n\}$ 单调递减, 因此收敛. 因 $0 \leqslant a_n \leqslant f(1)$, 所以极限值$\alpha$ 满足 $0 \leqslant \alpha \leqslant f(1)$.

点评: 某些不易直接处理离散量的和, 可以通过易于处理的连续量通过积分作出估计, 例如, 要估计 $\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{k}$ 取值范围（即估计上、下界）, 可借用函数 $f(x) = \sqrt{x}$, 它是单调增非负函数.利用 (1) 中结果有

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} - \int_1^n \sqrt{x}\,\mathrm{d}x \leqslant f(n).$$

推出

$$\frac{2}{3}(\sqrt{n}^3 - 1) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \leqslant \sqrt{n} + \frac{2}{3}(\sqrt{n}^3 - 1).$$

借助非负单调减函数 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ $(x \geqslant 1)$, 利用 (2), 有

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \int_1^n \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant 1 \ (n \geqslant 1),$$

推得

$$\ln n \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \ln n + 1 \ (n \geqslant 1),$$

虽然 $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ 趋于无穷大, 但是减去无穷大量 $\ln n$ 后, 是收敛的, 记

$$\gamma = \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \right)$$

并称为欧拉常数. 上式还给出两个无穷大量是等价的:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n \quad (n \to +\infty).$$

18. (Cauchy 积分不等式) 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 证明

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x \int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x,$$

等号成立的充分必要条件是: f 和 g 中有一个恒为零, 或 $f(x)=\lambda g(x)$ (对 $x\in[a,b]$), 这里 λ 是一个常数.

证明 不妨设f 和 g 都不恒为零, 否则只要一个恒为零,结论显然成立.

方法一 对任意 t,

$$0 \leqslant \int_a^b (f(x)+tg(x))^2\,\mathrm{d}x = \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x + 2t\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x + t^2\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x,$$

上式右边是t 的二次三项式, 根据判别法即可得Cauchy 积分不等式.等式成立当且仅当关于 t 的二次三项式有唯一零点, 即存在唯一的 t_0 使得

$$\int_a^b (f(x)+t_0g(x))^2\,\mathrm{d}x = 0,$$

因 $(f(x)+t_0g(x))^2$ 连续非负, 所以 $f(x)+t_0g(x)\equiv 0$.

方法二 视 b 为变量, 积分为变上限积分. 令

$$F(b) = \left(\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 - \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x,$$

则 $F(a)=0$ 且 $F(b)$ 对 b 可导:

$$\begin{aligned} F'(b) &= 2f(b)g(b)\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x - f^2(b)\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x - g^2(b)\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b (f(b)g(x)-f(x)g(b))^2\,\mathrm{d}x \geqslant 0, \end{aligned}$$

所以 $F(b)$ 关于b 单调增: $F(b)\geqslant F(a)=0$ $(b\geqslant a)$, 因此就有Cauchy 积分不等式. 等号成立当且仅当 $F(b)$ 是常数, 即 $F'(b)=0$, 也就是

$$f(b)g(x)-f(x)g(b)\equiv 0,$$

所以等号成立当且仅当 $f(x)$ 和 $g(x)$ 成比例.

19. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续的导数, 则对任意 $a\in[0,1]$, 有

$$|f(a)| \leqslant \int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x + \int_0^1 |f'(x)|\,\mathrm{d}x.$$

证明　因 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 利用积分中值公式, 存在 $x_0 \in [0,1]$ 使得

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = f(x_0),$$

对任意的 $a \in [0,1]$, 有

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x + \int_0^1 |f'(x)|\,\mathrm{d}x &\geqslant \int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x + \left|\int_{x_0}^a |f'(x)|\,\mathrm{d}x\right| \\
&\geqslant \left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{x_0}^a f'(x)\,\mathrm{d}x\right| \\
&= \left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right| + |f(a) - f(x_0)| \\
&\geqslant \left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + f(a) - f(x_0)\right| \\
&= |f(a)|.
\end{aligned}$$

20. 证明: $0.944 < \int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x < 0.947$.

证明：利用 $\sin x$ 在 $x=0$ 处的Taylor 展开.首先存在 $0 < \theta < 1$ 使得

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6}\cos\theta x > x - \frac{x^3}{6},$$

所以有不等式

$$\sin x > x - \frac{x^3}{6} \quad (x > 0),$$

$$\Longrightarrow \int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x > \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{6}\right)\,\mathrm{d}x = 1 - \frac{1}{18} > 0.944;$$

另一方面, 存在 $0 < \theta' < 1$ 使得

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!}\cos\theta' x < x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!},$$

所以有不等式

$$\sin x < x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!},$$

$$\Longrightarrow \int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x < \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{5!}\right)\,\mathrm{d}x < 0.947.$$

点评: 对于 $\sin x\ x \in [0,1]$, 其在 $x=0$ 的Taylor展开式中, 当展开奇数项（或偶数项）时, 余项分别取负（或正）, 正是利用这个特点, 给出两个不等式进而得到题目中积分的上下限的估计. 两个不等式也可采用求导的方法给出, 例如设

$$\varphi(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$$

求导得 $\varphi''(x) = -\sin x + x > 0$, 所以$\varphi'(x)$ 单调增, $\varphi'(x) > \varphi'(0) = 0$, 推出 $\varphi(x)$ 单调增, $\varphi(x) > \varphi(0) = 0$

21. 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续可微, 且 $|f'(x)| \leqslant M$. 证明

$$\left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant \frac{M}{2n}.$$

证明

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)\right| &= \left|\sum_1^n \int_{(k-1)/n}^{k/n} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\,\mathrm{d}x\right| \\
&\leqslant \sum_{k=1}^n \int_{(k-1)/n}^{k/n} \left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant \sum_{k=1}^n \int_{(k-1)/n}^{k/n} \left|f'(\xi_k)\left(x - \frac{k}{n}\right)\right|\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant M\sum_{k=1}^n \int_{(k-1)/n}^{k/n} \left(\frac{k}{n} - x\right)\,\mathrm{d}x = \frac{M}{2n}.
\end{aligned}$$

点评: 这是比较经典的处理方法: 将积分分段, 将求和写成积分. 再利用微分中值公式和不等式的估计即可.

22. 设 $f:\mathbb{R} \to (0,+\infty)$ 是一个可微函数, 且对任意实数 x, y 满足

$$|f'(x) - f'(y)| \leqslant |x - y|.$$

求证: 对任意实数 x, 有

$$\left(f'(x)\right)^2 < 2f(x).$$

证明 由题意, $f(x) > 0$ 对任何 x 成立. 当 $h \geqslant 0$ 时,

$$0 < f(x+h) = f(x) + \int_x^{x+h} (f'(t) - f'(x))\,\mathrm{d}t + hf'(x),$$

根据条件, 对于 $t > x$, 有

$$f'(t) - f'(x) \leqslant t - x,$$

所以

$$\begin{aligned} 0 < f(x+h) &= f(x) + \int_x^{x+h} (f'(t) - f'(x))\,\mathrm{d}t + hf'(x) \\ &< f(x) + \int_x^{x+h} (t - x)\,\mathrm{d}t + hf'(x) \\ &= f(x) + \frac{h^2}{2} + hf'(x) \end{aligned}$$

同理当 $h < 0$ 时,有

$$\begin{aligned} 0 < f(x-h) &= f(x) + \int_x^{x-h} (f'(t) - f'(x))\,\mathrm{d}t - hf'(x) \\ &< f(x) + \int_x^{x-h} (t - x)\,\mathrm{d}t - hf'(x) \\ &= f(x) + \frac{h^2}{2} - hf'(x) \end{aligned}$$

所以对任意 h 有

$$\frac{h^2}{2} + f'(x)h + f(x) > 0,$$

即上式左边的二次三项式没有实根, 即

$$(f'(x))^2 < 2f(x).$$

点评: 本题看上去像一道微分的题目, 但是只要考虑到如下Newton-Leibniz 公式

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t$$

就可以建立微分和积分的桥梁.

23. (第一册P192, 第27题)

（1）设 $f(x)$ 是$[0,1]$ 上单调递减的连续函数, 证明: 对任意 $\alpha \in (0,1)$, 有

$$\int_0^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \alpha \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x;$$

（2）若仅假设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递减, 证明同样的结论.

证明 （1）的 **证法一**：因 $f(x)$ 连续单调减, 通过换元可得

$$\int_0^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x=\alpha\int_0^1 f(\alpha x)\,\mathrm{d}x,$$

对 $x\in[0,1]$, 有 $\alpha x<x$, 所以 $f(\alpha x)\geqslant f(x)$, 积分得

$$\int_0^1 f(\alpha x)\,\mathrm{d}x\geqslant\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\Longrightarrow\int_0^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x=\alpha\int_0^1 f(\alpha x)\,\mathrm{d}x\geqslant\alpha\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x;$$

（1）的 **证法二**：设

$$g(\alpha)=\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x,$$

因 $f(x)$ 连续, 因此 $\int\limits_0^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x$ 是 α 的可微函数, 对 $g(\alpha)$ 求导得

$$g'(\alpha)=\frac{1}{\alpha^2}\left(\alpha f(\alpha)-\int_0^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x\right)=\frac{1}{\alpha^2}\int_0^\alpha(f(\alpha)-f(x))\,\mathrm{d}x\leqslant 0.$$

所以 $g'(\alpha)\leqslant 0$, $g(\alpha)$ 单调减, 因此 $g(\alpha)\geqslant g(1)=\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ 即得结果.

（2）的 **证法一**：因 $f(x)$ 在$[0,1]$ 上单调减, 因此可积.

$$\alpha\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\alpha\int_0^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x+\alpha\int_\alpha^1 f(x)\,\mathrm{d}x,$$

对 $x\in[\alpha,1]$, $f(x)\leqslant f(\alpha)$, 因此

$$\int\limits_\alpha^1 f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int\limits_\alpha^1 f(\alpha)\,\mathrm{d}x=(1-\alpha)f(\alpha).$$

对 $x\in[0,\alpha]$, $f(x)\geqslant f(\alpha)$, 因此

$$\int\limits_0^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\int\limits_0^\alpha f(\alpha)\,\mathrm{d}x=\alpha f(\alpha).$$

推出

$$\begin{aligned}\alpha\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x&=\alpha\int_0^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x+\alpha\int_\alpha^1 f(x)\,\mathrm{d}x\\&\leqslant\alpha\int_0^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x+\alpha(1-\alpha)f(\alpha)\\&\leqslant\alpha\int_0^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x+(1-\alpha)\int_0^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

（2）的 **证法二**：在（1）的证法一中, 通过换元, 得到下列公式

$$\int_0^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha\int_0^1 f(\alpha x)\,\mathrm{d}x,$$

并直接得到结果.

点评: 根据书上定理5.16, 换元需要的条件是 $f(x)$ 连续, 当没有这个假设时, 一般来说换元公式不一定成立. 但是上述公式在仅假设 $f(x)$ 单调减时仍然可以证明是成立的, 具体证明如下: 因 $f(x)$ 单调减, 所以函数 $g(x)=f(\alpha x)$ $x\in[0,1]$ 也是单调减, 所以 $f(x)$ 在$[0,\alpha]$ 上可积, $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上可积. 对 $[0,1]$ 作分割:

$$T_x:\ 0=x_0<x_1<\cdots<x_n=1,$$

并取 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$. 令 $u_i=\alpha x_i,\ \eta_i=\alpha\xi_i$, 则得到 $[0,\alpha]$ 的分割:

$$T_u:\ 0=u_0<u_1<\cdots<u_n=\alpha x_n=\alpha$$

且$|T_u|=\alpha|T_x|$, 所以当 $|T_x|\to 0$ 时, $|T_u|=\alpha|T_x|\to 0$. 因为 $f(x)$ 在$[0,\alpha]$ 上, $g(x)=f(\alpha x)$ 在 $[0,1]$ 上都可积, 所以

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(\alpha x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{|T_x|\to 0}\sum_{i=1}^n f(\alpha\xi_i)\Delta x_i\\ &=\frac{1}{\alpha}\lim_{|T_u|\to 0}\sum_{i=1}^n f(\eta_i)\Delta u_i\\ &=\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha f(u)\,\mathrm{d}u\end{aligned}$$

这样在仅仅假设 $f(x)$ 单调减的情形, 仍然有上述公式, 后续证明与（1）的证法一相同.

（2）的 **证法三**：设

$$g(\alpha)=\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x,$$

在（1）的证法二中, 为了证明 $g(\alpha)$ 单调减, 用到了 $f(x)$ 连续, 因此 $g(\alpha)$ 可导, 并通过导数证明 $g(\alpha)$ 单调减.

在仅假设 $f(x)$ 单调减情形, 求导显然不能再用了, 但采取单调减的定义, 仍可证明 $g(\alpha)$ 单调减. 具体证明如下:

对任意的 $1>\alpha>\beta>0$,

$$\begin{aligned}g(\alpha)-g(\beta)&=\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{1}{\beta}\int_0^\beta f(x)\,\mathrm{d}x\\ &=\frac{1}{\alpha}\int_0^\beta f(x)\,\mathrm{d}x+\frac{1}{\alpha}\int_\beta^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{1}{\beta}\int_0^\beta f(x)\,\mathrm{d}x\\ &=\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}\right)\int_0^\beta f(x)\,\mathrm{d}x+\frac{1}{\alpha}\int_\beta^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

当 $x \in [0, \beta]$ 时, $f(x) \geqslant f(\beta)$

$$\Longrightarrow \int_0^\beta f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_0^\beta f(\beta)\,\mathrm{d}x = \beta f(\beta)$$

当 $x \in [\beta, \alpha]$ 时, $f(x) \leqslant f(\beta)$

$$\Longrightarrow \int_\beta^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int \beta^\alpha f(\beta)\,\mathrm{d}x = (\alpha - \beta) f(\beta).$$

注意到

$$\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right) < 0$$

所以

$$\begin{aligned} g(\alpha) - g(\beta) &= \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right) \int_)^\beta f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\alpha} \int_\beta^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right) \beta f(\beta) + \frac{1}{\alpha} (\alpha - \beta) f(\beta) \\ &= 0 \end{aligned}$$

即$g(\alpha)$ 单调减, 后续证明与（1）的证法二相同.