中 国 科 学 技 术 大 学

2021－2022 学年第二学期期末考试试卷

课程名称 线性代数(B1) 课程编号 MATH1009

考试时间 2022年07月03日 考试形式 闭卷

学院 ______ 姓名 ______ 学号 ______

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							
复评人							

答题时不要超过此线

注意事项：

1. 答题前，考生务必将所在院系、姓名、学号等填写清楚。
2. 请考生在答卷纸左侧留出装订区域。

得分	评卷人

一、【本题30分，每空5分】填空.

1. 已知向量 α 在 $\mathbb{R}^3$ 的自然基下的坐标为 $(1,2,3)$, 则 α 在 $\mathbb{R}^3$ 的基 $\alpha_1=(1,0,0)$, $\alpha_2=(1,1,0)$, $\alpha_3=(1,1,2)$ 下的坐标为________.

2. 若 3 阶方阵 A 的特征值分别是 $1,2,3$, 则 $\det(I+A)=$________.

3. 平面$\mathbb{R}^2$上的线性变换$\mathcal{A}$: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$将单位圆$C$变为椭圆$E$. 则椭圆$E$的长、短半轴的长度分别是________.

4. 已知线性变换$\mathcal{A}$在某组基下的矩阵为$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & x & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 在另一组基下的矩阵为$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$. 则$x$与$y$分别为________.

5. 二次型 $Q(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3-x_1)^2$ 的规范形为________.

6. 若实二次型$Q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+6x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+4tx_2x_3$ 正定, 则参数 t 满足________.

得分	评卷人

二、【每小题5分,共20分】判断下面的说法是否正确，并给出理由(判断正确得2分,给出正确理由得3分).

1. 设A与B都是阶n方阵且A可逆，则AB与BA相似.

2. 欧氏空间的度量矩阵相合于单位阵.

3. 欧氏空间中线性变换的不同特征值对应的特征向量一定相互正交.

4. 正交方阵都实相似于对角阵.

得分	评卷人

三、【14分】给定$\mathbb{R}^3$上实二次型$Q(x)=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2-4x_1x_2-4x_2x_3$.

1. 利用正交变换将该二次型化为标准形, 并写出相应的正交变换(12分);
2. 判断方程$Q(x)=1$在三维直角坐标系中所表示曲面的类型(2分).

$2y_1^2+5y_2^2-y_3^2=1$

单叶双曲面

$$P=\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$x=Py$

答题时不要超过此线

得分	评卷人

四【14分】在数域$\mathbb{R}$上次数不超过3的多项式全体构成的线性空间$\mathbb{R}_3[x]$上定义内积$(f,g) := \int_{-1}^{1} \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \pi$$

1. 把向量组$1, x, x^2$按顺序做Schmidt正交化得到单位正交向量组(9分).

2. 令$W = \langle 1, x, x^2 \rangle$. 求多项式$p(x) \in W$使得$|x^3 - p(x)|$达到最小(5分).

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{\pi}{2} \quad \int_{-1}^{1} \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{3}{8}\pi \quad \int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 0, \quad \int_{-1}^{1} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 0$$

$\beta_3 = x^2 - \frac{1}{2}$ $\quad |\beta_3| = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \quad e_2 = \frac{x}{\sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\right)}} \quad e_3 = \frac{x^2 - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{\pi}{8}}}$$

2°
$$\left| x^3 - (a_0 + a_1 x + a_2 x^2) \right|^2$$
$$= \int_{-1}^{1} \frac{(x^3 - a_0 - a_1 x - a_2 x^2)^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$
$$= \int_{-1}^{1} \frac{x^6 + a_0^2 + a_1^2 x^2 + a_2^2 x^4 - 2a_0 x^3 - 2a_1 x^4 - 2a_2 x^5 + 2a_0 a_1 x + a_0 a_2 x^2 + a_1 a_2 x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$
$$= \int_{-1}^{1} \frac{x^6}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + a_0^2 \pi + a_1^2 \frac{\pi}{2} + a_2^2 \frac{3}{8}\pi - 2a_1 \frac{3}{8}\pi + a_0 a_2 \frac{\pi}{2}$$

$$\langle x^3 - (a_0 + a_1 x + a_2 x^2), 1 \rangle = 0$$
$$\langle x^3 - (a_0 + a_1 x + a_2 x^2), x \rangle = 0$$
$$\langle x^3 - (a_0 + a_1 x + a_2 x^2), x^2 \rangle = 0$$

$\Rightarrow$ 解出 a_0, a_1, a_2

$$\begin{cases} -a_0 \pi - \frac{\pi}{2} a_2 = 0 \\ \frac{3}{8}\pi - a_1 \frac{\pi}{2} = 0 \\ -a_0 \frac{\pi}{2} - a_2 \frac{3}{8}\pi = 0 \end{cases}$$

$\langle 1, 1 \rangle = \pi$ $\quad \langle 1, x^3 \rangle = 0$

$\langle 1, x \rangle = 0$ $\quad \langle x, x^3 \rangle = \frac{3}{8}\pi$

$\langle 1, x^2 \rangle = \frac{\pi}{2}$ $\quad \langle x^2, x^3 \rangle = 0$

$\langle x, x \rangle = \frac{\pi}{2}$

$\langle x, x^2 \rangle = 0$

$\langle x^2, x^2 \rangle = \frac{3}{8}\pi$

解: $\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = \frac{3}{4} \\ a_2 = 0 \end{cases}$

$p(x) = \frac{3}{4}x$

得分	评卷人

五、【14分】给定矩阵$A=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3}\end{pmatrix}$.

1. 证明: $\mathbb{R}^3$上的线性变换$\mathcal{A}$: $\mathbf{x}\to A\mathbf{x}$为正交变换(2分);

2. 证明：$\mathcal{A}$是绕过原点的某条直线l 的旋转变换(5分);

3. 求旋转轴l的方向及旋转角度θ(7分).

答题时不要超过此线

得分	评卷人

【8分】设A，B是n阶复方阵且$A^2=A$, $B^2=B$.

1 证明：A可以相似对角化(4分);

2 证明：若$AB=BA$,则存在可逆阵P使得$P^{-1}AP$与$P^{-1}BP$同时为对角阵(4分).