中国科学技术大学 2020～2021 学年第一学期
数学分析（B1）期中考试 答案[1]

1. (1) $1<\sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}<\sqrt[n]{n}$，由于 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}1=1$，故原式 $=1$.

(2) 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}2e^{\frac{1}{x}}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\cos x}{x}=2+0=2$.

(3) 原式 $\xlongequal{t=\sqrt[6]{1+x}}\lim\limits_{t\to1}\frac{t^3-t}{t^2-1}=\lim\limits_{t\to1}t=1$.

(4) $f'(x)=\left(e^{\ln(\sin x)\cdot\cos x}\right)'=(\sin x)^{\cos x}\left(-\sin x\cdot\ln(\sin x)+\frac{\cos^2 x}{\sin x}\right)$.

(5) $f(x)=\left(1+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{24}x^4+o\left(x^5\right)\right)^{\frac{1}{3}}=1+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{24}x^4\right)+\frac{\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)}{2}\left(\frac{1}{2}x^2\right)^2+o\left(x^5\right)=1+\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{24}x^4+o\left(x^5\right)$.

2. 原式可化为，$a_{n+1}-1=-\left(a_n-1\right)^2$，由 $|a_0-1|=\frac{1}{2}<1$，$|a_n-1|<\left(\frac{1}{2}\right)^n<\frac{1}{n}$，

对于 $\forall\varepsilon>0$，都有 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$，$\forall n>N$，有 $|a_n-1|<\frac{1}{N}<\varepsilon$，故 $\{a_n\}$ 收敛，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$.

3. $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(x+a-2)^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)=f(0)=0$，取 $x_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$，此时 $\sin\left(\frac{1}{x_n}\right)=1$，

故 $\lim\limits_{x\to0^+}(x+a-2)^2=(a-2)^2=0$，即 $a=0$，

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\left(x\cos x+(b-1)(1-x)^{\frac{1}{x}}\right)=\lim\limits_{x\to0^-}x\cos x+(b-1)\lim\limits_{x\to0^-}(1-x)^{\frac{1}{x}}$，

而 $\lim\limits_{x\to0^-}x\cos x=0$，故 $\lim\limits_{x\to0^-}=(b-1)(1-x)^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{e}(b-1)=0$，即 $b=0$，

此时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续；

$f'(x+0)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0$，$f'(x-0)=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^-}\cos x=1$，

$f'(x-0)\neq f'(x+0)$，故在 $x=0$ 处 $f(x)$ 不可导.

4. 即证 $f(x)=x^2-x\sin x-\cos x+\frac{1}{2}=0$ 有两个不同的实根，而 $f'(x)=x(2-\cos x)$，

即 $x>0$ 时 $f'(x)>0$，$x<0$ 时 $f'(x)<0$，$f'(0)=0$，即 $f(0)=f_{\min}=-\frac{1}{2}$，

又 $f(\pi)=f(-\pi)=\pi^2+\frac{3}{2}>0$，由零点存在性定理，$f(x)$ 在 $(-\pi,0)$ 和 $(0,\pi)$ 各有一根，

得证.

5. 由题，对于 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta_1$，$\delta_2>0$，使得 $\forall|x_1-x_2|<\delta_1$，$|x_3-x_4|<\delta_2$ 且 x_1，$x_2\in(a,b]$，x_3，$x_4\in[b,c)$，

有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$，$|f(x_3)-f(x_4)|<\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$，

取 $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$，对于 $\forall t_2>t_1>0$，取 $|t_1-t_2|<\delta$ 且 t_1，$t_2\in(a,c)$，

若 t_1，$t_2\in(a,b]$ 或 t_1，$t_2\in[b,c)$，显然有 $|f(t_1)-f(t_2)|<\delta$，

[1]水平有限，疏漏难免，欢迎联系Shiyaowei040126@mail.ustc.edu.cn纠错或提出建议

若 $t_1 \in (a,b)$，$t_2 \in (b,c)$，有 $|t_1-b|<\delta<\delta_1$，$|t_2-b|<\delta<\delta_2$，$|f(t_1)-f(t_2)| \le |f(t_1)-f(b)|+|f(t_2)-f(b)| < \dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$，

综上，得证 $f(x)$ 在 (a,c) 上一致连续.

6. 第一象限椭圆上点 $(x_0=a\cos\theta, y_0=b\cos\theta)$ 的切线方程为 $\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=1$，

切线与坐标轴交点为 $\left(\dfrac{a}{\cos\theta},0\right)$ 和 $\left(0,\dfrac{b}{\sin\theta}\right)$，面积 $S=\dfrac{ab}{\sin 2\theta}$，

显然有 $\sin 2\theta = 1$ 即 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 时取得最小值 $S_{\min}=ab$.

7. 取 $g(x)=-\dfrac{f(x)}{x}$，$g'(x)=\dfrac{1}{x^2}(f(x)-xf'(x))$，$h(x)=-\dfrac{1}{x}$，$h'(x)=\dfrac{1}{x^2}$，

由柯西中值定理，有 $\dfrac{g(a)-g(b)}{h(a)-h(b)}=\dfrac{g'(\xi)}{h'(\xi)}=\dfrac{\frac{f(b)}{b}-\frac{f(a)}{a}}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}=\dfrac{af(b)-bf(a)}{a-b}=f(\xi)-\xi f'(\xi)$，

得证.

8. 记 $A_0=\dfrac{A}{1-a}$，则原等式化为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(ax)}{x-ax}=A_0$，

即 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$ 使得 $|x|<\delta$ $(x\neq 0)$ 时，有 $A_0-\dfrac{\varepsilon}{2}<\dfrac{f(x)-f(ax)}{x-ax}<A_0+\dfrac{\varepsilon}{2}$，

即 $0<|x|<\delta$ 时，总有 $A_0-\dfrac{\varepsilon}{2}<\dfrac{f(a^nx)-f(a^{n+1}x)}{a^nx-a^{n+1}x}<A_0+\dfrac{\varepsilon}{2}$，

即 $A_0-\dfrac{\varepsilon}{2}<\dfrac{f(x)-f(ax)}{x-ax}=\dfrac{\sum_0^{k-1}f(a^kx)-f(a^{k+1}x)}{\sum_0^{k-1}a^kx-a^{k+1}x}<A_0+\dfrac{\varepsilon}{2}$，

令 $n\to+\infty$，并取极限，得 $A_0-\varepsilon<A_0-\dfrac{\varepsilon}{2}\le\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\le A_0+\dfrac{\varepsilon}{2}<A_0+\varepsilon$，

由 ε 的任意性和极限的定义，可得 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=A_0=\dfrac{A}{1-a}$，即证得：$f'(0)$ 存在且 $f'(0)=\dfrac{A}{1-a}$.