1. 请证明如下关系

a. $[\hat{a}, e^{\alpha\hat{a}^\dagger-\alpha^*\hat{a}}] = \alpha e^{\alpha\hat{a}^\dagger-\alpha^*\hat{a}}$

b. $|\alpha\rangle = e^{\alpha\hat{a}^\dagger-\alpha^*\hat{a}}|0\rangle$

a. 证明：考察 $[\hat{a}, \alpha\hat{a}^+-\alpha^*\hat{a}]$

$$= \hat{a}(\alpha\hat{a}^+-\alpha^*\hat{a}) - (\alpha\hat{a}^+-\alpha^*\hat{a})\hat{a}$$

$$= (\alpha\hat{a}^+\hat{a}+\alpha-\alpha^*\hat{a}\hat{a}) - (\alpha\hat{a}^+\hat{a}-\alpha^*\hat{a}\hat{a})$$

$$= \alpha.$$

则 $[\hat{a}, e^{\alpha\hat{a}^+-\alpha^*\hat{a}}]$

$$= \sum_n \frac{1}{n!}[\hat{a}(\alpha\hat{a}^+-\alpha^*\hat{a})^n - (\alpha\hat{a}^+-\alpha^*\hat{a})^n\hat{a}]$$

$$= \sum_n \frac{1}{n!}[\hat{a}, (\alpha\hat{a}^+-\alpha^*\hat{a})^n]$$

α为常数，与任何算符对易

$$= \sum_n \frac{1}{n!} n[\hat{a}, (\alpha\hat{a}^+-\alpha^*\hat{a})](\alpha\hat{a}^+-\alpha^*\hat{a})^{n-1}$$

$$= \alpha\sum_n \frac{1}{n!}(\alpha\hat{a}^+-\alpha^*\hat{a})^n = \alpha e^{\alpha\hat{a}^+-\alpha^*\hat{a}}$$

b. 由课上的结论，$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2+\alpha\hat{a}^+}|0\rangle$

由第二次作业中证明的结论 $e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{\hat{A}}e^{\hat{B}}e^{-\frac{1}{2}\hat{C}}$.

其中 $\hat{C} = [\hat{A}, \hat{B}]$ 且 $[\hat{C}, \hat{A}] = [\hat{C}, \hat{B}] = 0$

则 $e^{\alpha\hat{a}^+-\alpha^*\hat{a}} = e^{\alpha\hat{a}^+}e^{-\alpha^*\hat{a}}e^{\frac{1}{2}[\alpha\hat{a}^+, \alpha^*\hat{a}]}$ ①

$$[\alpha\hat{a}^+, \alpha^*\hat{a}] = |\alpha|^2(\hat{a}^+\hat{a}-\hat{a}\hat{a}^+) = -|\alpha|^2$$

则①式可继续化简为 $e^{\alpha\hat{a}^+}e^{-\alpha^*\hat{a}}e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2+\alpha\hat{a}^+}e^{-\alpha^*\hat{a}}$.

而 $e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2+\alpha\hat{a}^+}e^{-\alpha^*\hat{a}}|0\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2+\alpha\hat{a}^+}\left(\sum_n \frac{1}{n!}(-\alpha^*\hat{a})^n|0\rangle\right)$

$$= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2+\alpha\hat{a}^+}|0\rangle = |\alpha\rangle$$

即原式得证.

2．一般来说，二次型的哈密顿量(能量算符)可以通过变换化成谐振子的形式。如已知某体系能量算符为

$$\hat{H} = \frac{5}{3}\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{2}{3}[\hat{a}^2 + (\hat{a}^\dagger)^2], \quad \text{where} \quad [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$$

可以通过如下变换 (设系数 u,v 为实数)

$$\hat{b} = u\hat{a} + v\hat{a}^\dagger$$
$$\hat{b}^\dagger = u\hat{a}^\dagger + v\hat{a}$$

使能量算符化为谐振子形式

$$\hat{H} = \lambda\hat{b}^\dagger\hat{b} + E_0$$

求系数 λ ,E_0 及体系能谱(能量算符本征值)。
提示：要求算符 b 满足如下对易关系

$$[\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = 1$$

解：$[\hat{b}, \hat{b}^+] = 1 \Rightarrow (u\hat{a}+v\hat{a}^+)(u\hat{a}^+ + v\hat{a}) = 1$

$\Rightarrow u^2 - v^2 = 1$

由 $\begin{cases} \hat{b} = u\hat{a} + v\hat{a}^+ \\ \hat{b}^+ = u\hat{a}^+ + v\hat{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{a} = \hat{b}u - \hat{b}^+ v \\ \hat{a}^+ = \hat{b}^+ u - \hat{b} v \end{cases}$

$\hat{H} = \frac{5}{3}(\hat{b}^+ u - \hat{b} v)(\hat{b} u - \hat{b}^+ v)$

$= [\frac{2}{3}(u^2+v^2) - uv][\hat{b}^2 + (\hat{b}^+)^2] + (\frac{5}{3}u^2 - \frac{4}{3}uv)\hat{b}^+\hat{b}$

$+ (\frac{5}{3}v^2 - \frac{4}{3}uv)\hat{b}\hat{b}^+$

令 $\hat{b}^2$ 与 $(\hat{b}^+)^2$ 前系数为0

$\Rightarrow \begin{cases} 2(u^2+v^2) - 5uv = 0 \\ u^2 - v^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = \frac{2}{\sqrt{3}} \\ v = \frac{1}{\sqrt{3}}, \end{cases}$ (令 u, v>0)

则 $\hat{H} = \frac{4}{3}\hat{b}^+\hat{b} - \frac{1}{3}\hat{b}\hat{b}^+$

$= \hat{b}^+\hat{b} - \frac{1}{3}$

$\Rightarrow \lambda = 1 \quad E_0 = -\frac{1}{3}$

$E = n - \frac{1}{3}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$

3. 假设{|1>，|2>}构成一组正交完备基。某体系的能量算符可写成如下形式

$$\hat{H} = E(|1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2| + |1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|)$$

试求体系本征能量和相应的本征态。

解：$\hat{H}$的矩阵形式为

$$E\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

令 $\det\begin{pmatrix} E-\lambda & E \\ E & -E-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{2}E$

$\lambda = \sqrt{2}E$ 时

$$\begin{pmatrix} E-\sqrt{2}E & E \\ E & -E-\sqrt{2}E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \xRightarrow{\text{归一}} \text{令}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}\begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda = -\sqrt{2}E$ 时

$$\begin{pmatrix} E+\sqrt{2}E & E \\ E & -E+\sqrt{2}E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \xRightarrow{\text{归一}} \text{令}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}\begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

即本征能量为$\sqrt{2}E$的本征态为 $\frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}\left[(1+\sqrt{2})|1\rangle + |2\rangle\right]$

本征能量为$-\sqrt{2}E$的本征态为 $\frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}\left[(1-\sqrt{2})|1\rangle + |2\rangle\right]$

4. 在三维 ket 矢空间有一组正交归一的基矢{|1>,|2>,|3>}及相互对易的算符$\hat{A}$，$\hat{B}$。已知算符$\hat{A}$在这组基矢下的矩阵表示为$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$，算符$\hat{B}$的矩阵表示为$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i \\ 0 & -i & 3 \end{pmatrix}$。

试求算符$\hat{A}$与算符$\hat{B}$的一组正交归一的共同本征态，并写出这些共同本征态对应于算符$\hat{A}$与算符$\hat{B}$的本征值。说明如何以这些本征值为量子数标定不同的共同本征态。

解：$\hat{B}|1\rangle = 2|1\rangle$

$\hat{B}|2\rangle = |2\rangle - i|3\rangle$

$\hat{B}|3\rangle = i|2\rangle + 3|3\rangle$

令 $\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & i \\ -i & 3-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda = 2+\sqrt{2}$ 或 $2-\sqrt{2}$.

$\lambda = 2+\sqrt{2}$ 时

$\begin{pmatrix} -1-\sqrt{2} & i \\ -i & 1-\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \xRightarrow{\text{归一}}$ 令 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i(\sqrt{2}+1) \end{pmatrix}$

即 $\lambda = 2+\sqrt{2}$ 对应本征态为 $\frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}|2\rangle - \frac{i(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}|3\rangle \triangleq |\alpha\rangle$

$\lambda = 2-\sqrt{2}$ 时

$\begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 & i \\ -i & 1-\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \xRightarrow{\text{归一}}$ 令 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}\begin{pmatrix} i(\sqrt{2}-1) \\ 1 \end{pmatrix}$

即 $\lambda = 2-\sqrt{2}$ 对应本征态 $\frac{i(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}|2\rangle - \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}|3\rangle \triangleq |\beta\rangle$

即共同本征态为 $|1\rangle$, $|\alpha\rangle$, $|\beta\rangle$, 利用 $\hat{A}$, $\hat{B}$ 对应矩阵的本征值，这3个态可分别被标定为：

$|1, 2\rangle$, $|-1, 2+\sqrt{2}\rangle$, $|-1, 2-\sqrt{2}\rangle$

hw4 解答

Ziguang Lin

2021 年 11 月 2 日

1 第一题

1.1 题目

$$a.\quad [\hat{a}, e^{\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}}] = \alpha e^{\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}}$$
$$b.\quad |\alpha\rangle = e^{\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}}|0\rangle$$

1.2 解答

第一问：由 $[A, e^{\lambda B}] = \lambda[A, B]e^{\lambda B}$ 可知：

$$\begin{aligned}
[a, e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a}] &= [a, \alpha a^\dagger - \alpha^* a]e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a} \\
&= \alpha[a, a^\dagger]e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a} \\
&= \alpha e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a}
\end{aligned}$$

第二问：由第一问可知，

$$\begin{aligned}
e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a}|0\rangle &= \frac{1}{\alpha}[a, e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a}]|0\rangle \\
&= \frac{1}{\alpha} a e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a}|0\rangle
\end{aligned}$$

即

$$a(e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a}|0\rangle) = \alpha(e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a}|0\rangle)$$

所以 $e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a}|0\rangle$ 是 a 的本征态，所以 $|\alpha\rangle = e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a}|0\rangle$

2 第二题

2.1 题目

一般来说, 二次型的哈密顿量 (能量算符) 可以通过幺正变换化成谐振子的形式。如已知某体系能量算符为

$$\hat{H} = \frac{5}{3}\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{2}{3}[\hat{a}^2 + (\hat{a}^\dagger)^2] \quad where \quad [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$$

可以通过如下变换 (设系数 u,v 为实数)

$$\hat{b} = u\hat{a} + v\hat{a}^\dagger$$

$$\hat{b}^\dagger = u\hat{a}^\dagger + v\hat{a}$$

使能量算符化为谐振子形式

$$\hat{H} = \lambda\hat{b}^\dagger\hat{b} + E_0$$

求系数 λ, E_0 及体系能谱 (能量算符本征值)。

提示: 要求算符 $\hat{b}$ 满足如下对易关系

$$[\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = 1$$

2.2 解答

将题目中的 $b, b\dagger$ 的形式带入题目给的哈密顿量中，有

$$\begin{aligned} H &= \lambda(ua^\dagger + va)(ua + va^\dagger) + E_0 \\ &= \lambda(u^2 + v^2)a^\dagger a + \lambda uv(a^2 + (a^\dagger)^2) + \lambda v^2 + E_0 \end{aligned}$$

与含 $a, a^\dagger$ 的式子对比可得：

$$\begin{aligned} \lambda(u^2 + v^2) &= \frac{5}{3} \\ \lambda uv &= \frac{2}{3} \\ \lambda v^2 + E_0 &= 0 \end{aligned}$$

再由 $[b, b^\dagger] = 1$ 可得

$$u^2 - v^2 = 1$$

以上四个式子可以解出来：

$$\lambda = 1, \quad E_0 = -\frac{1}{3}$$

所以哈密顿量在 $b^\dagger b$ 空间中可以写成：

$$H = b^\dagger b - \frac{1}{3}$$

所以能谱为：

$$E_n = n - \frac{1}{3}$$

3　第三题

3.1　题目

假设 $\{|1>, |2>\}$

$$\hat{H} = E(|1><1| - |2><2| + |1><2| + |2><1|)$$

试求体系本征能量和相应的本征态。

3.2　解答

$$|1>= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |2>= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

则

$$H = E \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

本征方程

$$H|\psi_n>= E_n|\psi_n>$$

解的

$E_1 = \sqrt{2}E, |\psi_1>= \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}|1> + \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}|2>;$
$E_2 = -\sqrt{2}E, |\psi_2>= \frac{-\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}|1> + \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}|2>;$

4 第四题

4.1 题目

在三维 ket 矢空间有一组正交归一的基矢 $\{|1>, |2> \ |3>\}$ 及相互对易的算符 $\hat{A}, \hat{B}$ 。已知算符 $\hat{A}$, 算符 $\hat{B}$ 在这组基矢的矩阵表示为：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i \\ 0 & -i & 3 \end{pmatrix}$$

试求算符 $\hat{A}$ 与算符 $\hat{B}$ 的一组正交归一的共同本征态，并写出这些共同本征态对应于算符 $\hat{A}$ 与算符的本征值。说明能否以这些本征值为量子数标定不同的共同本征态。

4.2 解答

1) 计算可得：$AB = BA$，即 A，B 有共同本征态。

2) 设共同本征态形式：

$$|\psi >= \alpha|1 > +\beta|2 > +\gamma|3 >$$

则

$$A|\psi >= \begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \\ -\gamma \end{pmatrix}$$

$$B|\psi >= \begin{pmatrix} 2\alpha \\ \beta + i\gamma \\ -3\beta + 3\gamma \end{pmatrix}$$

显然

$$|\psi_1 >= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A 已经是对角形式，将 B 对角化，由

$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 3 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} 2+\sqrt{2} & \\ & 2-\sqrt{2} \end{pmatrix} T^{-1}$$

对应的共同本征态

$$|\psi_2>=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}|3>+i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}|2>$$

$$|\psi_3>=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}|2>+i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}|3>$$

在 $\{|\psi_1>,|\psi_2> \ |\psi_3>\}$ 下对应的本征值：

$$A:(1,-1,-1)$$

$$B:\left(2,2+\sqrt{2},2-\sqrt{2}\right)$$

即 B 解除了 A 的子空间的简并， 可以用 A，B 的本征值作为量子数标记不同的共同本征态。或者回答只用 A 的本征值无法做到，而只用 B 已经可以做到了。