# 中国科学技术大学2013－2014学年第一学期

# 《单变量微积分》期中考试试卷

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 总分 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 得分 | | | | | | | |
| 复评人 | | | | | | | |

学号：

姓名：

学生所在系：

答题时不要超过此线

| 得分 | 评卷人 |
|---|---|
| | |

## 一、求极限或导数（每题5分，共25分）

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\tan\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$

(3) $f'(0)=1, f(0)=0$, 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(1-\cos x)}{\tan x^2}$.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x-n\sin x}{nx+\cos nx} \quad (x\neq 0)$

(5) 设函数$f(x)=x^2\sin 3x$，求$f^{(20)}(x)$.

| 得分 | 评卷人 |
| --- | --- |
| | |

二、（本题12分）

设函数

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x<0, \\ a\cos x+\sin bx, & x\geqslant 0, \end{cases}$$

试按情况给出参数$a$, $b$应满足的条件分别使得：(1) $f(x)$在$(-\infty+\infty)$上连续；(2) $f(x)$在$(-\infty+\infty)$上可导，并说明此时导函数在$(-\infty+\infty)$上连续。

答题时不要超过此线

| 得分 | 评卷人 |
| --- | --- |
| | |

三、（本题11分）

设函数$f(u)$在$u=0$的邻域内二阶可导，$f'(0)=1$，$f''(0)=2$，$t=t(x)$是函数$x=te^t$的反函数$(t>-1)$，$y=f(e^t+x-\cos x)$，求$\frac{dy}{dx}|_{x=0}$及$\frac{d^2y}{dx^2}|_{x=0}$.

| 得分 | 评卷人 |
| --- | --- |
| | |

四、（每题8分，共16分）

(1) 试确定函数$f(x)=x^x$在闭区间$[0,1]$上的最大值与最小值，并写出相应的最大值点与最小值点。（其中$f(0+0)=f(0)=1$）

答题时不要超过此线

(2) 设函数$y=f(x)$在点$x=1$处三阶可导，且$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-1}{(x-1)^3}=2$，求$f(x)$在点$x=1$处带$Peano$余项的三阶泰勒展开式；并证明$x=1$不是$f(x)$的极值点，但是$f(x)$的拐点。

| 得分 | 评卷人 |
| --- | --- |
| | |

五、（1小题8分，2小题4分，共12分）

(1) 设$f(x)$在区间$[0,1]$上二阶可导且对$\forall x\in[0,1], |f''(x)|\leqslant 2$，试证：如果函数$f(x)$在$(0,1)$内有驻点，则必有$|f(1)-f(0)|<1$.

(2) 设$a>0$, 函数$f(x)$在区间$[0,a]$上三阶可导，且$f(0)=f''(0)=0$，证明：$\exists\xi\in(0,a)$，使得$af'(a)=f(a)+\frac{1}{3}a^3f'''(\xi)$.

| 得分 | 评卷人 |
| --- | --- |
| | |

## 六、（单项选择填空　　每题3分，共24分）

(1) 下述数列中(　　)是单调的，(　　)是有界的。

$A: 0,1,0,2,...,0,n,...$　　　　$B: 1,1,2,2,...,n,n,...$

$C: 1,-1,2,-2,...,n,-n,...$　　　　$D: 1,1,1,\frac{1}{2},...,1,\frac{1}{n},...$

(2) 假设$f(x)$在零的去心邻域中有定义，且$x\to 0$时$f(x)$发散，则下述说法中仅有(　　)是正确的，而(　　)必然是错误的。

$A$: 单侧极限$f(0+0)=f(0-0)$；　　　　$B$: $f(x)$ 在零点局部无界；

$C$: 在零点处$f(x)$不满足柯西收敛准则的条件；$D$: $f(x)$在零点局部有界.

(3) 假设$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$是有界数列，如果数列$\{x_{n+1}-x_n\}_{n=1}^{\infty}$发散，则$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$(　　)是发散的；如果$\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=0$，则$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$(　　)是收敛的。

$A$: 一定；　　　　$B$: 不一定；　　　　$C$: 一定不.

(4) 假设函数$f(x)$在半开半闭区间$(0,1]$中一致连续，则$f(x)$在零点的右极限(　　)存在；若假设函数$g(x)$在区间$I$中可导并具有有界导函数，则$g(x)$在$I$中(　　)是一致连续的。

$A$: 一定；　　　　$B$: 不一定；　　　　$C$: 一定不.

答题时不要超过此线