2023 春算法基础期中考试卷答案

BY 陈雪

2023 年 4 月 24 日

题目 1. 选择题。

解答. 123 123 2 123

题目 2. 快速排序递归树期望树高。

证明. 设 X_n 为对 n 个数快速排序决策树树高的随机变量，而 $Y_n = 2^{X_n}$。

可写出 $\mathbb{E}(X_n)$ 的递归式：

$$\mathbb{E}(X_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\mathbb{E}(\max\{X_{i-1}, X_{n-i}\}) + 1)$$

值得注意的是 max 的期望不等于期望的 max，这是我们要引入 Y_n 的原因。看一下 Y_n 的「递推式」：

$$\mathbb{E}(Y_n) \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(2 \cdot \mathbb{E}(Y_{i-1} + Y_{n-i})) = \frac{4}{n}\sum_{i=0}^{n-1} Y_i$$

接下来用归纳法易证：$\mathbb{E}(Y_n) \le cn^3$，则 $\mathbb{E}(X_n) = O(\mathbb{E}(Y_n)) = O(\log n)$。

□

题目 3. Hadamard 变换。

解答. 如果 v 为偶数（二进制最后一位为 0），则 $\forall u \in \{0,1\}^n, \langle v, u\rangle = \langle \lfloor v/2 \rfloor, \lfloor u/2 \rfloor\rangle$，故：

$$\hat{x}(v) = \sum_{u \text{ is even}} (-1)^{\langle \lfloor v/2 \rfloor, \lfloor u/2 \rfloor\rangle} x(u) + \sum_{u \text{ is odd}} (-1)^{\langle \lfloor v/2 \rfloor, \lfloor u/2 \rfloor\rangle} x(u)$$

同理分析可得出 v 为奇数时候的表达式：

$$\hat{x}(v) = \sum_{u \text{ is even}} (-1)^{\langle \lfloor v/2 \rfloor, \lfloor u/2 \rfloor\rangle} x(u) - \sum_{u \text{ is odd}} (-1)^{\langle \lfloor v/2 \rfloor, \lfloor u/2 \rfloor\rangle} x(u)$$

注意到 $\lfloor v/2 \rfloor, \lfloor u/2 \rfloor$ 都是 $n-1$ 为二进制数，则按照奇偶位分治我们就递归到了更加简单的子问题，之后流程与 FFT 完全一致。时间复杂度为 $O(n \log n)$。

题目 4. 两个函数的最大值。

解答. 对 $f_1(y)$ 求导可得：

$$f_1'(y) = \sum_{i=1}^{n} w_i\,(2y - 2x_i)$$

令 $f_1'(y) = 0$ 得：

$$y = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}$$

这就是 $f_1(y)$ 的最小值点，时间复杂度为 $O(n)$。

先对 $x_{1\sim n}$ 从小到大排序，然后对 $f_2(y)$ 求导得：

$$f_2'(y) = -\sum_{i=1}^{p} w_i + \sum_{i=p+1}^{n} w_i\,(x \in [x_p, x_{p+1}])$$

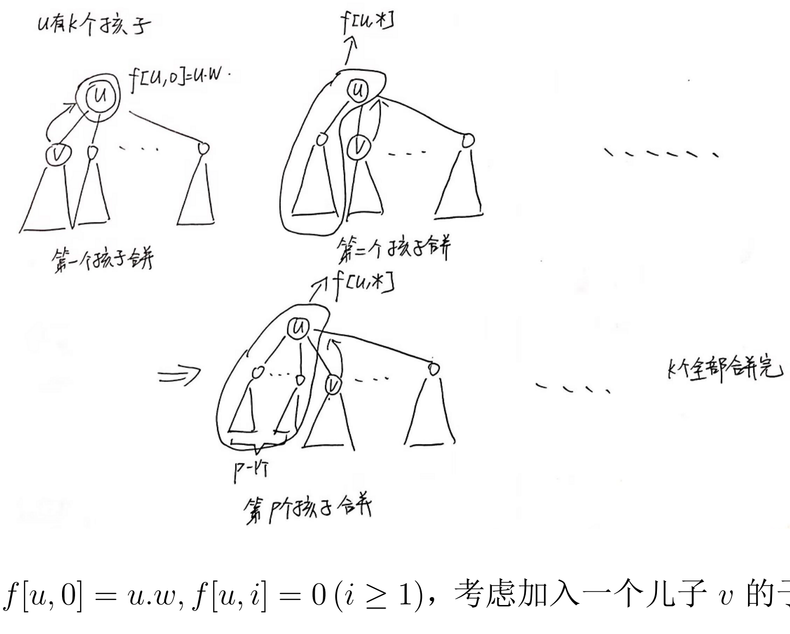
那再 for 一边，看哪一个区间 $f_2'(y)$ 变符号了，那么最小值点就在这个点附近的 $O(1)$ 个点。

时间复杂度为 $O(n \log n)$，排序的复杂度。

题目 5. 树的最大带权—d 独立集。

解答. 设计一个动态规划，设 $f[u,i]$ 表示选完 u 子树内的点，最后一个选的点与 u 的距离为 i 的最多选点个数。

考虑一种特殊的转移方式，一个一个孩子子树加入的转移。看下图辅助理解。



初始化为 $f[u,0] = u.w, f[u,i] = 0\,(i \geq 1)$，考虑加入一个儿子 v 的子树时如何转移。

- 儿子部分不选点，没有更新。
- 已加入部分不选点，全部从儿子部分过继过来。即 $f[u,i] = \max\{f[u,i], f[v,i+1]\}$。

- 已加入部分和儿子部分都选点，不妨设儿子部分最后一个选的点与 v 距离为 j，则当且仅当 $i+j+1 \geq d$ 的时候可以转移，转移到 $\min\{i, j+1\}$ 的位置，即 $f[u, \min\{i, j+1\}] = \max\{f[u, \min\{i, j+1\}], f[u, i] + f[v, j]\}$。

这样转移要加入一个辅助数组 $g[u, i]$，转移时将当前的 $f[u, i]$ 全部拷贝到 $g[u, i]$ 上，然后用 $g[u, i]$ 代替上述转移式等号右边的 f，防止转移时 f 互相影响。

这样直接转移是 $O(nd^2)$ 时间复杂度的，第三种转移在用一个前缀和优化可做到 $O(nd)$ 时间复杂度。还可以用长链剖分（超纲知识）优化到线性。

题目 6. 长为 k 的严格递增子序列个数。

解答. 设 $f[i, j]$ 表示以 i 为结尾，长度为 j 的子序列数量。则转移方程为：

$$f[i, j] = \sum_{k<i \text{ and } a_k<a_i} f[k, j-1]$$

用一颗平衡树维护，通过插入顺序满足 $k < i$ 的限制，然后用 a_i 为平衡树的比较关键字，然后再维护子树内 f 的和，则可以 $O(\log n)$ 内转移。

时间复杂度为 $O(nk \log n)$。