

数分第四至六章复习提纲及例题

积分的复习要点

掌握基本概念, 灵活使用方法.

一、原函数

1、**定义:** $F(x)$ 称为给定的函数 $f(x)$ 的原函数, 如果

$$F'(x) = f(x), \quad \text{或} \quad dF(x) = f(x) dx$$

因此, $f'(x)$ 称为 $f(x)$ 的导函数, $f(x)$ 称为 $f'(x)$ 的原函数.

2、**提醒:** 原函数不唯一, 不定积分 $\int f(x) dx$ 表示 $f(x)$ 原函数的全体! 两个原函数相差一个常数, 因此求出一个原函数, 再加任意常数 (称为积分常数) 就是 $\int f(x) dx$.

例

$$\int \frac{dx}{x} = x \cdot \frac{1}{x} - \int x d\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + \int \frac{dx}{x}$$

等式两边都表示 $\frac{1}{x}$ 原函数的全体, 不是一个函数. 因此不能由此推出 $0 = 1$.

(2) 可以通过求导验证所的不定积分是否正确

$$d \int f(x) dx = f(x) dx, \quad \text{或} \quad \frac{d}{dx} \int f(x) dx = f(x).$$

3、**主要性质:** 连续函数必有原函数 (但有原函数的函数未必连续). 虽然有些函数存在原函数, 但未必能够把原函数表示成初等函数.

4、**主要方法:** 换元法和分部积分法. **注意: 积分方法要灵活使用.**

5、**主要类型:** 以下类型函数的原函数, 原则上都可以表示成初等函数: (1) 有理式、(2) 三角有理式、(3) 其他可通过换元转化为有理式或三角有理式的类型.

6、关键点:

- (1) 通过因式分解 (或待定系数法) 把有理式分拆为基本有理式的积分.
- (2) 通过万能变换以及其他变换, 把三角有理式积分转化为有理式积分.
- (3) 通过换元去根号; 通过分部积分法解决被积函数中的对数函数问题.
- (4) 通过其他变换或分部求积分问题.
- (5) **简单的积分是通过对微分的熟练掌握观察出来的.**

二、定积分

1、**定义**: 对任意分割 $T: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ 以及任意点 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, 如下列极限存在有限, 则可积

$$\lim_{|T| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx.$$

注意: 如果已知函数可积 (例如连续函数), 则可用特殊分割 (例如等分分割) 和取特殊点 ξ_i (例如取分割的端点), 从Riemann 和的极限计算积分.

2、**几何意义**: 区间 $[a, b]$ 上被积函数 $f(x)$ “覆盖”下的面积.

3、**主要性质**: 可积必有界; 被积函数的可加性; 积分区间的可加性; 保序性; 绝对值的积分; 积分中值定理 (包括广义积分中值定理).

4、**基本理论**: $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 当且仅当 (Darboux上下和可以不看)

$$\lim_{|T| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i = 0.$$

这里 ω_i 是函数 $f(x)$ 在小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的振幅. 由此推出 **连续函数、有有限个间断点的函数、区间 $[a, b]$ 上单调函数** 一定可积, 同时给出一些性质的证明. **注意: 连续、有有限间断点、单调是函数可积的必要条件.**

5、**计算振幅**: 函数在区间 $[a, b]$ 上的振幅为

$$\omega = \sup\{|f(x) - f(y)| \mid x, y \in [a, b]\}.$$

特别, 单调有界函数的振幅等于函数在左右端点值的差.

6、**变限积分 (变上限或变下限)**: 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 则

$$\varphi(x) = \int_a^x f(t) dt$$

定义了 $[a, b]$ 上一个函数. $\varphi(x)$ 有下列性质:

(1) $f(x)$ 可积 $\implies \varphi(x)$ 连续.

(2) $f(x)$ 连续 $\implies \varphi(x)$ 可导, 且 $\varphi'(x) = f(x)$. **即 $\varphi(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 从而证明了连续函数必有原函数.** 类似下列导数是 $\varphi(u)$ 与 $u = b(x)$ 复合函数的导数:

$$\frac{d}{dx} \int_a^{b(x)} f(t) dt = \frac{d}{dx} \varphi(b(x)) = \varphi'(x) b'(x) = f(b(x)) b'(x)$$

7、**Newton-Leibniz 公式**

若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续且 $F'(x) = f(x)$ 或 $dF(x) = f(x) dx$ ($f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续的原函数), 则

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a) \quad x \in [a, b].$$

特别 $f(x)$ 可表示为它的导函数 $f'(x)$ 的变上限积分:

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t) dt, \text{ 或 } f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt$$

8、积分方法: 换元、分部、Newton-Leibniz 公式、利用奇偶性等对称性、利用被积函数可加性、积分区间可加性、配对法等.

9、重要公式:

(1) **广义积分中值定理:** 函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积且不变号, 则存在 $\xi \in [a, b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx.$$

当 $g(x) = 1, f(x)$ 连续时, 存在 $\xi \in [a, b]$, 使得 $\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b - a)$.

(2) **Cauchy-Schwarz 不等式:**

$$\left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \int_a^b g^2(x) dx.$$

10、广义积分 (无限区间上的积分、瑕积分): 因此有限区间上有界函数积分称为**常义积分**.

(1) 广义积分=常义积分+极限 (区间趋于无穷或端点区域瑕点)

(2) 通过换元, 两种广义积分之间, 广义积分与常义积分之间可以互换.

(3) 对于无限区间中含有瑕点的积分可采取区间分段方法, 各个击破.

三、积分的应用: (记住这些公式的最好办法, 是自己推导一遍).

设 $y = f(x) (x \in [a, b])$, 或 $x = x(t), y = y(t) (t \in [\alpha, \beta])$

1、弧长:

$$ds = \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx, \text{ 或 } ds = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

2、旋转体体积:

$$dV = \pi f^2(x) dx = \pi y^2(t) x'(t) dt.$$

3、旋转体侧面积:

$$dS = 2\pi f(x) ds = 2\pi f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = 2\pi y(t) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

积分的例题

一、一般用换元处理带根号积分, 用分部积分处理带对 \ln 或 \arctan 等函数积分.

1. 计算 $I = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

解 $I = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-(\frac{1}{x})^2}} = -\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$

其中 $u = \frac{1}{x}$ 解得 $I = -\arcsin u + C = -\arcsin \frac{1}{x} + C$.

2. 计算 $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$

解 令 $x = t^2$, 则

$$I = \int \frac{dt^2}{\sqrt{t^2(1-t^2)}} = 2 \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = 2 \arcsin \sqrt{x} + C.$$

3. 计算 $I = \int \frac{x \ln(x + \sqrt{1+x^2})}{(1+x^2)^2} dx$

解 分部积分:

$$I = -\frac{1}{2} \int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) d\frac{1}{1+x^2} = -\frac{1}{2} \frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{1+x^2} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}}$$

其中

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}} &= \int \frac{1}{1+x^2} \left(\sqrt{1+x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} \right) = \int d\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right) \\ \implies I &= -\frac{1}{2} \frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{1+x^2} + \frac{1}{2} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C \end{aligned}$$

二、通过配对方法计算积分.

4. 计算 $I = \int \frac{dx}{1+x^2+x^4}$. 令 (配对) $J = \int \frac{x^2 dx}{1+x^2+x^4}$

$$\begin{aligned} I + J &= \int \frac{1+x^2}{1+x^2+x^4} dx = \int \frac{1+x^{-2}}{x^2+x^{-2}+1} dx = \int \frac{d(x-x^{-1})}{(x-x^{-1})^2+3} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{3}}(x-x^{-1}) \right) + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I - J &= \int \frac{1-x^2}{1+x^2+x^4} dx = -\int \frac{1-x^{-2}}{x^2+x^{-2}+1} dx = \int \frac{d(x+x^{-1})}{(x+x^{-1})^2-1} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d(x+x^{-1})}{x+x^{-1}-1} - \frac{1}{2} \int \frac{d(x+x^{-1})}{x+x^{-1}+1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1} \right| + C. \end{aligned}$$

由此解得 I .

5. 计算 $I = \int \frac{\sin x dx}{2 \sin x + 3 \cos x}$. 令 (配对) $J = \int \frac{\cos x dx}{2 \sin x + 3 \cos x}$, 则

$$2I + 3J = \int dx = x + C$$

$$-3I + 2J = \int \frac{(-3 \sin x + 2 \cos x) dx}{2 \sin x + 3 \cos x} = \ln |2 \sin x + 3 \cos x| + C$$

$$\implies I = \frac{1}{13} (2x - 3 \ln |2 \sin x + 3 \cos x|) + C$$

三、利用被积函数对称性 (周期、奇偶性、或反称性) 简化积分.

6. 设 a, b 不同时为零, 计算 $I = \int_0^\pi \frac{\cos x}{\sqrt{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}} dx$.

解 作变换 $u = x - \frac{\pi}{2}$, 则

$$I = - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u}{\sqrt{a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u}} du.$$

在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上, 被积函数是奇函数, 因此 $I = 0$.

7. 计算 $I = \int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$. 作变换 $u = x - \frac{\pi}{2}$,

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(u + \frac{\pi}{2}) \cos u}{1 + \sin^2 u} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{u \cos u}{1 + \sin^2 u} dx + \frac{\pi}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos u}{1 + \sin^2 u} dx$$

上式右边第一个积分的被积函数是奇函数, 因此在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上积分为零. 第二个积分被积函数是偶函数, 因此在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上积分是半区间上积分的2倍:

$$I = \frac{\pi}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos u}{1 + \sin^2 u} dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d \sin u}{1 + \sin^2 u} = \pi \arctan(\sin u) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{4}.$$

8. 计算下列积分 $\int_{-\frac{n\pi}{2}}^{\frac{n\pi}{2}} (x^3 + \sin^2 x) \cos^2 x dx$

解 $x^3 \cos^2 x$ 是奇函数, $\sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{8}(1 - \cos 4x)$ 是周期为 $\frac{\pi}{2}$ 偶函数,

$$\implies \int_{-\frac{n\pi}{2}}^{\frac{n\pi}{2}} (x^3 + \sin^2 x) \cos^2 x dx = \int_{-\frac{n\pi}{2}}^{\frac{n\pi}{2}} \frac{1}{8}(1 - \cos 4x) dx = \frac{n\pi}{8}.$$

9. 对任意实数 a , 计算 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \tan^a x}$. 作变换 $u = \frac{\pi}{2} - x$

$$\begin{aligned} I &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{-1}{1 + \tan^a(\pi/2 - u)} du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan^a u}{1 + \tan^a u} du \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{1}{1 + \tan^a u}\right) du = \frac{\pi}{2} - I. \\ &\Rightarrow I = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

本题被积函数具有一定的反称性.

10. 设 $f(x)$ 连续, 证明 $\int_0^{2\pi} f(a \cos x + b \sin x) dx = 2 \int_0^{\pi} f(\sqrt{a^2 + b^2} \cos x) dx$.

证明 令 $\cos \phi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\sin \phi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(a \cos x + b \sin x) dx &= \int_0^{2\pi} f(\sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \phi)) dx \\ &= \int_{-\phi}^{2\pi - \phi} f(\sqrt{a^2 + b^2} \cos x) dx \end{aligned}$$

被积函数是周期 2π 的函数, 因此在一个周期内积分与起点无关, 并由对称性积分等于半区间的2倍即可得结果.

11. 设 $f(x)$ 连续, 证明 $I = \int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx$.

证明 作变换 $u = \pi - x$:

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = - \int_{\pi}^0 (\pi - u) f(\sin(\pi - u)) du = \pi \int_0^{\pi} f(\sin u) du - \int_0^{\pi} u f(\sin u) du$$

由此易得结果(定积分中, 积分变量是“哑”变量).

12. 已知 $I = \int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{(1 + x^2)^2} dx$ 收敛, 求值.

解 利用积分在变换 $u = \frac{1}{x}$ 下对称性, 有

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{(1 + x^2)^2} dx = \int_{+\infty}^0 \frac{-\frac{1}{u} \ln u}{(1 + (\frac{1}{u})^2)^2} d\frac{1}{u} = - \int_0^{+\infty} \frac{u \ln u}{(1 + u^2)^2} du$$

所以积分为零. **注意** 如果用分部积分消去对数函数,

$$I = \int_0^{+\infty} \ln x d\left(\frac{-1}{2(1 + x^2)}\right) = -\frac{\ln x}{2(1 + x^2)} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{2x(1 + x^2)}$$

则上式右边第一项在代入下限 $x = 0$ 时不收敛, 因此不可以(见“五”中讨论).

13. 求不定积分 $I = \int \frac{dx}{\sin(x + \frac{\pi}{3}) \sin(x + \frac{\pi}{6})}$.

解 如果用 $\sin(x + \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x$ 和 $\sin(x + \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x$, 再用万能变换可能比较繁琐. 因此借用三角函数的公式

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3} - \left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right) \\ &= \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= 2 \int \frac{\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)} dx - 2 \int \frac{\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)}{\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)} dx \\ &= \ln\left(\frac{\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}\right)^2 + C. \end{aligned}$$

四、在定积分换元时, 要保证积分区间的对应; 或在利用Newton-Leibniz 公式计算定积分时, 要确保原函数是定义在积分区间内的原函数.

14. 计算 $\int_0^{\pi} \frac{dx}{2 + \cos 2x}$. **解:** 令 $t = \tan \frac{x}{2}$ ($-\pi < x < \pi$), 积分区间是 $[0, \pi]$, 包含在变换允许区域范围内.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + \cos^2 x} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + 2\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2} \frac{2}{1+t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{2(1+t^2)}{3t^4 - 2t^2 + 3} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{2\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)}{3t^2 + 3\frac{1}{t^2} - 2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{2d\left(t - \frac{1}{t}\right)}{3\left(t - \frac{1}{t}\right)^2 + 4} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2du}{3u^2 + 4} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\left(\frac{\sqrt{3}}{2}u\right)}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}u\right)^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{\sqrt{3}}{2}u \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

注意1: 如果要求被积函数 $\frac{1}{2 + \cos 2x}$ 在 $(0, \pi)$ 上原函数, 需要通过

$$u = t - \frac{1}{t}, \quad t = \tan \frac{x}{2} \quad (-\pi < x < \pi)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int \frac{dx}{2 + \cos 2x} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{\sqrt{3}}{2}u\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \sqrt{3} \cot x + C, \quad x \in (0, \pi) \end{aligned}$$

即 $F(x) = -\frac{1}{\sqrt{3}} \arctan(\sqrt{3} \cot x)$ 是被积函数在 $(0, \pi)$ 上原函数, 因此定积分为

$$\int_0^\pi \frac{dx}{1 + \cos^2 x} = F(\pi^-) - F(0^+) = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

这里 $F(\pi^-)$ 和 $F(0^+)$ 分别表示当 $x \rightarrow \pi^-$ 和 $x \rightarrow 0^+$ 时 $F(x)$ 的极限.

注意2: 如果先作变换 $u = 2x$, 再作 $t = \tan \frac{u}{2} (-\pi < u < \pi)$

$$\int \frac{dx}{2 + \cos 2x} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{2 + \cos u} = \int \frac{dt}{3 + t^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{\tan x}{\sqrt{3}} \right) + C.$$

因为 $-\pi < u < \pi$, 推出 $x = \frac{u}{2}$ 的取值范围是 $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, 所以 $F_1(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{\tan x}{\sqrt{3}} \right)$ 只是被积函数 $\frac{1}{2 + \cos 2x}$ 在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 中的原函数. 不是在 $(0, \pi)$ 上的原函数, 因此在 $[0, \pi]$ 上的定积分不能使用 $F_1(x)$. 不难验证公共区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上, $F'(x) - F_1'(x) = 0$.

五、在用分部积分计算定积分时,

$$\int_a^b f(x) dg(x) = f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b g(x) df(x),$$

只有当上式右端第一项 $f(x)g(x)$ 在两个端点的值 (或极限) 存在有限, 以及右端积分存在, 才能给出左端的积分.

15. 计算 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \ln \sin x dx$. **分析** 因为

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \ln \sin x = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \frac{\sin x}{x} \ln \left(x \frac{\sin x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$$

所以该积分不是瑕积分. 如果采用分部积分

$$I = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x d \cos x = - \cos x \ln \sin x \Big|_{0^+}^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\sin x} dx$$

右边第一项下限代入后不收敛, 无法解决问题. 克服这个困难的方法是先算出 $\sin x \ln \sin x$ 在 $(0, \pi/2)$ 上的原函数, 再利用N-L公式. 因此先求不定积分

$$\int \sin x \ln \sin x dx = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x d \cos x = - \cos x \ln \sin x + \int \frac{\cos^2 x}{\sin x} dx,$$

其中

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos^2 x}{\sin x} dx &= \int \frac{\cos^2 x \sin x}{\sin^2 x} dx = - \int \frac{\cos^2 x}{1 - \cos^2 x} d \cos x \\ &= - \int \left(1 - \frac{1}{1 - \cos^2 x} \right) d \cos x = \cos x + \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} + C \end{aligned}$$

所以在 $(0, \pi/2)$ 上的原函数为

$$\begin{aligned} F(x) &= -\cos x \ln \sin x + \cos x + \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \\ &= (1 - \cos x) \ln \sin x + \cos x - \ln(1 + \cos x). \end{aligned}$$

且在端点极限都收敛:
$$\begin{cases} F(\frac{\pi}{2}) &= 0, \\ F(0^+) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = 1 - \ln 2. \end{cases}$$

最后的积分 $I = F(\frac{\pi}{2}) - F(0^+) = \ln 2 - 1$.

六、变限积分给出的是函数, 因此可讨论极限、连续、求导和积分.

16. 设 $F(x) = \int_0^x \sin \frac{1}{t} dt$, 求 $F'(0)$.

解: 被积函数 $\sin \frac{1}{t}$ 有界, 只是在 $t = 0$ 不连续, 因此可积. 但 $F'(x) = \sin \frac{1}{x}$ 在 $x = 0$ 有第二类间断点, 所以无法利用导函数在 $x = 0$ 的极限计算 $F'(0)$, 只能按定义来计算. 显然 $F(0) = 0$, 当 $x \neq 0$ 时, 分部积分得

$$F(x) = \int_0^x t^2 d \cos \frac{1}{t} = t^2 \cos \frac{1}{t} \Big|_0^x - \int_0^x \cos \frac{1}{t} dt^2 = x^2 \cos \frac{1}{x} - 2 \int_0^x t \cos \frac{1}{t} dt.$$

$$\begin{aligned} \implies F'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos \frac{1}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \int_0^x t \cos \frac{1}{t} dt}{x} \\ &= -\lim_{x \rightarrow 0} 2x \cos \frac{1}{x} = 0. \end{aligned}$$

17. 设 $f(x) = \int_x^{x^2} |\sin t| dt$, 求 $f'(x)$: 利用复合函数求导有

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left(\int_0^{x^2} |\sin t| dt \right) - \frac{d}{dx} \left(\int_0^x |\sin t| dt \right) = 2x |\sin x^2| - |\sin x|$$

18. 求极限

$$I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \left(\int_0^{u^2} \arctan(1+t) dt \right) du}{(1 - \cos x) \ln(1+x)}.$$

解 分子中 $\int_0^{u^2} \arctan(1+t) dt$ 是变上限积分给出的 u 的函数. 再做变上限积分得到 x 的函数. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 分子是无穷小量. 利用 L'Hospital 法则有

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\int_0^x \left(\int_0^{u^2} \arctan(1+t) dt \right) du}{\frac{1}{2}x^2 \cdot x} \cdot \frac{\frac{1}{2}x^2}{1 - \cos x} \cdot \frac{x}{\ln(1+x)} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \arctan(1+t) dt}{\frac{3}{2}x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(1+x^2) \cdot 2x}{3x} = \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

19. 证明 $\int_0^{2\pi} \left(\int_x^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \right) dx = 0$.

证明 因为 $\int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt$ 收敛, 所以用分部积分

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \left(\int_x^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \right) dx &= x \int_x^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} x d \left(\int_x^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \right) \\ &= \int_0^{2\pi} x \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{2\pi} \sin x dx = 0. \end{aligned}$$

20. 求函数 $f(x) = \int_0^{x^2} (2-t)e^{-t} dt$ 的最大值和最小值.

解 注意到 $f(x)$ 是偶函数, 因此只要在 $[0, +\infty)$ 上考虑极值问题即可.

求导并求驻点 $f'(x) = (2-x)e^{-x} \cdot 2x = 0$ 解得唯一驻点: $x_0 = \sqrt{2}$.

当 $0 < x < \sqrt{2}$ 时, $f'(x) > 0, \implies f(x)$ 单调增;

当 $\sqrt{2} < x < +\infty$ 时, $f'(x) < 0, \implies f(x)$ 单调减;

因此 $x_0 = \sqrt{2}$ 是 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内的极大值点. 极大值为:

$$f(\sqrt{2}) = \int_0^2 (2-t)e^{-t} dt = \int_0^2 d(t-1)e^{-t} = (t-1)e^{-t} \Big|_0^2 = e^{-2} + 1.$$

在左边界点 $f(0) = 0$, 又边界点:

$$\begin{aligned} f(+\infty) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^{x^2} (2-t)e^{-t} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^{x^2} d(t-1)e^{-t} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (t-1)e^{-t} \Big|_0^{x^2} = 1. \end{aligned}$$

比较得 $f_{\min} = f(0), f_{\max} = f(\sqrt{2}) = e^{-2} + 1$.

七、一些积分不等式或等式的证明.

21. 证明

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\sin x) dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\cos x) dx.$$

证明 在 $[0, \pi/2]$ 中, 有 $\sin x \leq x, \cos x \geq 1 - \frac{1}{2}x^2$, 因此

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\sin x) dx &\leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1, \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\cos x) dx &\geq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{1}{2} \cos^2 x \right) dx = \frac{3\pi}{8} > 1. \end{aligned}$$

22. 设连续函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2) = f(x) + x$, $\int_0^2 f(x) dx = 0$, 求 $\int_1^3 f(x) dx$.

$$\begin{aligned}\int_1^3 f(x) dx &= \int_1^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx = \int_1^2 f(x) dx + \int_0^1 f(u+2) du \\ &= \int_1^2 f(x) dx + \int_0^1 (f(u) + x) du = \int_0^2 f(x) dx + \frac{1}{2}x^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

23. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续可微, $f(0) = 0, f(1) = 1$, 试证

$$\int_0^1 |f'(x) - f(x)| dx \geq \frac{1}{e}.$$

证明 设 $F(x) = e^{-x}f(x)$, 则 $F'(x) = e^{-x}(f'(x) - f(x))$, 因此

$$\int_0^1 e^{-x}(f'(x) - f(x)) dx = \int_0^1 F'(x) dx = F(1) - F(0) = \frac{1}{e},$$

在 $[0, 1]$ 上, $|e^{-x}(f'(x) - f(x))| \leq |f'(x) - f(x)|$, 因此有

$$\frac{1}{e} = \left| \int_0^1 e^{-x}(f'(x) - f(x)) dx \right| \leq \int_0^1 |e^{-x}(f'(x) - f(x))| dx \leq \int_0^1 |f'(x) - f(x)| dx$$

24. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续可导, 且 $f(a) = 0$. 求证

$$\int_a^b f^2(x) dx \leq \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b (f'(x))^2 dx.$$

证明 根据 Newton-Leibniz 公式, 有

$$f(x) = f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t) dt, \quad x \in [a, b].$$

所以应用 Cauchy 积分不等式, 可得

$$\begin{aligned}|f(x)|^2 &= \left| \int_a^x f'(t) dt \right|^2 \leq \int_a^x 1^2 dt \int_a^x |f'(t)|^2 dt \\ &= (x-a) \int_a^x |f'(t)|^2 dt \leq (x-a) \int_a^b |f'(t)|^2 dt \quad x \in [a, b].\end{aligned}$$

两边在 $[a, b]$ 上积分即得所证.

25. 设 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上非负连续函数. 若 $\int_a^b f(x) dx = 0$, 则 $f(x) \equiv 0$.

证明 (反证) 若存在 $x_0 \in (a, b)$ (x_0 是端点的情况可类似讨论) 使得 $f(x_0) > 0$, 由于 $f(x)$ 连续, 所以存在 $\delta > 0$ 使得 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset [a, b]$. 并且当 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 时, 有 $f(x) \geq \frac{f(x_0)}{2}$.

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b f(x) dx = \int_a^{x_0-\delta} f(x) dx + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x) dx + \int_{x_0+\delta}^b f(x) dx \\ &\geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x) dx \geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{f(x_0)}{2} dx \\ &= \delta f(x_0) > 0. \end{aligned}$$

这与条件矛盾. 因此 $f(x) \equiv 0$.

26. 设 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上单调递增的连续函数. 求证

$$\int_a^b xf(x) dx \geq \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) dx.$$

证明 将不等式两边相减并将 b 换成变量 t , 令

$$F(t) = \int_a^t xf(x) dx - \frac{a+t}{2} \int_a^t f(x) dx \quad (a \leq t \leq b).$$

$$\begin{aligned} F'(t) &= tf(t) - \frac{1}{2} \int_a^t f(x) dx - \frac{a+t}{2} f(t) \\ &= \frac{t-a}{2} f(t) - \frac{1}{2} \int_a^t f(x) dx \geq \frac{t-a}{2} f(t) - \frac{1}{2}(t-a)f(t) = 0. \end{aligned}$$

$\implies F(t)$ 在 $[a, b]$ 上单调递增. 因为 $F(a) = 0$, 所以 $F(b) \geq 0$.

27. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 连续, $1 \leq f(x) \leq 3$, 证明

$$1 \leq \int_0^1 f(x) dx \int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx \leq \frac{4}{3}.$$

证明 首先, 利用 Cauchy-Schwarz 不等式得

$$1 = \left(\int_0^1 \sqrt{f(x)} \frac{1}{\sqrt{f(x)}} dx \right)^2 \leq \int_0^1 f(x) dx \int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx.$$

另一方面考虑函数 $g(u) = \frac{u}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{u}$ 在区间 $[1, 3]$ 上的最大值, 有

$$\max_{1 \leq u \leq 3} \left(\frac{u}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{u} \right) = \sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

得

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x) dx \int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx &= \int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{3}} dx \int_0^1 \frac{\sqrt{3}}{f(x)} dx \\ &= \frac{1}{4} \left(\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{3}} dx + \int_0^1 \frac{\sqrt{3}}{f(x)} dx \right)^2 \\ &\leq \frac{1}{4} \left(\int_0^1 \frac{4}{\sqrt{3}} dx \right)^2 = \frac{4}{3}.\end{aligned}$$

八、利用积分求极限和计算面积.

28. 求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n\sqrt{n^2+1^2}} + \frac{2}{n\sqrt{n^2+2^2}} + \cdots + \frac{n}{n\sqrt{n^2+n^2}} \right]$$

解 原式可表示为

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n\sqrt{n^2+1^2}} + \frac{2}{n\sqrt{n^2+2^2}} + \cdots + \frac{n}{n\sqrt{n^2+n^2}} \\ &= \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{1+(\frac{1}{n})^2}} \frac{1}{n} + \frac{\frac{2}{n}}{\sqrt{1+(\frac{2}{n})^2}} \frac{1}{n} + \cdots + \frac{\frac{n}{n}}{\sqrt{1+(\frac{n}{n})^2}} \frac{1}{n},\end{aligned}$$

因此是可积函数 $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ 在 $[0, 1]$ 的等分分割 $x_i = \frac{i}{n}$, $i = 0, 1, \dots, n$ 以及 $\xi_i = \frac{i}{n}$ 的 Riemann 和, 所以极限是

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \sqrt{1+x^2} \Big|_0^1 = \sqrt{2} - 1.$$

29. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\ln(1^{2020} + 2^{2020} + \cdots + n^{2020})}$

$$\begin{aligned}&\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\ln(1^{2020} + 2^{2020} + \cdots + n^{2020})} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{2020 \ln n + \ln \left(\left(\frac{1}{n}\right)^{2020} + \left(\frac{2}{n}\right)^{2020} + \cdots + 1 \right)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{2021 \ln n + \ln \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^{2020} \right)}\end{aligned}$$

其中 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^{2020} \rightarrow \int_0^1 x^{2020} dx = \frac{1}{2021}$ 有界, 所以原式的极限为 $\frac{1}{2021}$.

30. 求由曲线 $|\ln x| + |\ln y| = 1$ 围成的封闭区域的面积.

解 区域由下列四条曲线围成

$$\begin{cases} L_1: y = \frac{e}{x} & x \geq 1, \\ L_2: y = \frac{x}{e} & x \geq 1, \\ L_3: y = ex & 0 < x < 1, \\ L_4: y = \frac{1}{ex} & 0 < x < 1, \end{cases}$$

其中 L_1 与 L_2, L_3 的交点分别为 $x = e, x = 1$; L_4 与 L_2, L_3 的交点分别为 $x = 1, x = \frac{1}{e}$; 因此面积为

$$D = \int_{1/e}^1 \left(ex - \frac{1}{ex} \right) dx + \int_1^e \left(\frac{e}{x} - \frac{x}{e} \right) dx = e - \frac{1}{e}.$$

31. 过原点作曲线 $L: y = \sqrt{x-1}$ 的切线, 求该切线与曲线以及 x 轴围成的平面图形绕 x 轴旋转一周的旋转体体积.

解 设在 $x = x_0$ 相切, 切点坐标为 $(x_0, \sqrt{x_0-1})$, 因此切线方程为

$$y = \frac{1}{2\sqrt{x_0-1}}x,$$

解得切线与 L 的切点坐标为 $x_0 = 2, y_0 = 1$, 因此切线方程具体为 $y = \frac{1}{2}x$.

(1) 切线段 $y = \frac{1}{2}x$ ($0 \leq x \leq 2$) 绕 x 轴旋转体积为

$$V_1 = \int_0^2 \pi y^2 dx = \int_0^2 \frac{\pi}{4} x^2 dx = \frac{2\pi}{3},$$

(2) 曲线段 $y = \sqrt{x-1}$ ($1 \leq x \leq 2$) 绕 x 轴旋转体积为

$$V_2 = \int_1^2 \pi y^2 dx = \int_1^2 \pi(x-1) dx = \frac{\pi}{2}.$$

两式相减得围成的平面图形绕 x 轴旋转体积为 $\frac{\pi}{6}$.

微分方程的复习要点

求解即积分, 检验靠微分.

一、一般概念: 微分方程是含有未知函数及其导数的方程, 求出该未知函数就称为微分方程的解. 解有如下形式: 通解、特解、全部解.

(1) 一般而言, n 阶的微分方程的通解包含 n 个任意常数 (称为积分常数).

(2) 通解并不一定是全部解, 有些情况通解之外还有“例外”解. 因此如果题意要求求出全部解, 不但要求出通解, 还要分析有无例外解.

(3) 如果要求解满足已定初始 (或边界) 条件的解, 一般来说就是在通解中, 通过初始 (或边界) 条件, 确定出积分常数.

二、方法: 分离变量法、降阶法 (两种不同形式的降阶法)、常数变易法 (用一阶或二阶齐次线性方程通解形式处理非齐次的特解)、待定系数法、观察法等等.

三、二阶线性方程 ($p(x), q(x), f(x)$ 是已知函数):

$$\begin{cases} (**) & y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad (\text{非齐次情形}) \\ (*) & y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (\text{齐次情形}) \end{cases}$$

1、对解的存在唯一性的理解 (无需证明)

初始 (或称为边界) 条件决定了解的存在唯一.

2、齐次二阶线性方程

(1) 基本解组的存在性以及线性无关的相关性质.

(2) 基本解组的解法: 已知其一可求其二.

(3) “其一”的求法应本着具体问题具体对待, 对常系数二阶线性方程有系统方法 (见下文)

(4) 解的结构: (*) 的通解=基本解组的线性组合 (包含两个积分常数).

3、非齐次二阶线性方程:

(1) 解的结构: (**) 的通解=(**) 的特解+ (*) 的通解.

(2) 求解非齐次通解的步骤:

第一步: 求出 (*) 的基本解组 (见上述第2条).

第二步: 求出 (**) 一个特解. 理论上 (**) 的特解可通过常数变易法得到. 但也可通过特殊方法求出特解.

4、二阶常系数线性方程.

是二阶线性方程的特殊形式 (p, q 是已知常数, $f(x)$ 是已知函数) .

$$\begin{cases} (**) & y'' + py' + qy = f(x) \quad (\text{非齐次情形}) \\ (*) & y'' + p(x)y' + q(x) = 0 \quad (\text{齐次情形}) \end{cases}$$

(1) 对(*) , 可通过求解特征方程 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ 的根直接给出基本解组.

(2) 对(**), 关键是求解一个特解. 除一般理论外, 可针对特殊的 $f(x)$, 采取特殊的方法求出特解.

四、如何求解满足给定初始 (边界) 条件的解:

(1) 基本方法: 求出方程的全部解 (大多数情况求出通解即可), 并寻找满足初始 (边界) 条件的解, 或在通解中确定任意常数.

(2) 可在求解过程中, 充分考虑初始 (边界) 条件, 简化求解过程.

解方程的例题

一、通过自变量或因变量变换, 把方程转化为熟知类型的方程.

1. 求解 $\frac{dy}{dx} = \frac{2y - x - 5}{2x - y + 4}$ 该方程不是书上§6.1.2 所定义的齐次方程, 主要是分子分母都出现了常数项. 要消除这个常数项, 可从线性方程组

$$\begin{cases} 2y - x - 5 = 0 \\ 2x - y + 4 = 0 \end{cases}$$

求出一对非零解 $x_0 = -1, y_0 = 2$, 再作变换

$$u = y - y_0 = y - 2, \quad t = x - x_0 = x + 1,$$

则关于 $y = y(x)$ 的原方程, 就变化换成 $u = u(t)$ 的齐次方程:

$$\frac{du}{dt} = \frac{2(u+2) - (t-1) - 5}{2(t-1) - (u+2) + 4} = \frac{2u-t}{2t-u}.$$

令 $v = \frac{u}{t}$ 或 $u = tv$, 得关于 $v = v(t)$ 的方程

$$v + t \frac{dv}{dt} = \frac{2v-1}{2-v}, \quad \text{或} \quad t \frac{dv}{dt} = \frac{v^2-1}{2-v}.$$

当 $v = \pm 1$, 时, $u = \pm t, \implies y = x + 3$ 和 $y = 1 - x$ 是原方程的解.

当 $v \neq \pm 1$ 时, 利用分离变量法

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{v-1} - \frac{3}{v+1} \right) dv = \frac{dt}{t}$$

$$v - 1 = C(v + 1)^3 t^2, \text{ 或 } u - t = C(u + t)^3.$$

因此原方程的通解 $y = y(x)$ 是隐函数的形式, 满足:

$$y - x - 3 = C(x + y - 1)^3.$$

显然解 $y = x + 3$ 包含在通解中 (对应 $C = 0$), 但 $y = 1 - x$ 是例外解.

2. 求解 $2yy'' = (y')^2 + 1$. 令 $p = \frac{dy}{dx}$, 则

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy},$$

原方程化为 $p = p(y)$ 的方程 (可分离变量)

$$2yp \frac{dp}{dy} = 1 + p^2 \text{ 或 } \frac{dy}{y} = \frac{2p dp}{1 + p^2}.$$

解得 $y = C(1 + p^2)$ ($C \neq 0$). 将 $p = \frac{dy}{dx}$ 代入的关于 $y = y(x)$ 的一阶微分方程

$$y = C \left(1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right) \text{ 或 } \frac{dy}{dx} = \sqrt{C_1 y - 1} \quad (C_1 = \frac{1}{C})$$

积分得

$$\frac{2}{C_1} \sqrt{C_1 y - 1} = x + C_2$$

所以原方程的解

$$y = \frac{C_1^2(x + C_2)^2}{4} + \frac{1}{C_1} \quad (C_1 \neq 0)$$

3. 求解 $y' = \frac{1}{xy \sin(xy^2)} - \frac{y}{2x}$.

解 令 $u = u(x) = xy^2(x)$, 代入方程, 得

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= y^2 + 2xyy' = \frac{2}{\sin^2 u}, \\ \implies \sin^2 u \, du &= 2 \, dx, \implies (1 - \cos 2u) \, du = 4 \, dx \\ \implies u - \frac{1}{2} \sin 2u - 4x &= C, \end{aligned}$$

因此方程的解 $y = y(x)$ 由下列方程给出的隐函数:

$$xy^2 - \frac{1}{2} \sin(xy^2) - 4x = C$$

二、通过求导, 把积分方程化为微分方程. 在证明一些积分不等式 (或等式) 时, 也可以将上 (下) 限看成变量, 进行求导化成微分方程, 我在证明Cauchy 不等式时曾介绍过这种证明方法.

4. 设 $f(x)$ 在 $x > 0$ 内连续可导, 且满足

$$x \int_0^x f(t) dt = (x+1) \int_0^x tf(t) dt,$$

试求: $f(x)$.

解 $f(x)$ 满足的是一个积分方程, 但等式两边对 x 求导后得

$$\int_0^x f(t) dt + xf(x) = \int_0^x tf(t) dt + (x+1)xf(x)$$

$$\text{或} \quad \int_0^x f(t) dt = \int_0^x tf(t) dt + x^2f(x)$$

继续对 x 求导得

$$f(x) = xf(x) + 2xf(x) + x^2f'(x)$$

因此得到关于 $y = f(x)$ 的可分离变量的一阶微分方程

$$f'(x) = \frac{f(x)(1-3x)}{x^2},$$

$$\text{解得 } f(x) = \frac{C}{x^3}e^{-\frac{1}{x}}.$$

5. 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可导, $f(0) = 1$, 且满足

$$f'(x) + f(x) - \frac{1}{1+x} \int_0^x f(t) dx = 0$$

(1) 求 $f'(x)$; (2) 证明当 $x \geq 0$ 时, 有 $e^{-x} \leq f(x) \leq 1$. 连

解 (1) 在方程中令 $x = 0$, 则由 $f(0) = 1$ 推出 $f'(0) = -1$.

虽然条件仅假设 $f(x)$ 可导, 但由方程可以看出 $f'(x)$ 也可导, 也就是 $f(x)$ 二阶可导. 因此对 x 求导得

$$f''(x) + f'(x) - \frac{1}{x+1}f(x) + \frac{1}{(x+1)^2} \int_0^x f(t) dt = 0$$

$$\implies f''(x) + \frac{x+2}{x+1}f'(x) = 0.$$

解得

$$f'(x) = \frac{Ce^{-x}}{x+1}.$$

代入条件 $f'(0) = -1$ 得 $C = -1$, 所以

$$f'(x) = -\frac{e^{-x}}{x+1}.$$

(2) 当 $x \geq 0$ 时, 因 $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 单调下降, 所以

$$f(x) \leq f(0) = 1.$$

又因为 $\varphi(x) = f(x) - e^{-x}$ 满足 $\varphi(0) = 0$,

$$\varphi'(x) = \frac{x}{x+1}e^{-x} \geq 0 \quad (x \geq 0)$$

所以 $\varphi(x)$ 在 $x \geq 0$ 上单调增, $\varphi(x) \geq \varphi(0) = 0$, 即有 $f(x) \geq e^{-x}$.

注意, 在证明 (2) 时, 如果在 $f'(x) = -\frac{e^{-x}}{x+1}$ 继续积分困难很大, 所以可通过导函数 $f'(x)$ 的性态, 给出 $f(x)$ 满足的不等式, 而无需将 $f(x)$ 具体求出来.

三、求解常系数非齐次二阶线性微分方程

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

的关键, 是求解非齐次的特解. 对一些特殊的非齐次项 $f(x)$, 可采取待定系数法, 求出非齐次的特解, 无需套用公式.

6. 求 $y'' - 3y' + 2y = (x+1)e^{3x}$ 的通解.

解 齐次的特征方程 $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ 的根为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$, 因此齐次方程通解为 $y = c_1e^x + c_2e^{2x}$.

注意到非齐次项 $f(x) = (x+1)e^{3x}$, 其中 $\lambda = 3$ 不是特征方程的根. 因此可设非齐次方程的特解有如下形式:

$$y_0 = (Ax + B)e^{3x},$$

其中 A, B 待定! 代入非齐次方程得

$$3A + 2(Ax + B) = x + 1, \implies A = \frac{1}{2}, B = -\frac{1}{4}.$$

因此特解为 $y_0 = \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right)e^{3x}$, 原方程的通解为

$$y = \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right)e^{3x} + c_1e^x + c_2e^{2x}.$$

7. 求 $y'' - 3y' + 2y = (x+1)e^{2x}$ 的通解.

解 本题与上一题的区别是 $f(x) = (x+1)e^{2x}$, 其中指数上的 2 正好是特征方程的一个根, 此时提高次数, 设特解有如下形式:

$$y_0 = x(Ax + B)e^{2x},$$

代入并待定系数: $A = \frac{1}{2}$, $B = 0$, 所以特解为 $y_0 = \frac{x^2}{2}e^{2x}$, 通解为

$$y = \frac{x^2}{2}e^{2x} + c_1e^x + c_2e^{2x}.$$

8. 求 $y'' - 3y' + 2y = 2x^2 + 4x + 1$ 的通解.

本题与上面两题的差别在于非齐次项 $f(x) = 2x^2 + 4x + 1$ 是 x 的二次多项式, 因此不妨设非齐次的特解有如下形式:

$$y_0(x) = ax^2 + bx + c,$$

其中系数 a, b, c 待定, 代入方程并比较 x 的系数得

$$a = 1, b = 5, c = 7,$$

因此得到非齐次的特解为 $y_0(x) = x^2 + 5x + 7$, 通解为

$$y(x) = x^2 + 5x + 7 + c_1e^x + c_2e^{2x}.$$

注意: 综合上述三题, 如果方程有如下形式

$$y'' + \alpha y' + \beta y = P_n(x)e^{\mu x},$$

其中 $P_n(x)$ 是一个 n 次多项式, 特征方程为 $\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta = 0$, 那么

(1) 当 μ 不是特征方程的根时, 可设非齐次特解具有如下形式

$$y_0(x) = Q_n(x)e^{\mu x},$$

(2) 当 μ 是特征方程的单根时, 可设非齐次特解具有如下形式

$$y_0(x) = xQ_n(x)e^{\mu x},$$

(3) 当 μ 是特征方程的重根时, 可设非齐次特解具有如下形式

$$y_0(x) = x^2Q_n(x)e^{\mu x},$$

以上各式中, $Q_n(x)$ 是一个与 $P_n(x)$ 次数相同的 n 次多项式, 代入方程后比较系数定出 $Q_n(x)$ 的各项系数.

(4) 对 μ 是复数时, 也有类似结果 (请看下面两个例题).

9. 求 $y'' - 3y' + 2y = 10\sin x$ 的通解.

解 由齐次方程 $y'' - 3y' + 2y = 0$ 的特征方程 $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, 得到齐次方程的通解 $y = c_1e^x + c_2e^{2x}$.

对非齐次方程, 因 $f(x) = 10 \sin x$, 所以设特解有如下形式

$$y_0(x) = a \sin x + b \cos x$$

其中 a, b 待定. 代入方程并比较 $\sin x, \cos x$ 的系数得

$$a + 3b = 10, \quad b - 3a = 0$$

解得 $a = 1, b = 3$. 所以原方程的特解为 $y_0(x) = \sin x + 3 \cos x$, 通解为

$$y(x) = \sin x + 3 \cos x + c_1 e^x + c_2 e^{2x}.$$

10. 设 $f(x) = \sin x - \int_0^x (x-t)f(t) dt$, 其中 $f(x)$ 是连续函数, 求 $f(x)$.

解 原方程为

$$f(x) = \sin x - x \int_0^x f(t) dt - \int_0^x t f(t) dt,$$

因右边可导, 所以左边 $f(x)$ 也可导, 求导得

$$f'(x) = \cos x - \int_0^x f(t) dt,$$

同理上式右边可导, 所以左边仍然可导, 再求导得

$$f''(x) + f(x) = -\sin x.$$

这是一个关于 $y = f(x)$ 的常系数非齐次二阶线性微分方程. 齐次方程 $y'' + y = 0$ 的基本解组为 $\cos x, \sin x$, 所以齐次通解为 $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$.

注意到非齐次项是 $-\sin x$, 正好与基本解组中一个重合, 因此非齐次的特解不能像上一题一样, 必须增加一个因子 x , 设非齐次的特解有如下形式

$$y_0 = x(a \cos x + b \sin x),$$

其中 a, b 待定. 代入非齐次方程解得

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = 0.$$

因此原方程的通解为

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{x}{2} \cos x.$$

再从条件可以得到边界条件 $f(0) = 0, \implies f'(0) = 1$. 因此在通解中, 利用边界条件确定任意常数: $c_1 = 0, c_2 = \frac{1}{2}$. 最终所求函数为

$$f(x) = \frac{1}{2} \sin x + \frac{x}{2} \cos x.$$

四、根据题意, 将应用题化为微分方程.

11. 设平面曲线 L 上任意一点 $P(x, y)(x > 0)$ 到原点的距离, 恒等于该点处切线在 y 轴上的截距, 且 L 经过点 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, 试求该曲线的函数表示.

解 设曲线的函数表示为 $y = y(x)$, 在 $P(x, y)(x > 0)$ 处切线方程是

$$Y - y = y'(X - x),$$

令 $X = 0$ 得切线在 y 轴上截距为 $Y_0 = y - xy'$. 由题意知 y 满足的微分方程:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = Y_0 = y - xy'$$

令 $u = \frac{y}{x}$, 方程化为

$$\frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = -\frac{dx}{x},$$

解得 $\ln(u + \sqrt{1+u^2}) = -\ln|x| + c_1$ 或 $y + \sqrt{x^2 + y^2} = c$. 由于 L 经过点 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$,

所以 $c = \frac{1}{2}$. 因此 y 满足

$$y + \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{2}, \implies y = \frac{1}{4} - x^2.$$