中国科学技术大学 2019~2020 学年第一学期

数学分析(B1)　期中考试

2019 年 11 月 16 日

一、(本题 36 分, 每小题 6 分) 计算题(给出必要的计算步骤)

1. 设数列 $\{a_n\}$ 为正的有界数列, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$.

2. 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+2}+ax+b\right)=0$, 求 a,b 的值.

3. 设 $f(x)$ 在 x_0 处二阶可导, 且 $f'(x_0)\neq 0$, 求 $\lim\limits_{x\to x_0}\left[\dfrac{1}{f(x)-f(x_0)}-\dfrac{1}{(x-x_0)f'(x_0)}\right]$.

4. 设由参数方程 $\begin{cases} x=\arctan t \\ y=\ln(1+t^2) \end{cases}$ 确定 y 是 x 的函数, 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

5. 设函数 $f(x)=x^2\ln(1-x^2)$, 求当 $n>2$ 时, $f^{(n)}(0)$ 的值.

6. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$.

二、(本题 12 分) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导, 满足 $f(0)=0, f'(0)=1$, 并且 $f(x)$ 有反函数 $g(x)$, 求 $f(x^2)$ 和 $g(x^2)$ 在 $x=0$ 处的关于 x 的二阶导数的值.

三、(本题 18 分, 每小题 6 分) 设 α 为实数, 函数 $f(x)=\begin{cases} x^\alpha\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$. 解答下列问题:

(1)问当且仅当 α 取何值时, $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 但不可导(需说明理由)?

(2)问当且仅当 α 取何值时, $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 但导函数 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处不连续(需说明理由)?

(3)问当且仅当 α 取何值时, $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 且导函数 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续(需说明理由)?

四、(本题 10 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $\{x_n\}$ 是区间 $[a,b]$ 上的点列, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$, 证明: 存在 $x_0\in[a,b]$, 使得 $f(x_0)=A$.

五、(本题 12 分, 每小题 6 分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ $(a>0)$ 上有有界的导函数, 证明:

(1)函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续.

(2)函数 $\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续.

六、(本题 12 分, 每小题 6 分)

1. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一阶可导, $f(0)=1, f'(x)<f(x)$, 证明: 当 $x>0$ 时, $f(x)<\mathrm{e}^x$.

2. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上二阶可导, $f(0)=1, f'(0)\le 1, f''(x)<f(x)$, 证明: 当 $x>0$ 时, $f(x)<\mathrm{e}^x$.

中国科学技术大学 2019~2020 学年第一学期

数学分析(B1)　期中考试　参考答案

2019 年 11 月 16 日

一、(本题 36 分, 每小题 6 分) 计算题(给出必要的计算步骤)

1. 设数列 $\{a_n\}$ 为正的有界数列, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$.

提示　考虑如下几个数列:

(1) $a_n=1$; (2) $a_n=\begin{cases}0^+, n=2k\\ 1,\quad n=2k-1\end{cases}$; (3) $a_n=\dfrac{1}{n}$; (4) $a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$; (5) $a_n=\dfrac{1}{n^2}$.

解　记 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$, 则 $\{S_n\}$ 单调递增.

①若 $\{S_n\}$ 无界, 则 $S_n\to+\infty\ (n\to\infty)$, 又 $\exists M>0, \left|a_n\right|<M$, 故

$$0<\frac{a_n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}<\frac{M}{S_n}$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{M}{S_n}=0$ 及两边夹法则知,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}=0.$$

②若 $\{S_n\}$ 有界, 则 $\{S_n\}$ 收敛, 记为 $S_n\to S\ (n\to\infty)$. 则

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=S-S=0.$$

综上,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}=0. \qquad \square$$

错解　直接用夹逼定理, 写出诸如 $\inf a_n>0$ 的式子, 这显然是错误的($\inf a_n\geq 0$).

2. 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+2}+ax+b\right)=0$, 求 a,b 的值.

解(1)　显然 $a<0$, 否则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+2}+ax+b\right)\geq\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+3x+2}=+\infty$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+2}+ax+b\right)&=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2+3x+2)-(ax+b)^2}{\sqrt{x^2+3x+2}-(ax+b)}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{(1-a^2)x^2+(3-2ab)x+2-b^2}{\sqrt{x^2+3x+2}-(ax+b)}\cdots(*)\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{(1-a^2)+\dfrac{3-2ab}{x}+\dfrac{2-b^2}{x^2}}{\dfrac{\sqrt{x^2+3x+2}}{x^2}-\dfrac{ax+b}{x^2}}\\&=0\end{aligned}$$

因为

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x^2+3x+2}}{x^2}-\frac{ax+b}{x^2}\right)=0\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\left((1-a^2)+\frac{3-2ab}{x}+\frac{2-b^2}{x^2}\right)=1-a^2=0\Rightarrow a=-1.$$

其中已用到$a<0$. 将$a=-1$代入式(*), 得:

$$(*)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(3+2b)+\dfrac{2-b^2}{x}}{\dfrac{\sqrt{x^2+3x+2}}{x}-\dfrac{-x+b}{x}}=\frac{3+2b}{2}=0\Rightarrow 3+2b=0\Rightarrow b=-\frac{3}{2}.$$

经检验, $a=-1,b=-\dfrac{3}{2}$时, 原式成立, 故$a=-1,b=-\dfrac{3}{2}$. □

解(2)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+2}+ax+b\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\left(\sqrt{x^2+3x+2}-x-\frac{3}{2}\right)+\left((a+1)x+b+\frac{3}{2}\right)\right)=0$$

注意到,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+2}-x-\frac{3}{2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\dfrac{1}{4}}{\sqrt{x^2+3x+2}+x+\dfrac{3}{2}}=0$$

从而,

$$\lim_{x\to+\infty}\left((a+1)x+b+\frac{3}{2}\right)=0\Rightarrow\begin{cases}a+1=0\\ b+\dfrac{3}{2}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-1\\ b=-\dfrac{3}{2}\end{cases}$$

故$a=-1,b=-\dfrac{3}{2}$. □

解(3) 由带 Peano 余项的 Taylor 定理,

$$\sqrt{x^2+3x+2}=x\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}=x\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)+o\left(\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)\right)=x+\frac{3}{2}+o(1)\ (x\to+\infty)$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+2}+ax+b\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{3}{2}+ax+b\right)=0\Rightarrow\begin{cases}a=-1\\ b=-\dfrac{3}{2}\end{cases}$$ □

说明 进行分子有理化后, 应当对分母进行讨论, 这是非常重要的.

另, 式(*)分母趋于无穷, 无法直接推出分子趋于0, 例如, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x^2}=0$, 但分子趋于无穷.

3. 设$f(x)$在x_0处二阶可导, 且$f'(x_0)\neq 0$, 求$\lim\limits_{x\to x_0}\left[\dfrac{1}{f(x)-f(x_0)}-\dfrac{1}{(x-x_0)f'(x_0)}\right]$.

解(1) 由带 Peano 余项的 Taylor 定理,

$$f(x)-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+o((x-x_0)^2)\ (x\to x_0)$$

$$\frac{1}{f(x)-f(x_0)}-\frac{1}{(x-x_0)f'(x_0)}=\frac{-\dfrac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+o((x-x_0)^2)}{(f'(x_0))^2(x-x_0)^2+o((x-x_0)^2)}=\frac{-\dfrac{f''(x_0)}{2}+o(1)}{(f'(x_0))^2+o(1)}\ (x\to x_0)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0}\left[\frac{1}{f(x)-f(x_0)}-\frac{1}{(x-x_0)f'(x_0)}\right]=-\frac{f''(x_0)}{2(f'(x_0))^2}.$$ □

解(2) 由 L'Hospital 法则,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0}\left[\frac{1}{f(x)-f(x_0)}-\frac{1}{(x-x_0)f'(x_0)}\right] &= \lim_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)f'(x_0)-(f(x)-f(x_0))}{(f(x)-f(x_0))(x-x_0)f'(x_0)}\\
&= \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x_0)-f'(x)}{f'(x_0)(f(x)-f(x_0))+(x-x_0)f'(x_0))}\cdots(1)\\
&= \lim_{x\to x_0}\frac{-\dfrac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}}{f'(x_0)\left(\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+f'(x_0)\right)}\\
&= -\frac{f''(x_0)}{2(f'(x_0))^2}\cdots(2)
\end{aligned}$$

□

说明 上式(1)用到 L'Hospital 法则, (2)运用的是导数的定义.

错解 (1)运用带 Lagrange 余项的 Taylor 定理; (2)直接运用两次 L'Hospital 法则.

出现上述错误的原因是，$f(x)$ 在 x_0 处二阶可导只能说明 $f(x)$ 在 x_0 附近存在一阶导数，但在 x_0 附近不一定存在二阶导数.

4. 设由参数方程 $\begin{cases}x=\arctan t\\ y=\ln(1+t^2)\end{cases}$ 确定 y 是 x 的函数，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解 由题意得,

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{1+t^2},\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{2t}{1+t^2}$$

故

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{2t}{1+t^2}\cdot(1+t^2)=2t$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=2(1+t^2)$$ □

5. 设函数 $f(x)=x^2\ln(1-x^2)$，求当 $n>2$ 时，$f^{(n)}(0)$ 的值.

提示 运用 Leibniz 公式.

解 由 Leibniz 公式,

$$(fg)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}g^{(n-k)}$$

$$(\ln(1-x^2))^{(n)}=(\ln(1+x)+\ln(1-x))^{(n)}=(-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n}-(n-1)!(1-x)^{-n}$$

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(0) &= x^2(\ln(1-x^2))^{(n)} + \tbinom{n}{1}2x(\ln(1-x^2))^{(n-1)} + \tbinom{n}{2}2(\ln(1-x^2))^{(n-2)}\Big|_{x=0} \\
&= n(n-1)(n-3)!((-1)^{n-3}-1) \\
&= \begin{cases} \dfrac{2n!}{2-n}, n=2k+2 \\ 0, \qquad n=2k+1 \end{cases} (k\in\mathbb{N}^*)
\end{aligned}$$

□

注意 运用 Leibniz 公式时，不要遗漏二项式系数.

6. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$.

解(1) 由带 Peano 余项的 Taylor 定理,

$$\sin x = x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)\,(x\to0)$$

$$\cos x = 1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+o(x^4)\,(x\to0)$$

$$\begin{aligned}
\cos(\sin x) &= 1-\frac{1}{2!}\left(x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)\right)^2+\frac{1}{4!}(x+o(x))^4+o(x^4) \\
&= 1-\frac{1}{2}x^2+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{4!}\right)x^4+o(x^4)\,(x\to0)
\end{aligned}$$

故

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{6}x^4+o(x^4)}{x^4}=\frac{1}{6}.$$

□

解(2) 由题意得:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to0}\frac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4} &= \lim_{x\to0}\frac{-2\sin\frac{\sin x+x}{2}\sin\frac{\sin x-x}{2}}{x^4} \\
&= \lim_{x\to0}\frac{-2\left(\frac{\sin x+x}{2}\right)\left(\frac{\sin x-x}{2}\right)}{x^4} \\
&= \lim_{x\to0}\frac{-(\sin^2 x-x^2)}{2x^4} \\
&= \lim_{x\to0}\frac{-\left(\left(x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)\right)^2-x^2\right)}{2x^4} \\
&= \lim_{x\to0}\frac{x^4}{6x^4}=\frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

□

说明 (1)运用四次 L'Hospital 法则，其中 75%的同学算错了, 25%的同学得到了正确的答案;

(2)运用 Taylor 定理，其中 50%的同学在展开时错了，一部分同学算得 $\dfrac{1}{3!}$ 后算错了.

二、(本题 12 分) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导，满足 $f(0)=0, f'(0)=1$，并且 $f(x)$ 有反函数 $g(x)$，求 $f(x^2)$ 和 $g(x^2)$ 在 $x=0$ 处的关于 x 的二阶导数的值.

解 由题意得,

$$\frac{\mathrm{d}f(x^2)}{\mathrm{d}x}=2xf'(x^2), \frac{\mathrm{d}^2f(x^2)}{\mathrm{d}x^2}=2f'(x^2)+4x^2f''(x^2) \Rightarrow \left.\frac{\mathrm{d}^2f(x^2)}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}=2f'(0)=2$$

由于 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的反函数，$g(0)=0, g'(0)=\dfrac{1}{f'(0)}=1$，故

$$\frac{\mathrm{d}^2g(x^2)}{\mathrm{d}x^2}=2g'(x^2)+4x^2g''(x^2) \Rightarrow \left.\frac{\mathrm{d}^2g(x^2)}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}=2g'(0)=2$$

□

说明 注意反函数的求导法则: $\dfrac{\mathrm{d}f^{-1}(x)}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ 而不是 $\dfrac{1}{f'(x)}$.

三、(本题 18 分, 每小题 6 分) 设 α 为实数，函数 $f(x)=\begin{cases} x^\alpha \sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$. 解答下列问题:

(1)问当且仅当 α 取何值时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，但不可导(需说明理由)?

(2)问当且仅当 α 取何值时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，但导函数 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处不连续(需说明理由)?

(3)问当且仅当 α 取何值时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且导函数 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续(需说明理由)?

解 ①$\alpha\le 0$ 时，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}x^\alpha\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在.

②$\alpha>0$ 时，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}x^\alpha\sin\dfrac{1}{x}=0$，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

③$\alpha\le 1$ 时，$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}x^{\alpha-1}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在，$f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

④$\alpha>1$ 时，$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}x^{\alpha-1}\sin\dfrac{1}{x}=0$，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

$$f'(x)=\begin{cases} x^{\alpha-2}\left(\alpha x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}\right), & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

⑤$\alpha\le 2$ 时，$\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}x^{\alpha-2}\left(\alpha x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}\right)$ 不存在，$f'(x)$ 在 $x=0$ 处不连续.

⑥$\alpha>2$ 时，$\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}x^{\alpha-2}\left(\alpha x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}\right)=0=f'(0)$，$f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

综上,

(1)当且仅当 $\alpha\in(0,1]$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，但不可导;

(2)当且仅当 $\alpha\in(1,2]$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，但导函数 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处不连续;

(3)当且仅当 $\alpha\in(2,+\infty)$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且导函数 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续. □

说明 本题可能存在 α 取非整数时，x^α 存在性的问题. 但我们一般认为，考察连续性是在其定义域内考虑.

四、(本题 10 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$\{x_n\}$ 是区间 $[a,b]$ 上的点列，且 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$，证明：存在 $x_0 \in [a,b]$，使得 $f(x_0) = A$.

提示(1) 运用 Bolzano-Weierstrass 定理.

证明(1) 由题意知，$a \le x_n \le b\ (n = 1,2,\cdots)$，数列 $\{x_n\}$ 有界.

由 Bolzano-Weierstrass 定理得：$\{x_n\}$ 存在收敛子列 $\{x_{n_k}\}$，记为 $x_{n_k} \to x_0\ (k \to \infty)$.

又 $x_{n_k} \in [a,b] \Rightarrow x_0 \in [a,b]$. 由 $f(x)$ 的连续性可知，

$$f(x_0) = f\left(\lim_{k\to\infty} x_{n_k}\right) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = A. \qquad \square$$

提示(2) 运用连续函数的介值定理.

证明(2) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值和最小值分别为 M, m.

则 $m \le f(x_n) \le M \Rightarrow m \le \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A \le M$.

由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续及介值定理知，$\exists x_0 \in [a,b]$，使得 $f(x_0) = A$. $\square$

证明(3) 用反证法.

假设 $\forall x \in [a,b]$，$f(x) \ne A$，由 $f(x)$ 的连续性及介值定理知，$f(x) < A$ 或 $f(x) > A, \forall x \in [a,b]$.

不妨设 $f(x) < A, \forall x \in [a,b]$. 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值 $M < A$，

从而，

$$f(x_n) \le M \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = A \le M$$

矛盾！故假设不成立，即，$\exists x_0 \in [a,b], f(x_0) = A$. $\square$

五、(本题 12 分，每小题 6 分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)\ (a > 0)$ 上有有界的导函数，证明：

(1)函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续.

(2)函数 $\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续.

(1)**证明** 由 $f'(x)$ 有界知，$\exists M_1 > 0$，使得 $|f'(x)| \le M_1$.

对 $\forall \varepsilon > 0$，取 $\delta = \dfrac{\varepsilon}{M_1}$，对 $\forall x_1, x_2 \in [a,+\infty), |x_1 - x_2| < \delta$，不妨 $0 \le x_2 - x_1 < \delta$.

由 Lagrange 中值定理知，$\exists \xi \in (x_1, x_2)$，使得

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |f'(\xi)| \cdot |x_1 - x_2| < M_1 \cdot \frac{\varepsilon}{M_1} = \varepsilon.$$

故 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续. $\square$

(2)**提示(1)** 运用一致连续的定义.

证明(1) 一、先证 $\dfrac{f(x)}{x}\ (x \ge a)$ 有界.

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| = \left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \cdot \frac{x-a}{x} + \frac{f(a)}{x}\right| \le \left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right| + \left|\frac{f(a)}{x}\right| = |f'(\xi)| + \left|\frac{f(a)}{x}\right|$$

其中由 Lagrange 中值定理，$\xi \in (a,x)$ 使得 $f(x) - f(a) = f'(\xi)(x-a)$.

由于$\left|\dfrac{f(a)}{x}\right|$随$x$单调递减，故有界，从而$\exists M_2>0$，使得$\left|\dfrac{f(x)}{x}\right|\le M_2,\forall x\in[a,+\infty)$.

二、再证$\dfrac{f(x)}{x}$在$[a,+\infty)$上一致连续.

对$\forall\varepsilon>0$，取$\varepsilon_1=\dfrac{\varepsilon}{2}\cdot a$，由$f(x)$在$[a,+\infty)$上一致连续知，$\exists\delta_1>0$，使得$\forall x_1,x_2\in[a,+\infty)$，

$\left|x_1-x_2\right|<\delta_1$，均有$\left|f(x_1)-f(x_2)\right|<\varepsilon_1$.

再取$\delta_2=\dfrac{\varepsilon}{2}\cdot\dfrac{a}{M_2},\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，则$\forall x_1,x_2\in[a,+\infty),\left|x_1-x_2\right|<\delta$，

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x_1)}{x_1}-\frac{f(x_2)}{x_2}\right|&=\left|\frac{x_2f(x_1)-x_1f(x_2)}{x_1x_2}\right|=\left|\frac{(x_1+x_2-x_1)f(x_1)-x_1f(x_2)}{x_1x_2}\right|\\&=\left|\frac{x_1(f(x_1)-f(x_2))}{x_1x_2}+\frac{(x_2-x_1)f(x_1)}{x_1x_2}\right|\le\left|\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_2}\right|+\left|\frac{f(x_1)}{x_1}\cdot\frac{x_2-x_1}{x_2}\right|\\&<\frac{\varepsilon_1}{a}+M_2\cdot\frac{\delta_2}{a}=\frac{\frac{\varepsilon}{2}\cdot a}{a}+M_2\cdot\frac{\frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{a}{M_2}}{a}=\varepsilon\end{aligned}$$

故$\dfrac{f(x)}{x}$在$[a,+\infty)$上一致连续. □

提示(2) 运用(1)中导函数有界与一致连续的关系.

证明(2) 一、先证$\dfrac{f(x)}{x}\,(x\ge a)$有界.

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right|=\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot\frac{x-a}{x}+\frac{f(a)}{x}\right|\le\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right|+\left|\frac{f(a)}{x}\right|=\left|f'(\xi)\right|+\left|\frac{f(a)}{x}\right|$$

其中由 Lagrange 中值定理，$\xi\in(a,x)$使得$f(x)-f(a)=f'(\xi)(x-a)$.

由于$\left|\dfrac{f(a)}{x}\right|$随$x$单调递减，故有界，从而$\exists M_2>0$，使得$\left|\dfrac{f(x)}{x}\right|\le M_2,\forall x\in[a,+\infty)$.

二、再证$\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)'(x\ge a)$有界.

$$\left|\left(\frac{f(x)}{x}\right)'\right|=\left|\frac{f'(x)\cdot x-f(x)}{x^2}\right|=\frac{1}{x}\cdot\left|f'(x)-\frac{f(x)}{x}\right|\le\frac{1}{a}\left(\left|f'(x)\right|+\left|\frac{f(x)}{x}\right|\right)$$

由$\left|f'(x)\right|\le M_1,\left|\dfrac{f(x)}{x}\right|\le M_2$知，$\exists M_3>0$，使得$\left|\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)'\right|\le M_3$.

三、最后证$\dfrac{f(x)}{x}$一致连续.

由$\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)'$有界及(1)的结论(将(1)的结论作用于$\dfrac{f(x)}{x}$)知，$\dfrac{f(x)}{x}\,(x\ge a)$一致连续. □

说明 (二)中“$\left|\dfrac{f(x)}{x^2}\right|$有界”可通过$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{x}=0$来证明.

错解 (1)

$$\lim_{x\to x_0}\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|=\left|f'(x_0)\right|\le M\Rightarrow\forall\varepsilon>0,\delta=\frac{\varepsilon}{M+1},\forall\left|x-x_0\right|<\delta,\left|f(x)-f(x_0)\right|<(M+1)\delta=\varepsilon.$$

故 $f(x)$ 一致连续.

分析 此处固定了 x_0，忽略了一致连续中 x_1,x_2 两者均具有任意性.

六、(本题 12 分, 每小题 6 分)

1. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一阶可导，$f(0)=1, f'(x)<f(x)$，证明: 当 $x>0$ 时，$f(x)<\mathrm{e}^x$.

2. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上二阶可导，$f(0)=1, f'(0)\le 1, f''(x)<f(x)$，证明: 当 $x>0$ 时，$f(x)<\mathrm{e}^x$.

证明(1) 1. 设 $g(x)=\mathrm{e}^{-x}f(x)$，则有 $g(0)=1, g'(x)=\mathrm{e}^{-x}(f'(x)-f(x))<0$，故 $x>0$ 时，有

$$g(x)<g(0)=1\Rightarrow \mathrm{e}^{-x}f(x)<1\Rightarrow f(x)<\mathrm{e}^x.$$

2. 设 $h(x)=\mathrm{e}^x(f'(x)-f(x))$，则有 $h(0)=f'(0)-f(0)\le 0, h'(x)=\mathrm{e}^x(f''(x)-f(x))<0$，故 $x>0$ 时，有

$$h(x)<h(0)\le 0\Rightarrow \mathrm{e}^x(f'(x)-f(x))<0$$
$$\Rightarrow g'(x)=\mathrm{e}^{-x}(f'(x)-f(x))<0\Rightarrow g(x)<g(0)=1\Rightarrow f(x)<\mathrm{e}^x.$$ □

证明(2) 1. 设 $g(x)=f(x)-\mathrm{e}^x$，则有 $g(0)=0, g'(x)=f'(x)-\mathrm{e}^x<f(x)-\mathrm{e}^x=g(x)\Rightarrow g'(0)<0$. 故 $\exists\delta>0$，使得 $\forall x\in(0,\delta), g(x)<0$.

用反证法. 假设 $\exists x'>0$，使得 $f(x')\ge \mathrm{e}^{x'}$，取其中最小的记作 $x_0(>0), g(x_0)=0$.

则在 $(0,x_0)$ 上，有 $g'(x)<g(x)<0$，

而 $g(0)=g(x_0)=0$，由 Rolle 定理知，$\exists\xi\in(0,x_0)$，使得 $g'(\xi)=0$，矛盾!

2. $g(0)=0, g'(0)\le 0, g''(0)=f''(0)-1<f(0)-1=0$，故 $\exists\delta>0$，使得 $\forall x\in(0,\delta), g(x)<0$.

用反证法. 假设 $\exists x'>0$，使得 $f(x')\ge \mathrm{e}^{x'}$，取其中最小的记作 $x_0(>0), g(x_0)=0$.

则在 $(0,x_0)$ 上，有 $g''(x)<g(x)<0\Rightarrow g'(x)<g'(0)\le 0$，

而 $g(0)=g(x_0)=0$，由 Rolle 定理知，$\exists\xi\in(0,x_0)$，使得 $g'(\xi)=0$，矛盾! □

证明(3) 只对第 2 问作出解答.

设 $g(x)=\mathrm{e}^{-x}(f'(x)+f(x))$，则有 $g(0)\le 2, g'(x)=\mathrm{e}^{-x}(f''(x)-f(x))<0$，故 $x>0$ 时，有

$$g(x)<g(0)\le 2\Rightarrow f'(x)+f(x)<2\mathrm{e}^x$$

设 $h(x)=\mathrm{e}^xf(x)-\mathrm{e}^{2x}$，则有 $h(0)=0, h'(x)=\mathrm{e}^x(f(x)+f'(x)-2\mathrm{e}^x)<0$，故 $x>0$ 时，有

$$h(x)<h(0)=0\Rightarrow f(x)<\mathrm{e}^x.$$ □

错解 设 $g(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{f(x)}, g(0)=1, g'(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x(f(x)-f'(x))}{f^2(x)}>0\Rightarrow g(x)>g(0)=1\Rightarrow f(x)<\mathrm{e}^x$.

分析 $f(x)$ 出现在分母上, 但其是否会取零值是不确定的.