量子力学 B

2021 秋季学期

作业 7 *(截止期: 11 月 19 号周五课上)*

1. 一维简谐振子的哈密顿量为

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$$

a. 已知在 t=0 时刻谐振子的坐标和动量算符为 $\hat{x}(0)$ 和 $\hat{p}(0)$，试在 Heisenberg 绘景下求坐标算符在任意 t (t>0) 时刻的表达式 $\hat{x}(t)$.

b. 如果在 t=0 时刻谐振子的量子态为

$$|\psi\rangle = e^{\frac{-i\hat{p}l}{\hbar}}|0\rangle$$

其中 l 为实数。试求在任意 t (t>0) 时刻 $\langle\hat{x}(t)\rangle$ 的表达式

c. 说明 b 中的谐振子在 t=0 时处于相干态。 在 Schrödinger 绘景下写出该谐振子在任意时刻 t 时(t>0) 所处的态，并说明其是否仍然是相干态。

2. 已知一维无限深势阱 V(x)=0 (0<x<a), V(x)=∞ (x<0 或 x>a)。

a. 写出归一化的能量本征态波函数与本征能级。

b. 求粒子处于体系基态时出现在(0,a/2)区间内的几率。

3. 设某粒子在 t=0 时处在上题势阱能量最低的本征态上。而在 t>0 时势阱的形式突变为 V(x)=0 (0<x<2a), V(x)= ∞ (x<0 或 x>2a)。

a. 求新的势阱中能量本征波函数与本征能级。

b. 写出粒子在 t>0 时的演化形式

c. 写出在 t 时刻粒子处在新的势阱中能量最低本征态的几率。

d. 写出在 t 时刻粒子处在初态的几率。(写出表达式即可)

(提示: 假设势场在 t=0 时刻的突变不改变波函数在 t=0 时刻的形式)

1. 一维简谐振子的哈密顿量为

$$\hat{H}=\frac{\hat{p}^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$$

a. 已知在 t=0 时刻谐振子的坐标和动量算符为 $\hat{x}(0)$ 和 $\hat{p}(0)$，试在 Heisenberg 绘景下求坐标算符在任意 t (t>0) 时刻的表达式 $\hat{x}(t)$.

b. 如果在 t=0 时刻谐振子的量子态为

$$|\psi\rangle=e^{\frac{-i\hat{p}l}{\hbar}}|0\rangle$$

其中 l 为实数。试求在任意 t (t>0) 时刻 $\langle\hat{x}(t)\rangle$ 的表达式

c. 说明 b 中的谐振子在 t=0 时处于相干态。 在 Schrödinger 绘景下写出该谐振子在任意时刻 t 时(t>0) 所处的态，并说明其是否仍然是相干态。

解 a. $i\hbar\frac{d}{dt}\hat{x}=[\hat{x},\hat{p}^2/2m+\frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2]=\frac{i\hbar}{m}\hat{p}\Rightarrow\frac{d}{dt}\hat{x}=\frac{\hat{p}}{m}$

$i\hbar\frac{d}{dt}\hat{p}=[\hat{p},\hat{p}^2/2m+\frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2]=-i\hbar m\omega^2\hat{x}\Rightarrow\frac{d}{dt}\hat{p}=-m\omega^2\hat{x}$

联立上面两个方程可知

$\hat{x}=\hat{A}\cos\omega t+\hat{B}\sin\omega t$. 再由 $\hat{x}(0)$, $\frac{d}{dt}\hat{x}\big|_{t=0}=\hat{p}(0)/m$

可求得

$$\hat{x}(t)=\hat{x}(0)\cos\omega t+\frac{\hat{p}(0)}{m\omega}\sin\omega t.$$

b. 首先考察 $[\hat{x}(t),e^{\frac{-i\hat{p}(0)l}{\hbar}}]=[\hat{x}(0),\hat{p}(0)]\frac{-il}{\hbar}e^{\frac{-i\hat{p}(0)l}{\hbar}}\cos\omega t$

$=e^{\frac{-i\hat{p}(0)l}{\hbar}}l\cos\omega t$

则 $\langle\hat{x}(t)\rangle=\langle\psi|\hat{x}(t)|\psi\rangle=\langle0|e^{\frac{i\hat{p}(0)l}{\hbar}}\hat{x}(t)e^{\frac{-i\hat{p}(0)l}{\hbar}}|0\rangle$

$=\langle0|e^{\frac{i\hat{p}(0)l}{\hbar}}e^{\frac{-i\hat{p}(0)l}{\hbar}}(\hat{x}(t)+l\cos\omega t)|0\rangle$

$=l\cos(\omega t)+\langle0|\hat{x}(0)\cos\omega t+\frac{\hat{p}(0)}{m\omega}\sin\omega t|0\rangle$

由于 $\hat{x}(0)\propto(\hat{a}(0)+\hat{a}^+(0))$ $\hat{p}(0)\propto(\hat{a}(0)-\hat{a}^+(0))$

因此 $\langle0|\hat{x}(0)\cos\omega t+\frac{\hat{p}(0)}{m\omega}\sin\omega t|0\rangle=0$

即 $\langle\hat{x}(t)\rangle=l\cos\omega t$

c. 在任一时刻t有 $[\hat{x}, e^{-\frac{i\hat{p}l}{\hbar}}]\Big|_t = l e^{-\frac{i\hat{p}l}{\hbar}}\Big|_t$

$$\Rightarrow \quad \hat{a}|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(m\omega\hat{x}+i\hat{p})e^{-\frac{i\hat{p}l}{\hbar}}|0\rangle$$

$$= e^{-\frac{i\hat{p}l}{\hbar}}\frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(m\omega\hat{x}+m\omega l+i\hat{p})|0\rangle = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,l\,|\psi\rangle$$

又注意到 $\langle\psi|\psi\rangle = \langle 0|e^{\frac{i\hat{p}l}{\hbar}}e^{-\frac{i\hat{p}l}{\hbar}}|0\rangle = 1$

则 $|\psi\rangle$ 为归一的相干态且特征值 $\alpha = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,l$

将 $|\psi\rangle$ 展开到 fork 态：

$$|\psi\rangle\Big|_{t=0} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}|n\rangle, \quad \alpha = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,l.$$

$$\text{则 } |\psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2 - i(n+\frac{1}{2})\omega t}|n\rangle$$

$$\hat{a}|\psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2 - i(n+\frac{1}{2})\omega t}\hat{a}|n\rangle$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha\,\alpha^{n-1}}{\sqrt{(n-1)!}}e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2 - i(n-1+\frac{1}{2})\omega t}e^{-i\omega t}|n-1\rangle$$

$$= \alpha e^{-i\omega t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2 - i(n+\frac{1}{2})\omega t}|n\rangle$$

$$= \alpha e^{-i\omega t}|\psi(t)\rangle$$

即 $\hat{a}|\psi(t)\rangle = \alpha e^{-i\omega t}|\psi(t)\rangle$ 且 $\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle = 1$

所以 $|\psi(t)\rangle$ 仍为相干态且特征值为 $\alpha' = \alpha e^{-i\omega t}$

2. 已知一维无限深势阱 V(x)=0 (0<x<a), V(x)=∞ (x<0 或 x>a)。

a. 写出归一化的能量本征态波函数与本征能级。

b. 求粒子处于体系基态时出现在(0,a/2)区间内的几率。

解:

a. 定态 Schrödiger 方程给出:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x) = E\psi(x)$$

则 $\psi(x) = A\cos kx + B\sin kx \qquad k=\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$

由 $\begin{cases}\psi(0)=0\\ \psi(a)=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}A=0\\ ka=n\pi\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\psi(x)=B\sin k_n x\\ E_n=\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}\end{cases}$

由归一化条件:

$$\int_0^a B^2\sin^2 k_n x\,dx = 1 \Rightarrow B=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a}}$$

于是归一化的能量本征态函数为

$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi}{a}x \quad (0<x<a)$，其余为0

$E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2} \qquad (n=1,2\ldots)$

b. $P(0<x<\frac{a}{2}) = \int_0^{\frac{a}{2}}\psi_1^2(x)\,dx$

$= \frac{2}{a}\int_0^{\frac{a}{2}}\sin^2\frac{n\pi}{a}x\,dx = \frac{1}{2}$ 即几率为50%

3. 设某粒子在 t=0 时处在上题势阱能量最低的本征态上。而在 t>0 时势阱的形式突变为 V(x)=0 (0<x<2a), V(x)= ∞ (x<0 或 x>2a)。

a. 求新的势阱中能量本征波函数与本征能级。

b. 写出粒子在 t>0 时的演化形式

c. 写出在 t 时刻粒子处在新的势阱中能量最低本征态的几率。

d. 写出在 t 时刻粒子处在初态的几率。(写出表达式即可)

(提示: 假设势场在 t=0 时刻的突变不改变波函数在 t=0 时刻的形式)

解:

a. 利用第2题结论，将 $a\to 2a$ 得到

$$\psi_n(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{a}}\sin\frac{n\pi x}{2a}, & 0<x<2a\\ 0, & x<0\text{或}x>2a.\end{cases}$$

$$E_n=\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{8ma^2},\quad n=1,2,3\ldots$$

b. 在此条件下，$\psi_n(x)$ 为一组正交完备基，我们可以将 $\psi(x,0)$ 在 $\psi_n(x)$ 上展开.

$$\psi(x,0)=\sum_n C_n\psi_n(x)=\sum_n C_n(0)\frac{1}{\sqrt{a}}\sin\frac{n\pi x}{2a}$$

形式上粒子的演化方程为

$$\psi(x,t)=\sum_n C_n(0)e^{\frac{-iE_nt}{\hbar}}\frac{1}{\sqrt{a}}\sin\frac{n\pi x}{2a}.$$

其中 $C_n(0)=\int_0^a\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a}\sqrt{\frac{1}{a}}\sin\frac{n\pi x}{2a}dx.$

$$E_n=\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{8ma^2},\quad n=1,2\ldots$$

c. 取b中 $n=1$

$$C_1(0)=\frac{\sqrt{2}}{a}\int_0^a\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi x}{2a}dx=\frac{4\sqrt{2}}{3\pi}$$

则处于新势井能级最低态的概率为 $P=\frac{32}{9\pi^2}\approx 36\%$

d. 处在初态的概率为

$$\left|\int_0^{2a}\psi^*(x,0)\psi(x,t)dx\right|^2$$

$$=\left|\sum_{n=1}^{\infty}C_n^2e^{-iE_nt/\hbar}\right|^2$$

量子力学第七次作业答案

by 鸽子

一、

a.

$$i\hbar\frac{dx(t)}{dt}=[x,H]=\mathrm{i}\hbar\frac{p(t)}{m}$$

$$i\hbar\frac{dp(t)}{dt}=[p,H]=-i\hbar m w^2 x$$

联立得

$$\frac{d^2x}{dt^2}+w^2x=0,x(0)=x(0),\frac{dx}{dt}(0)=\frac{p(0)}{m}$$

$$\text{即}x(t)=x(0)\cos wt+\frac{p\left(0\right)}{mw}\sin wt$$

b.

$$<x(t)>=<0|\exp\left(\frac{ipl}{\hbar}\right)x(t)\exp\left(-\frac{ipl}{\hbar}\right)|0>$$

$$<x(t)>=\cos wt\times<0|\exp\left(\frac{ipl}{\hbar}\right)x(0)\exp\left(-\frac{ipl}{\hbar}\right)|0>+\frac{\sin wt}{mw}\times<0|\exp\left(\frac{ipl}{\hbar}\right)p(0)\exp\left(-\frac{ipl}{\hbar}\right)|0>$$

利用第二次作业的结论

$$e^{At}\mathrm{B}e^{-At}=B+[A,B]t,\text{当}[[A,B],A]=[[A,B],B]=0$$

$$<x(t)>=l\cos wt$$

c.

可通过判断$|\psi>$是否是a的本征态来验证相干态：

$$a^{\dagger}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x-\frac{i}{\sqrt{mw\hbar}}p\right)$$

$$a=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x+\frac{i}{\sqrt{mw\hbar}}p\right)$$

$$p=i\sqrt{\frac{mw\hbar}{2}}(a^{\dagger}-a)$$

则

$$a|\psi>=a\exp\left(\sqrt{\frac{mw}{2\hbar}}l(a^{\dagger}-a)\right)|0>=\sqrt{\frac{mw}{2\hbar}}l|\psi>=\lambda|\psi>$$

即

$$|\psi>\text{为本征态，本征值为}\lambda=\sqrt{\frac{mw}{2\hbar}}l$$

fock态展开有：

$$|\psi>=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{\sqrt{n!}}e^{-\frac{1}{2}|\lambda|^2}|n>$$

时间演化算符

$$U(t,0)=e^{-iHt/\hbar}$$

则

$$|\psi(t)>=U(t,0)|\psi>=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{\sqrt{n!}}e^{-\frac{1}{2}|\lambda|^2-i\left(n+\frac{1}{2}\right)wt}|n>$$

$$a|\psi(t)>=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{\sqrt{n!}}e^{-\frac{1}{2}|\lambda|^2-i\left(n+\frac{1}{2}\right)wt}a|n>=\lambda e^{-iwt}|\psi(t)>$$

即

$$|\psi(t)>\text{为本征态，本征值为}\alpha=\sqrt{\frac{mw}{2\hbar}}le^{-iwt}$$

二、

解：a. 由 $V(x)=\begin{cases}0, & 0\le x\le a.\\ \infty, & x<0\text{或}x>a\end{cases}$ 得 $\psi(x)=\begin{cases}0. & x<0\text{或}x>a\\ A\sin kx+B\cos kx, & 0\le x\le a\end{cases}$. $k=\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$

$\psi(0)=\psi(a)=0 \Rightarrow B=0,\ k_n=\frac{n\pi}{a}\ (n=1,2,3\cdots)$.

$\int|\psi_n|^2dx=1 \Rightarrow A_n=\sqrt{\frac{2}{a}}$.

所以 $\psi_n=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin(\frac{n\pi}{a}x)\ (0\le x\le a)$. $E_n=\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$.

b. $\psi_1=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin(\frac{\pi}{a}x)$, $0\le x\le a$.

粒子出现在 $(0, a/2)$ 内的概率：$\int_0^{a/2}\frac{2}{a}\sin^2(\frac{\pi}{a}x)\,dx=\frac{1}{2}$

三、

解：a. 作替换 $a\to 2a$ 得 $\tilde{\psi}_n(x)=\sqrt{\frac{1}{a}}\sin(\frac{n\pi}{2a}x)$, $0\le x\le 2a$, $\tilde{E}_n=\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{8ma^2}$.

b. 由题意，$\psi(t=0)=\begin{cases}\sqrt{\frac{2}{a}}\sin(\frac{\pi x}{a}), & 0\le x\le a\\ 0, & a<x\le 2a\end{cases}$

将 $\psi(0,x)$ 在 $\{\tilde{\psi}_n(x)\}$ 上展开：$\psi(0,x)=\sum_n C_n\tilde{\psi}_n(x)$，则：

$C_n=\int_0^{2a}\psi(0,x)\tilde{\psi}_n(x)dx=\frac{\sqrt{2}}{a}\int_0^a\sin(\frac{\pi x}{a})\sin(\frac{n\pi}{2a}x)\,dx=\begin{cases}\sqrt{2}/2, & n=2\\ \frac{4\sqrt{2}}{\pi}\cdot\frac{1}{4-n^2}\sin(\frac{n\pi}{2}), & n=1\text{或}n=3,4,5\cdots\end{cases}$

$\psi(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n e^{-iE_nt/\hbar}\tilde{\psi}_n(x)$

c. 几率为 $|C_1e^{-i\tilde{E}_1t/\hbar}|^2=C_1^2=\frac{32}{9\pi^2}\approx 0.36$.

d. 几率为 $\int_0^{2a}\psi^*(0,x)\psi(t,x)\,dx=\int_0^{2a}(\sum_n C_n\tilde{\psi}_n(x))(\sum_n C_ne^{-i\tilde{E}_nt/\hbar}\tilde{\psi}_n(x))dx=\sum_{n=1}^{\infty}C_n^2e^{-i\tilde{E}_nt/\hbar}\cdots$.

第七次作业勘误

3. 设某粒子在 t=0 时处在上题势阱能量最低的本征态上。而在 t>0 时势阱的形式突变为 V(x)=0 (0<x<2a), V(x)= ∞ (x<0 或 x>2a)。
a. 求新的势阱中能量本征波函数与本征能级。
b. 写出粒子在 t>0 时的演化形式
c. 写出在 t 时刻粒子处在新的势阱中能量最低本征态的几率。
d. 写出在 t 时刻粒子处在初态的几率。(写出表达式即可)
(提示: 假设势场在 t=0 时刻的突变不改变波函数在 t=0 时刻的形式)

3.d.

几率为：$P=|\int_0^{2a}\psi^*(0,x)\psi(t,x)dx|^2=|\sum_{n=1}^{\infty}c_n^2e^{-i\widetilde{E_n}t/\hbar}|^2$

注：计算系统$|\psi(t)>$处于某个已知态$|\psi(t_0)>$的几率时，$P=|<\psi(t_0)|\psi(t)>|^2$

感谢魏博逸同学发现这个问题。