学号：________

姓名：________

学生所在系：________

答 题 时 不 要 超 过 此 线

中国科学技术大学2011－2012 学年第一学期
《单变量微积分》期中考试试卷

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							
复评人							

得分	评卷人

一、求下列极限（每题6分，共24分）

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x\sin x}$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt[n]{n}-1)$

(3) 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)\tan x}{e^{2x}-1}=3$，求 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$

(4) 设函数$f(x)$在a点处二阶可导，求

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-3f(a)+2f(a-h)}{h^2}.$$

(4') 同上 求 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{c_2f(a+c_1h)+c_1f(a-c_2h)-(c_1+c_2)f(a)}{h^2}$

答：$\dfrac{c_1c_2(c_1+c_2)}{2}f''(a)$

得分	评卷人

二、（本题16分）

设函数

$$f(x)=\begin{cases} x^{\alpha}\sin\dfrac{1}{x^2}, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}$$

其中参数 $\alpha\in\mathbb{R}$。对以下两种不同情形，分别讨论α的范围：

(1) $f(x)$在 $\mathbb{R}$上连续；

(2) $f(x)$在 $\mathbb{R}$上可导，但其导函数$f'(x)$在$x=0$不连续。

答题时不要超过此线

得分	评卷人

三、（每题6分，共12分）

(1) 设$f(x)$具有二阶连续导数，且$f'(1)=0$, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f''(x)}{(x-1)^2}=1$，问$f(1)$是$f(x)$极值吗？如果是，是极小值还是极大值？请证明你的结论。

(2) 设$f(x)$在$(0,+\infty)$上二阶可导，满足$f(0)=0, f''(x)<0$，证明当$b>x>a>0$时，$bf(x)>xf(b)$成立。

得分	评卷人

四、（本题20分）

设函数$y=y(x)$由方程组$\begin{cases} x=e^t+2t+3 \\ e^y\sin t-y+1=0 \end{cases}$所确定，求$\frac{dy}{dx}\Big|_{t=0}$及$\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=0}$.

答题时不要超过此线

得分	评卷人

五、（本题13分）

设$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，$f(0)=f(1)=0, f(\frac{1}{3})=1$，证明：

(1) 存在$\xi \in (\frac{1}{3}, 1)$，使得$f(\xi)=\xi$；

(2) 存在$\eta \in (0, \xi)$，使得$f'(\eta)-f(\eta)+\eta=1.$

答题时不要超过此线

得分	评卷人

六、（本题15分）

设函数$f(x)$在区间$[a,b]$上二阶连续可微，且满足$f(a)<0, f(b)>0$, 对任意的$x\in[a,b]$, $f'(x)>0, f''(x)>0$,

(1) 证明方程$f(x)=0$在区间(a,b)有且仅有一个根ξ；

(2) 取$x_0=b$, 由递推公式

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\qquad n=0,1,2,\ldots$$

得到数列$\{x_n\}$，证明该数列在区间$[a,b]$严格单调减；

(3) 证明数列$\{x_n\}$的极限存在，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\xi$