# 第1章综合习题题解

1. 求下列数列的极限:

（1） $a_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\frac{2n-1}{2n}$ (提示: $\frac{1\cdot3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot\cdots\cdot(2n)}\leqslant\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.);

（2） $a_n=\frac{10}{1}\cdot\frac{11}{3}\cdot\frac{12}{5}\cdot\cdots\cdot\frac{n+9}{2n-1}$;

（3） 设 $a_1>1,\ a_{n+1}=2-\frac{1}{a_n},\ n=1,2,\cdots$;

（4） 设 $a_1=3,\ a_{n+1}=\frac{1}{1+a_n},\ n=1,2,\cdots$.

**解（1）** 利用下列不等式

$$\sqrt{(2n-1)(2n+1)}\leqslant\frac{2n-1+2n+1}{2}=2n$$

得

$$0\leqslant a_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\frac{2n-1}{2n}\leqslant\frac{1}{\sqrt{1}\sqrt{3}}\frac{3}{\sqrt{3}\sqrt{5}}\cdots\frac{2n-1}{\sqrt{2n-1}\sqrt{2n+1}}=\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

$$\Longrightarrow\lim_{n\to\infty}a_n=0.$$

**点评:** 该类题目主要是作出不等式恰当的估计, 再利用两边夹的方式给出极限收敛值. 所谓恰当估计, 就是要使不等式“收放有度”, 使得所求数列被两个具有相同极限的简单数列在 $n$ 充分大时被夹住.

**解（2）** 因为当 $n>10$ 时,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n+11}{2n+1}<1,$$

所以对充分大的 $n$ ($n>10$), $\{a_n\}$ 是单调减有下界($a_n>0$) 数列, 因此收敛. 记

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a\geqslant0,$$

若 $a>0$, 则

$$1=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+11}{2n+1}=\frac{1}{2}$$

矛盾, 所以 $a=0$. 即

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0,$$

**点评:** 本题的做法是首先通过讨论数列的单调有界性, 判断数列收敛, 然后再求极限. 一般来说, 讨论单调性无非是考虑数列前后项的差, 或之比.

另一方面, 考虑数列极限时, 无论是推导两边夹的不等式, 还是讨论数列的单调增（减）, 只要对充分大的 $n$ 成立就行了, 即使对前面有限项不满足两边夹的不等式, 或不满足单调性也无妨.

**解**（3） 利用归纳法: 因 $a_1 > 1,\ a_2 = 2 - \dfrac{1}{a_1} > 1$, 若 $a_n > 1$, 则当 $n+1$ 时, 有

$$a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n} > 1.$$

所以数列有下界. 再用归纳法: 当 $n = 1$ 时:

$$a_2 - a_1 = 2 - \left(\frac{1}{a_1} + a_1\right) \leqslant 2 - 2 = 0,$$

推出 $a_2 \leqslant a_1$. 假设对 $n$ 有 $a_n \leqslant a_{n-1}$, 那么当 $n+1$ 时

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{a_n - a_{n-1}}{a_n a_{n-1}} \leqslant 0.$$

所以$\{a_n\}$是单调减有下界数列, 因此收敛. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \geqslant 1$. 在

$$a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n}$$

两边取极限得

$$a = 2 - \frac{1}{a} \implies a^2 - 2a + 1 = 0$$

解得 $a = \pm 1$. 但 $a = -1$ 不合题意, 所以极限是

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1.$$

**解**（4） 不难看出 $0 < a_n < 1$, 即 $a_n$ 有上界和下界. 利用归纳法可以验证

$$a_2 = \frac{1}{4}, a_3 = \frac{4}{5}, a_4 = \frac{5}{9}, a_5 = \frac{9}{14}, \cdots$$

$$\implies a_4 - a_2 > 0,\ a_5 - a_3 < 0$$

假如对任何 $n$, 有 $a_{2n} \geqslant a_{2n-2};\quad a_{2n+1} \leqslant a_{2n-1}$, 那么对 $n+1$, 有

$$a_{2n+2} - a_{2n} = \frac{1}{1 + a_{2n+1}} - \frac{1}{1 + a_{2n-1}} = \frac{a_{2n-1} - a_{2n+1}}{1 + a_{2n+1}a_{2n-1}} \geqslant 0$$

$$a_{2n+3} - a_{2n+1} = \frac{1}{1 + a_{2n+2}} - \frac{1}{1 + a_{2n}} = \frac{a_{2n} - a_{2n+2}}{1 + a_{2n+2}a_{2n}} \leqslant 0$$

推出数列$\{a_n\}$的子列 $\{a_{2n}\}$ 单调增有上界, $\{a_{2n+1}\}$ 单调减有下界. 因此分别收敛 . 记

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = a,\ \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = b,$$

分别在

$$a_{2n+1} = 2 - \frac{1}{a_{2n}}; \quad a_{2n} = 2 - \frac{1}{a_{2n-1}}$$

两边取极限得

$$b = \frac{1}{1+a}, \ a = \frac{1}{1+b},$$

推出 $a = b$, 因此

$$a = \frac{1}{1+a}$$

解得

$$a_{\pm} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

因为 $a_n$ 为正项数列, 因此$a_-$ 不合题意, 这样极限为

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

**点评:** 第（3）、（4）两题都是通过所给出的递推关系, 寻找单调有界的规律（用归纳法）, 判断数列收敛. 然后通过给定的递推关系式取极限, 得到极限值满足的方程. 但是方程的解往往不唯一, 因此需要根据题意判断出那个解才是数列的极限. 第（4）题直接按上述做法行不通, 因此需要分成奇数列和偶数列分别考虑, 最后判断数列收敛.

2. 设 $\{a_n\}$ 为单调递增的数列, 并且收敛于 $a$, 证明, 对一切 $n$ 有 $a_n \leqslant a$. (对单调递减且有极限的数列, 类似的结论成立.)

**证明** 对任意给定的正整数 $m$, 只要 $n$ 充分大, 就有

$$a_m \leqslant a_n,$$

在上式两边令 $n \to \infty$, 根据极限的保号性, 就有

$$a_m \leqslant a,$$

因为 $m$ 是任意的, 所以$a_m \leqslant a$ 对任意正整数 $m$ 成立.

**点评:** 本题结果是显然的, 因为定理1.13 已经指明单调增（减）有界数列的收敛值是数列的上（下）确界. 这里的证明无非是给出另一种看法而已.

3. 证明下面的数列收敛:

（1）$a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$;

（2）$a_n=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$.

**证明（1）** 显然 $a_{n+1}=a_n+\frac{1}{(n+1)^2}\geqslant a_n$, 因此 $a_n$ 单调增. 又因为

$$\begin{aligned}a_n&=1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\leqslant 1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}\\&=1+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}=2-\frac{1}{n}<2,\end{aligned}$$

所以 $a_n$ 有上界. 因此收敛.

**证明（2）** 因为

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=1+\frac{1}{2^{n+1}}>1,$$

所以$a_n$ 单调增. 为了证明有上界, 利用数列 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 单调增且极限为 e 的结果, 有

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\mathrm{e},\ \ n=1,2,\cdots,$$

$$\Longrightarrow\left(1+\frac{1}{n}\right)<\mathrm{e}^{1/n},\ \ n=1,2,\cdots,$$

特别对 $2^n$, 有

$$\left(1+\frac{1}{2^n}\right)<\mathrm{e}^{1/2^n}$$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow a_n&=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)\\&<\mathrm{e}^{1/2+1/2^2+\cdots+1/2^n}=\mathrm{e}^{1-1/2^n}<\mathrm{e}.\end{aligned}$$

推得 $a_n<2$ 有上界, 所以数列收敛.

**点评**：在证明有界中, 也可直接用不等式

$$\begin{aligned}a_n&=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)\leqslant\left(\frac{n+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}\cdots+\frac{1}{2^n}}{n}\right)^n\\&=\left(1+\frac{1}{2n}-\frac{1}{n2^n}\right)^n\leqslant\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n/2}\leqslant\sqrt{\mathrm{e}}\end{aligned}$$

这里用到了$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 单调增且极限为 e, 因此 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\leqslant\mathrm{e}$.

4. 试构造一个发散的数列 $\{a_n\}$, 满足条件: 对任意正数 $\varepsilon$, 存在自然数 $N$, 使当 $n > N$ 时, 有 $|a_{n+1} - a_n| < \varepsilon$.

**证明** 这样的例子很多, 例如数列

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

满足,

$$|a_{n+1} - a_n| = \frac{1}{n+1} \to 0\ (n \to \infty)$$

所以 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N > \dfrac{1}{\varepsilon} - 1$, 有 $|a_{n+1} - a_n| < \varepsilon$.

如果该数列收敛, 则根据Cauchy收敛准则, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$ 使得当 $n > N$ 时, 有

$$|a_{n+p} - a_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+p} < \varepsilon$$

对任何正整数 $p$ 成立. 特别取 $p = n$, 有

$$\varepsilon > |a_{2n} - a_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

这与 $\varepsilon$ 是任意正数矛盾, 因此数列$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ 发散, 又因为 $a_n$ 单调增, 所以

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \to +\infty.$$

.

**点评:** 本题说明即使数列相邻两项的差 $|a_{n+1} - a_n| \to 0\ (n \to \infty)$, 但不能保证数列收敛. 因此可以体会Cauchy收敛准则中“任意正整数$p$”的重要性.

5. 若数列 $\{a_n\}$ 满足: 存在常数 $M$, 使得对一切 $n$ 有

$$A_n = |a_2 - a_1| + |a_3 - a_2| + \cdots + |a_{n+1} - a_n| \leqslant M.$$

证明: (1) 数列 $\{A_n\}$ 收敛;  (2) 数列 $\{a_n\}$ 也收敛.

**证明** 显然 $A_n \geqslant 0$, 单调增并有上界, 因此 $\{A_n\}$ 收敛, 根据Cauchy 收敛准则, 对任意的对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$ 使得当 $n > N$ 时, 有

$$0 \leqslant A_{n+p} - A_n < \varepsilon.$$

对任何正整数 $p$ 成立. 因此当 $n > N + 1$ 时 ( $n + 1 > N$ ) 有

$$|a_{n+p} - a_n| \leqslant |a_{n+p} - a_{n+p-1}| + \cdots + |a_{n+1} - a_n| = A_{n+p-1} - A_{n-1} < \varepsilon$$

对任何正整数 $p$ 成立, 推出 $\{a_n\}$ 收敛.

**点评**：符合题目条件的数列称为**有界变差数列**. 本题证明过程说明, 有界变差数列一定满足Cauchy收敛准则, 因此一定收敛. 但反之不然, 即收敛数列未必是有界变差的. 例如

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n} \to 0 \ (n \to \infty),$$

收敛. 但是

$$\begin{aligned}
A_n &= |a_2 - a_1| + |a_3 - a_2| + \cdots + |a_{n+1} - a_n| \\
&= \left|\frac{1}{2} + 1\right| + \left|\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right| + \cdots + \left|\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}\right| \\
&= 2\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) - 1 + \frac{1}{n+1} \\
&> 2\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) - 1.
\end{aligned}$$

由例1.2.18知 $A_n \to \infty \ (n \to \infty)$, 因此无界, 所以 $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ 收敛但不是有界变差的.

6. 设 $\{a_n\}$ 是正严格递增数列. 求证: 若 $a_{n+1} - a_n$ 有界, 则对任意 $\alpha \in (0,1)$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty} (a_{n+1}^\alpha - a_n^\alpha) = 0$. 并说明此结论的逆不对, 即, 存在正严格递增数列 $\{a_n\}$ 使得对任意 $\alpha \in (0,1)$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty} (a_{n+1}^\alpha - a_n^\alpha) = 0$, 但是 $a_{n+1} - a_n$ 无界. (提示: 考虑 $a_n = n \ln n$.)

**证明** 因 $\{a_n\}$ 正的严格单调增, 因此当 $n \to \infty$ 时, $\{a_n\}$ 要么收敛于有限数 $a$, 要么发散到 $+\infty$.

(1) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$（有限数）, 那么因 $\{a_n\}$ 正的严格单调增, 所以

$$0 < a_n < a.$$

推得

$$0 < a^\alpha - a_n^\alpha = a^\alpha - (a - a + a_n)^\alpha = a^\alpha \left[1 - \left(1 - \frac{a - a_n}{a}\right)^\alpha\right].$$

因 $0 < \alpha < 1$, 有不等式

$$1 > \left(1 - \frac{a - a_n}{a}\right)^\alpha > 1 - \frac{a - a_n}{a}$$

$$\Longrightarrow 0 < 1 - \left(1 - \frac{a - a_n}{a}\right)^\alpha < \frac{a - a_n}{a}$$

所以

$$0 < a^\alpha - a_n^\alpha = a^\alpha \left[1 - \left(1 - \frac{a - a_n}{a}\right)^\alpha\right] < a^{\alpha-1}(a - a_n) \to 0 \ (n \to \infty).$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^\alpha = a^\alpha$, 因此推出

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_{n+1}^\alpha - a_n^\alpha\right) = 0.$$

(2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, 那么设 $a_{n+1} - a_n \leqslant M$, 由 $a_{n+1} \leqslant M + a_n$ 推出

$$a_{n+1}^\alpha \leqslant (M + a_n)^\alpha$$

$$a_{n+1}^\alpha - a_n^\alpha \leqslant (M + a_n)^\alpha - a_n^\alpha = a_n^\alpha\left[\left(1 + \frac{M}{a_n}\right)^\alpha - 1\right]$$

同理因 $0 < \alpha < 1$, 有不等式

$$1 < \left(1 + \frac{M}{a_n}\right)^\alpha < 1 + \frac{M}{a_n},$$

因此

$$0 < a_{n+1}^\alpha - a_n^\alpha \leqslant a_n^\alpha\left[\left(1 + \frac{M}{a_n}\right)^\alpha - 1\right] \leqslant \frac{M}{a_n^{1-\alpha}} \to 0\ (n \to \infty).$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_{n+1}^\alpha - a_n^\alpha\right) = 0.$$

下面证明该题的逆命题不成立, 只要举一个反例即可. 令 $a_n = n\ln n > 0$. 则

$$a_{n+1} - a_n = (n+1)\ln(n+1) - n\ln n > (n+1)\ln n - n\ln n = \ln n \to +\infty\ (n \to \infty)$$

所以 $a_n$ 严格单调增且 $a_{n+1} - a_n$ 无界.

下面证明对任意 $\alpha \in (0,1)$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_{n+1}^\alpha - a_n^\alpha\right) = 0$, 因为当 $n > 2$ 时:

$$a_{n+1} - a_n = (n+1)\ln(n+1) - n\ln n < (n+1)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln n < 3\ln n$$

所以

$$\begin{aligned} a_{n+1}^\alpha - a_n^\alpha &< (a_n + 3\ln n)^\alpha - a_n^\alpha = a_n^\alpha\left[\left(1 + \frac{3\ln n}{a_n}\right)^\alpha - 1\right] \\ &< \frac{3\ln n}{a_n^{1-\alpha}} = 3\frac{\ln^\alpha n}{n^{1-\alpha}} = 3\left(\frac{\ln n}{n^{(1-\alpha)/\alpha}}\right)^\alpha \end{aligned}$$

根据书上例1.3.23（第47页）结果可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^{(1-\alpha)/\alpha}} = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln n}{n^{(1-\alpha)/\alpha}}\right)^\alpha = 0$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_{n+1}^\alpha - a_n^\alpha\right) = 0.$$

**点评** 本题一种特殊情况是对 $0<\alpha<1$, 有

$$\lim_{n\to\infty}((n+1)^\alpha-n^\alpha=0.$$

因为取$a_n=n$ 显然 $a_n=n$ 满足题目条件$a_{n+1}-a_n=1$ 有界. 由于$0<\alpha<1$, 推出

$$1<\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha<1+\frac{1}{n},$$

所以

$$0<(n+1)^\alpha-n^\alpha=n^\alpha\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha-1\right]<n^\alpha\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right]=\frac{1}{n^{1-\alpha}}$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty}((n+1)^\alpha-n^\alpha=0$$

7. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=a$. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=a$.

**证明** 取 $b_n=n\to+\infty$, 直接利用 $\frac{\infty}{\infty}$ 型Stolz 定理:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{n+1-n}=a.$$

**注意**: 在$\frac{\infty}{\infty}$ 型Stolz 定理中, 并不要求分子数列一定是无穷大量.

8. 证明: 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 且 $a_n>0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=a$.

**证明** 利用下列不等式以及例1.2.19

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\to a\ (n\to\infty)$$

以及

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a_1}\frac{1}{a_2}\cdots\frac{1}{a_n}}}\geqslant\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots\frac{1}{a_n}}\to a\ (n\to\infty)$$

即可完成证明.

**点评**: 结合例1.2.19, 收敛数列的算术平均和几何平均与数列都收敛到同一个值.

9. 证明: 若 $a_n>0$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ 存在, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$ 也存在, 并且

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

**证明** 设 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=a$, 则对任意 $\varepsilon>0$, 一定存在 $N_0>0$, 使得当 $n>N_0$ 时, 有

$$a-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{a_{n+1}}{a_n}<a+\frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\Longrightarrow \left(a-\frac{\varepsilon}{2}\right)^{n-N_0-1}<\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdots\frac{a_{N_0+2}}{a_{N_0+1}}<\left(a+\frac{\varepsilon}{2}\right)^{n-N_0-1}$$

$$\Longrightarrow \left(a-\frac{\varepsilon}{2}\right)^{n-N_0-1}<\frac{a_n}{a_{N_0+1}}<\left(a+\frac{\varepsilon}{2}\right)^{n-N_0-1}$$

$$\Longrightarrow \left(a-\frac{\varepsilon}{2}\right)^{n-N_0-1}\sqrt[n]{a_{N_0+1}}<\sqrt[n]{a_n}<\left(a+\frac{\varepsilon}{2}\right)^{n-N_0-1}\sqrt[n]{a_{N_0+1}}$$

利用 $\sqrt[n]{a}\to 1$ $(n\to\infty)$, 不难得到

$$\lim_{n\to\infty}\left(a-\frac{\varepsilon}{2}\right)^{1-(N_0-1)/n}\sqrt[n]{a_{N_0+1}}=a-\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(a+\frac{\varepsilon}{2}\right)^{1-(N_0-1)/n}\sqrt[n]{a_{N_0+1}}=a+\frac{\varepsilon}{2}$$

因此, 分别存在 $N_1$ 和 $N_2$, 当 $n>N=\max\{N_1,N_2\}$ 时, 有

$$\left(a-\frac{\varepsilon}{2}\right)^{1-(N_0-1)/n}\sqrt[n]{a_{N_0+1}}>a-\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon}{2}=a-\varepsilon,$$

$$\left(a+\frac{\varepsilon}{2}\right)^{1-(N_0-1)/n}\sqrt[n]{a_{N_0+1}}<a+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=a+\varepsilon,$$

$$\Longrightarrow a-\varepsilon<\sqrt[n]{a_n}<a+\varepsilon$$

所以$\{\sqrt[n]{a_n}\}$ 收敛, 且:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

10. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$.

**解** （1）: 利用书上例1.2.19 结果, 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$$

（2）令 $a_n=\dfrac{n^n}{n!}$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$$

利用第9题结果, 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\mathrm{e}.$$

11. 已知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 求证 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2}=\dfrac{a}{2}$.

**证明** 令 $A_n=a_1+2a_2+\cdots+na_n$, $B_n=n^2\to+\infty$, 且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A_n-A_{n-1}}{B_n-B_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{na_n}{2n-1}=\frac{a}{2},$$

利用 Stolz定理注意在$\dfrac{\infty}{\infty}$ 中并不要求分子是无穷大量,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{A_n-A_{n-1}}{B_n-B_{n-1}}=\frac{a}{2}.$$

12. 设 $\{a_n\}$ 且 $a_n\to a\in\mathbb{R}$, 又设 $\{b_n\}$ 是正数列, $c_n=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}$. 求证: (1) $\{c_n\}$ 收敛; (2) 若 $(b_1+b_2+\cdots+b_n)\to+\infty$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=a$.

**证明** 不妨设 $a=0$, 否则用 $\{a_n-a\}$ 代替 $\{a_n\}$ . 令

$$A_n=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n;\ B_n=b_1+b_2+\cdots+b_n,$$

其中 $\{B_n\}$ 严格单调增, 因此 $\{B_n\}$ 要么收敛, 要么发散到 $+\infty$.

若 $\{B_n\}$ 收敛: $B_n\to b\ (n\to\infty)$, 推出 $B_n\leqslant b$, 则只要证明 $\{A_n\}$ 收敛, 就推出 $c_n=\dfrac{A_n}{B_n}$ 也收敛. 因为 $a_n\to a\ (n\to\infty)$, 所以对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $N>0$, 使得当 $n>N$ 时, 有

$$|a_n|<\frac{\varepsilon}{b}.$$

因此对 $n>N$, 有

$$\begin{aligned}|A_{n+p}-A_n|&=|a_{n+1}b_{n+1}+\cdots+a_{n+p}b_{n+p}|\\&\leqslant|a_{n+1}|b_{n+1}+\cdots+|a_{n+p}|b_{n+p}\\&<\frac{\varepsilon}{b}(b_{n+1}\cdots+b_{n+p})<\varepsilon,\end{aligned}$$

根据Cauchy 收敛准则, $\{A_n\}$ 收敛, 推出 $\{c_n\}$ 收敛.

若 $B_n\to+\infty$, 利用 Stolz 定理,

$$\lim_{n\to\infty}c_n=\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{B_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{A_n-A_{n-1}}{B_n-B_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}a_n=0.$$

13. 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^p}\right)^x=\begin{cases}1, & p>1,\\ e, & p=1,\\ +\infty, & p<1.\end{cases}$

**证明** 当 $p>0$ 时, $\lim\limits_{x\to+\infty}x^p=+\infty$, 而 $\left(1+\dfrac{1}{x^p}\right)^{x^p}$ 是$f(y)=\left(1+\dfrac{1}{y}\right)^y$ 与 $y=x^p$ 的复合, 因此

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^p}\right)^{x^p}=\mathrm{e}.$$

所以当 $x$ 充分大时, 有

$$2<\left(1+\frac{1}{x^p}\right)^{x^p}<3\Longrightarrow\ln 2<\ln\left(1+\frac{1}{x^p}\right)^{x^p}<\ln 3.$$

若 $p>1$:

$$0<\ln\left(1+\frac{1}{x^p}\right)^x=\ln\left[\left(1+\frac{1}{x^p}\right)^{x^p}\right]^{x^{1-p}}=x^{1-p}\ln\left(1+\frac{1}{x^p}\right)^{x^p}<x^{1-p}\ln 3\to 0$$

$$\Longrightarrow\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^p}\right)^x=1.$$

若 $0<p<1$:

$$\ln\left(1+\frac{1}{x^p}\right)^x=\ln\left[\left(1+\frac{1}{x^p}\right)^{x^p}\right]^{x^{1-p}}=x^{1-p}\ln\left(1+\frac{1}{x^p}\right)^{x^p}>x^{1-p}\ln 2\to+\infty$$

$$\Longrightarrow\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^p}\right)^x=+\infty.$$

若 $p=1$: 结论显然.

当 $p<0$ 时: 对充分大的 $x$ 有

$$\left(1+\frac{1}{x^p}\right)^x>\left(1+\frac{1}{x^p}\right)\to+\infty.$$

14. 设 $f(x)$ 为周期函数, 且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$, 证明 $f(x)$ 恒为零.

**证明** （反证法）设函数的正周期为 $T$, 若存在 $x_0$ 使得 $f(x_0)\neq 0$, 取 $a_n=x_0+nT\to+\infty\ (n\to\infty)$. 根据定理1.32, 有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(a_n)=0$, 但事实上

$$\lim_{n\to\infty}f(a_n)=\lim_{n\to\infty}f(x_0+nT)=\lim_{n\to\infty}f(x_0)=f(x_0)\neq 0,$$

矛盾. 因此结论成立.

15. 证明 （1）函数 $f(x)$ 在 $x \to x_0-$ 时有极限 $l$ 的充分必要条件是: 对于任意一个以 $x_0$ 为极限的单调递增数列 $\{a_n\}$ $(a_n \neq x_0)$, 都有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = l$; （2）函数 $f(x)$ 在 $x \to x_0+$ 时有极限 $l$ 的充分必要条件是: 对于任意一个以 $x_0$ 为极限的单调递减数列 $\{a_n\}$ $(a_n \neq x_0)$, 都有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = l$.

**证明** 完全类似定理1.32 的证明方法, 只是注意到当 $a_n$ 单调递增（或递减）并以$x_0$ 为极限的数列, 始终保持 $a_n < x_0$ （或 $a_n > x_0$）.

**点评**: 定理1.32虽然只讨论了 $x \to x_0$ 的情形, 但不难推广到 $x \to +\infty$ 的情形, 即:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} f(a_n) = l$$

对任何 $a_n \to +\infty$ $(n \to \infty)$ 的数列成立.

16. 设 $\xi$ 是一个无理数. $a, b$ 是实数, 且 $a < b$. 求证: 存在整数 $m, n$ 使得 $m + n\xi \in (a, b)$, 即, 集合

$$S = \{m + n\xi \,|\, m, n \in \mathbb{Z}\}$$

在 $\mathbb{R}$ 稠密.

**证明** 不妨设 $0 < a < b$. 对任意正整数 $i$, 记 $n_i = -[i\xi]$, 这里 $[x]$ 表示 $x$ 的整数部分, 因此 $x_i = n_i + i\xi \in S$ 且 $x_i = i\xi - [i\xi]$ 表示 $i\xi$ 的小数部分. 因 $\xi$ 是无理数, $i\xi$ 小数部分不可能为 0, 对任意正整数 $i, j$, $i\xi$ 与 $j\xi$ 的小数部分也不相等: $x_j \neq x_i$.

取正整数 $k$ 使得

$$\frac{1}{k} < b - a,$$

则 $x_1, x_2, \cdots, x_{k+1} \in (0, 1)$ 共$k+1$ 个互不相等的数中, 至少有两个, 记为 $x_i, x_j$, 满足

$$0 < x_j - x_i < \frac{1}{k}$$

设 $n$ 是使得 $n(x_j - x_i) > a$ 的最小正整数, 即

$$n(x_j - x_i) > a > (n-1)(x_j - x_i),$$

由此推出

$$a < n(x_j - x_i) = (n-1)(x_j - x_i) + (x_j - x_i) < a + \frac{1}{k} < a + b - a = b,$$

显然

$$n(x_j - x_i) = n(n_j - n_i) + n(j-i)\xi \in S,$$

这样就证明了在任何两个数 $a < b$ 之间, 一定有 $S$ 中的一个数, 所以 $S$ 在 $\mathbb{R}$ 中稠密.

**点评**: 本题说明除了有理数域 $\mathbb{Q}$ 在实数域 $\mathbb{R}$ 中稠密外, $S = \{m + n\xi \,|\, m, n \in \mathbb{Z}\}$ ($\xi$ 为任意无理数) 在$\mathbb{R}$ 中也稠密. 集合 $S$ 包含0 和 1, 并且满足加（减）法运算, 即任意的 $m + n\xi$, $m' + n'\xi \in S$, 有

$$(m + n\xi) \pm (m' + n'\xi) = (m \pm m') + (n \pm n')\xi \in S,$$

但是不满足乘（除）法运算.但是对$\xi = \sqrt{2}$, 集合

$$S(\sqrt{2}) = \{m + n\sqrt{2} \,|\, m, n \in \mathbb{Z}\},$$

满足加（减）法和乘法运算. 但是不满足除法运算. 如果令

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{p + q\sqrt{2} \,|\, p, q \in \mathbb{Q}\},$$

($\mathbb{Q}$ 是有理数域), 则 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 满足加（减）法和乘（除）法运算, 且包含 0 和 1, 因此是一个数域（满足加减法和乘除法运算并包含 0 和 1 的数集称为**数域**）. 这是除了实数域 $\mathbb{R}$ 和有理数域 $\mathbb{Q}$ 外, 认识的一个新的数域.