

# 2020-2021学期理论力学A 期末考试(潘老师班)

Author:PB19000246 PB19000261

2021年3月5日

说明: 试卷前三题为公共题, 后三题为自主命题

## Problem 1

已知n个质点组成的Hamilton体系的Hamilton函数为

$$H = \sum_i \frac{p_i^2}{2m_i} + V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, t)$$

力学量 $\mathbf{G}$ 满足

$$\mathbf{G} = \mathbf{P}t - M\mathbf{r}_c$$

尝试使用Poisson Bracket 找出势能V所需要满足的条件, 使得 $\mathbf{G}$ 为守恒量

## Problem 2

带电粒子在电磁场中的Hamilton函数为

$$H = \frac{(\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2}{2m} + q\phi \quad \mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \quad \phi = \phi(\mathbf{r}, t)$$

而规范变换引入了一组新的势场, 使得原来的电磁场在新的势场下描述不变, 引入 $\psi = \psi(\mathbf{r}, t)$

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\psi \quad \phi' = \phi - \partial_t\psi$$

解决下列问题:

(1)通过Legendre变换求出Lagrange函数 $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$

(2)证明变换

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} \quad \mathbf{p}' = \mathbf{p} + \nabla\psi$$

为正则变换, 并求出生成函数 $F_2(\mathbf{r}, \mathbf{p}', t)$ , 说明该正则变换为什么不存在第一类生成函数 $F_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t)$

(3)求新Hamilton函数 $K(\mathbf{r}', \mathbf{p}')$ , 说明其和原来的Hamilton函数等价

## Problem 3

如图, 质量为m半径为a的圆环绕圆环最上面O点旋转, O点铰链链接固定, C为圆环中心, OC与竖直轴的夹角为 $60^\circ$ . 且圆环面始终垂直于OC和竖直轴形成的平面. 求:

(1)圆环绕O点旋转的角速度 $\Omega$

(2)圆环旋转的角动量

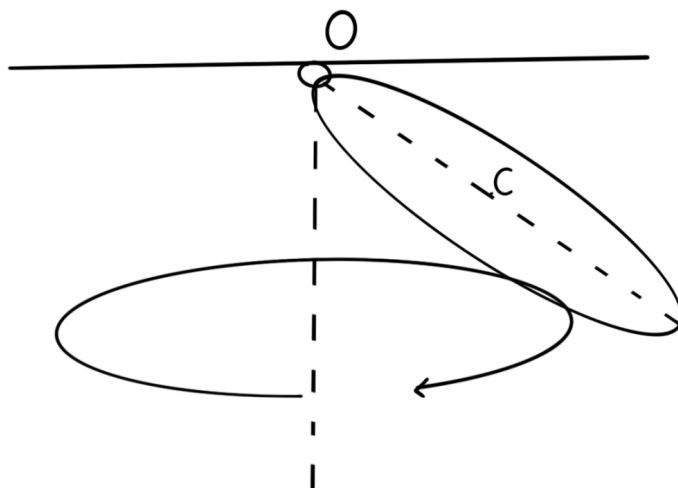


图 1: Problem 3图

(3) O点作用于圆环的力

#### Problem 4

某粒子在有心力作用下运动时的轨道方程为 $r = r_0 \exp(a\theta)$ , 当 $\theta = 0$ 时, 粒子的速度为 $v_0$ 求:

- (1) 粒子收到的力和势能表达式
- (2) 该粒子运动时的能量
- (3) 无穷远处所吸收的粒子的截面 $\sigma$

#### Problem 5

已知Hamilton量描述的体系为

$$H = \frac{1}{2m}(p^2 + m^2\omega^2 q^2) \cos(\Omega t)$$

用Hamilton-Jacobi方法求解 $p(t), q(t)$ , 其中 $p(0) = p_0, q(0) = 0$

#### Problem 6

- (1)(I) 已知势能函数 $U(x) = U_0 \frac{x^2}{a^2} e^{-x/a}$ , 求势能函数的极值点,  
(II) 在速度相空间 $(x, \dot{x})$ 中画出 $E = U_0, E = U_0/3, E = 4e^{-2}U_0$ 的相轨迹, 并且标注箭头

(2) 粒子在竖直向下的重力场中做一维运动

证明初始时刻四个相空间的点 $(0,0), (x,0), (0,p), (x,p)$ 在经演化后面积不变