

2023 春算法基础期中考试卷

BY 陈雪

2023 年 4 月 24 日

先白送 10 分（加一下可以发现下面的题总分只有 90）。

题目 1. 下列正确的有（3 分）：

1. $n2^{\sqrt{\log n}} = n^{1+o(1)}$
2. $n^4 = \Omega(n)$
3. $n^2 = O(n^3 + 2^n)$
4. $n = \Theta(2^n)$

题目 2. 下列正确的有（3 分）：

1. $T(n) = 2T(n/2) + n \log n \implies T(n) = \Theta(n \log^2 n)$
2. $T(n) = T(n-1) + n^3 \implies T(n) = \Theta(n^4)$
3. $T(n) = 9T(n/3) + n^2 \implies T(n) = \Theta(n^3)$
4. $T(n) = \sqrt{n}T(\sqrt{n}) + n \implies T(n) = \Theta(n \log n)$

题目 3. 往大小为 n 的哈希表中插入元素，当插入元素冲突概率达到 10% 时，对插入元素数量的估计准确的是（2 分）：

1. $\Theta(1)$
2. $\Theta(\sqrt{n})$
3. $\Theta(n/\log n)$
4. $\Theta(n)$

题目 4. 红黑树可在 $O(\log n)$ 内支持的操作有（2 分）：

1. 查找最大最小值
2. 删除指定的元素

3. 删除第 k 大的元素

4. 合并两颗红黑树

题目 5. 证明: 对 n 个元素执行快速排序算法递归树的树高的期望为 $O(\log n)$ 级别。(10 分)

题目 6. Hadamard 变换:

有一长度为 2^n 的数列 $x(0 \sim 2^n - 1)$, 对其执行 Hadamard 变换得到 $\hat{x}(0 \sim 2^n - 1)$ 。

$$\hat{x}(v) = \sum_{u \in \{0,1\}^n} (-1)^{\langle v,u \rangle} x(u)$$

其中 $\langle v, u \rangle$ 表示两个向量的内积:

$$\langle v, u \rangle = \sum_{i=1}^n v_i \cdot u_i$$

设计算法快速执行 Hadamard 变换。(15 分)

题目 7. 两个长度为 n 的序列 x_1, x_2, \dots, x_n 与 w_1, w_2, \dots, w_n 。设计算法求如下两个函数的最小值: (25 分)

$$f_1(y) = \sum_{i=1}^n w_i (y - x_i)^2$$

$$f_2(y) = \sum_{i=1}^n w_i |y - x_i|$$

题目 8. 一颗大小为 n 的树 T , 根节点为 root 。一个节点 u 的权值为 $u.w$, 孩子序列为 $u.\text{child}$ 。设计算法求树的最大带权 $-d$ 独立集 (点的一个子集, 其中两两点距离不小于 d , 集合的权值为内部所有点权值之和, 要求权值最大的这样的集合)。(15 分)

题目 9. 一个长度为 n 的序列 a_1, a_2, \dots, a_n , 设计算法求长度为 k 的严格递增子序列的个数。(15 分)