中国科学技术大学物理学院

2018～2019 学年第一学期考试试卷

■A 卷　　□B 卷

课程名称：　　理论力学　　　课程代码：

开课院系：　　物理学院　　　考试形式：闭卷

姓　名：＿＿＿＿＿＿　　学　号：＿＿＿＿＿＿　　专　业：＿＿＿＿＿＿

题号									总分
得分									

（装订线内不要答题）

一、（25 分）质量为 m 的粒子在平方反比吸引力作用下运动，势能为$V=-\alpha/r$。

1. 试以极坐标(r,θ)为广义坐标写出粒子的哈密顿函数；

2. 试证明p_θ以及下面的两个力学量F和G均为运动常数：

$$F=p_r p_\theta\cos\theta-\left(p_\theta^2/r-m\alpha\right)\sin\theta,$$

$$G=p_r p_\theta\sin\theta+\left(p_\theta^2/r-m\alpha\right)\cos\theta$$

3. 设在$\theta=\pi/2$处，$r=r_0$、$p_\theta=\sqrt{m\alpha r_0}$且$p_r=\epsilon\sqrt{m\alpha/r_0}$，试由(2)问中的运动常数求解粒子的轨道方程。这里，r_0,ϵ为正常数。

二、（10 分）请问常数α,β满足什么条件使得变换$Q=\alpha p/q, P=\beta q^2$是关于一个自由度系统的正则变换，并写出相应的生成函数$F_1(q,Q)$。

三、（25 分）一个带e电荷的粒子限制在平面运动，受到中心力$V=kr^2/2$以及垂直于平面的均匀磁场$\vec{B}$的作用，磁场的矢势为$\vec{A}=\vec{B}\times\vec{r}/2$

1. 请在极坐标下建立关于哈密顿特征函数的哈密顿-雅可比方程，通过分离变量写出哈密顿特征函数的积分表达式；

2. 若初始$t=0$时$p_\theta=0$，讨论该系统的运动。

四、（20 分）一维谐振子的哈密顿量为：$\mathrm{H}=\frac{\mathrm{p}^2}{2m}+\frac{1}{2}\mathrm{m}\,\omega^2\mathrm{x}^2$ ，引入如下的复变量：

$a=\sqrt{\frac{m\omega}{2}}(x+i\frac{p}{m\omega})$ ， $a^*=\sqrt{\frac{m\omega}{2}}(x-i\frac{p}{m\omega})$。

1. 用a,a^*来表示哈密顿量：$H=H(a,a^*)$；
2. 计算下列泊松括号$[a,a^*]$，$[a,H]$，$[a^*,H]$的值；
3. 用泊松括号计算得到$a(t),a^*(t)$随时间的演化方程并求解。

五、（20 分）一个圆锥密度均匀为ρ，底部的圆半径为R，高为h。

1. 求相对于圆锥顶点的主转动惯量I_1,I_2,I_3。
2. 以圆锥顶点为固定点，求该重对称陀螺的拉氏量及三个守恒量方程。
3. 重对称陀螺也能均匀进动(章动角θ和进动角速度$\dot{\phi}$保持不变)。 以圆锥顶点为固定点，求该重对称陀螺可以均匀进动的角速度$\dot{\phi}$，并给出均匀进动的存在性条件。

附录：可能用到的公式

欧拉-拉格朗日方程： $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q_\alpha}}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}=0$；**哈密顿正则方程：** $\dot{q}_\alpha=\frac{\partial H}{\partial p_\alpha},\dot{p}_\alpha=-\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}$

泊松括号的定义： $[f(q_\alpha,p_\alpha;t),g(q_\alpha,p_\alpha;t)]\equiv\sum_\alpha(\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\frac{\partial g}{\partial p_\alpha}-\frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{\partial g}{\partial q_\alpha})$

总角度速度$\overline{\omega}$在本体坐标系（随动惯性系）中的分量：

$$\omega_x=\dot{\varphi}\sin\ \theta\sin\psi+\dot{\theta}\cos\psi\text{；}\ \omega_y=\dot{\varphi}\sin\ \theta\cos\psi-\dot{\theta}\sin\psi\text{；}\ \omega_z=\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi}$$

刚体运动的欧拉方程:

$$I_1\dot{\omega}_1-(I_2-I_3)\omega_2\omega_3=N_1,\ I_2\dot{\omega}_2-(I_3-I_1)\omega_3\omega_1=N_2,\ I_3\dot{\omega}_3-(I_1-I_2)\omega_1\omega_2=N_3$$

正则变换（第一类母函数）:

$$dF_1(q,Q,t)=pdq-PdQ+\frac{\partial F_1}{\partial t}dt$$

哈密顿-雅克比方程： $\frac{\partial}{\partial t}S(q_\alpha,t)+H\left(q_\alpha,\frac{\partial S}{\partial q_\alpha},t\right)=0$

$$\mathrm{S}=-\mathrm{E}t+\mathrm{W}(\mathrm{q}_\alpha)+\mathrm{A},\ H\left(q_\alpha,\frac{\partial W}{\partial q_\alpha}\right)=E$$

在笛卡尔坐标系(x,y,z)，柱坐标系(r,ϕ,z)以及球坐标系(r,θ,ϕ)中两点之间的距离分别为：

$$ds^2=dx^2+dy^2+dx^2=dr^2+r^2d\phi^2+dz^2=dr^2+r^2d\theta^2+r^2\sin^2\theta d\phi^2$$

答案

第一题解答:

(a) $H=\dfrac{p_r^2}{2m}+\dfrac{p_\theta^2}{2mr^2}-\dfrac{\alpha}{r}$ 建议 5 分

(b) 由于为循环坐标，因此为运动常数；由于

$$\begin{aligned}[F,H]&=\left[F,\frac{p_r^2}{2m}+\frac{p_\theta^2}{2mr^2}-\frac{\alpha}{r}\right]=\frac{p_r}{m}[F,p_r]+\frac{p_\theta}{mr^2}[F,p_\theta]-\frac{p_\theta^2}{mr^3}[F,r]+\frac{\alpha}{r^2}[F,r]\\&=\frac{p_r}{m}\frac{\partial F}{\partial r}+\frac{p_\theta}{mr^2}\frac{\partial F}{\partial\theta}+\left(\frac{p_\theta^2}{mr^3}-\frac{\alpha}{r^2}\right)\frac{\partial F}{\partial p_r}\end{aligned}$$

因此:建议 5 分

$$[F,H]=\frac{p_r}{m}\left(\frac{p_\theta^2}{r^2}\sin\theta\right)+\frac{p_\theta}{mr^2}\left[-p_rp_\theta\sin\theta-\left(\frac{p_\theta^2}{r}-m\alpha\right)\cos\theta\right]+\left(\frac{p_\theta^2}{mr^3}-\frac{\alpha}{r^2}\right)\left(p_\theta\cos\theta\right)=0$$

同理建议 5 分

$$\begin{aligned}[G,H]&=\frac{p_r}{m}\frac{\partial G}{\partial r}+\frac{p_\theta}{mr^2}\frac{\partial G}{\partial\theta}+\left(\frac{p_\theta^2}{mr^3}-\frac{\alpha}{r^2}\right)\frac{\partial G}{\partial p_r}\\&=\frac{p_r}{m}\left(-\frac{p_\theta^2}{r^2}\cos\theta\right)+\frac{p_\theta}{mr^2}\left[p_rp_\theta\cos\theta-\left(\frac{p_\theta^2}{r}-m\alpha\right)\sin\theta\right]+\left(\frac{p_\theta^2}{mr^3}-\frac{\alpha}{r^2}\right)\left(p_\theta\sin\theta\right)=0\end{aligned}$$

又由于 F 与 G 不显含时间 t，因此它们亦为运动常数。

(c) 由于 $\theta=\pi/2$ 处，$r=r_0$、 $p_\theta=\sqrt{m\alpha r_0}$、 $p_r=\varepsilon\sqrt{m\alpha/r_0}$ ，因此

$$F=p_rp_\theta\cos\theta-\left(\frac{p_\theta^2}{r}-m\alpha\right)\sin\theta=0,\qquad G=p_rp_\theta\sin\theta+\left(\frac{p_\theta^2}{r}-m\alpha\right)\cos\theta=m\alpha\varepsilon$$

将 F 和 G 组合得到 $\quad F\sin\theta-G\cos\theta=\dfrac{p_\theta^2}{r}-m\alpha\quad\Rightarrow\quad\dfrac{m\alpha r_0}{r}-m\alpha=-m\alpha\varepsilon\cos\theta$

因此轨道方程为 $\quad r=\dfrac{r_0}{1-\varepsilon\cos\theta}$

建议 5 分

第二题解答：

正则变换要求

$$pdq - PdQ = pdq - \beta q^2 d\left(\frac{\alpha p}{q}\right) = pdq - \alpha\beta q^2\left(\frac{dp}{q} - \frac{pdq}{q^2}\right)$$
$$= (1+\alpha\beta)pdq - \alpha\beta q dp = dF_1$$

则

$$\frac{\partial[(1+\alpha\beta)p]}{\partial p} = \frac{\partial(-\alpha\beta q)}{\partial q}$$

即 $1+\alpha\beta = -\alpha\beta$， $\alpha\beta = -\frac{1}{2}$ 建议 5 分

或者：

$$\frac{\partial(Q,P)}{\partial(q,p)} = 1 = -2\alpha\beta$$

****

$$dF_1 = d(\tfrac{1}{2}pq), F_1 = \tfrac{1}{2}pq$$

由已知变换得 $p = \frac{qQ}{\alpha}$

得生成函数 $F_1(q,Q) = \frac{1}{2}pq = \frac{q^2Q}{2\alpha}$

建议 5 分

第三题解答：

$$\vec{A} = \frac{Br}{2}\vec{e}_\theta,\ \vec{A}\cdot\dot{\vec{r}} = \frac{Br}{2}\vec{e}_\theta\cdot(\dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta) = \frac{1}{2}qBr^2\,\dot{\theta}$$
$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\theta^2) - \frac{1}{2}kr^2 + \frac{1}{2}qBr^2\,\dot{\theta}$$

建议 5 分

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r},\quad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = mr^2\,\dot{\theta} + \frac{1}{2}qBr^2$$

由勒让德变换得：

$$H = \dot{r}p_r + \dot{\theta}p_\theta - L = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{\left(p_\theta - \frac{1}{2}qBr^2\right)^2}{2mr^2} + \frac{1}{2}kr^2$$

建议 5 分

显然：$p_\theta = L = const.$

因此， 母函数可以令为：

$$S = -Et + L\theta + W_r(r) + A$$

代入哈密顿-雅可比方程：

$$E = \frac{1}{2m}\left(\frac{dW_r}{dr}\right)^2 + \frac{\left(L - \frac{1}{2}qBr^2\right)^2}{2mr^2} + \frac{1}{2}kr^2$$

解得：

$$W_r(r) = \pm\int^r \sqrt{2mE - mkr^2 - (L - qBr^2/2)^2/r^2}\, dr$$

建议 5 分

如果：$p_\theta = L = 0$， 则：

$$\dot{\theta} = -\frac{qB}{2m}$$
$$W_r(r) = \pm\int^r \sqrt{2mE - (mk + q^2B^2/4)r^2}\, dr$$

从上两式可以看出，θ方向的运动形式为匀速转动。r方向的运动为简谐振动。

建议 5 分

第四题解答：

1. 根据定义，我们有：

$$a^*a = \frac{m\omega}{2}(x^2 + \frac{p^2}{m^2\omega^2})$$

因此哈密顿量为：建议 6 分

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = \omega a^* a$$

2. 相应的 Possion 括号为：建议 9 分

$$[a, a^*] = \frac{m\omega}{2}\left[x + i\frac{p}{m\omega}, x - i\frac{p}{m\omega}\right] = -i$$
$$[a, H] = \omega[a, a^*a] = \omega[a, a^*]a = -i\omega a$$
$$[a^*, H] = \omega[a^*, a^*a] = \omega a^*[a^*, a] = i\omega a^*$$

3. $a(t), a^*(t)$随时间的演化方程为：建议 5 分

$$\frac{da}{dt} = [a, H] = -i\omega a, \quad \frac{da^*}{dt} = [a^*, H] = i\omega a^*$$

积分得到：

$$a = a_0 e^{-i\omega t}, \quad a^* = a_0^* e^{i\omega t}$$

进一步得到：不作要求

$$x = \sqrt{\frac{2}{m\omega}}(a + a^*) = \sqrt{\frac{2}{m\omega}}\left(a_0 e^{-i\omega t} + a_0^* e^{i\omega t}\right)$$

$$p = -i\sqrt{2m\omega}\,(a - a^*) = -i\sqrt{2m\omega}\left(a_0 e^{-i\omega t} - a_0^* e^{i\omega t}\right)$$

第五题解答：

1.建议如下的坐标系：z 轴为垂直于底面的对轴轴。则计算得：

$$I_1 = I_2 = \frac{3}{20}M(R^2 + 4h^2), \quad I_3 = \frac{3}{10}MR^2$$

提示：尽量利用平行轴定理。

$$I_1 = \int_0^h \left[\frac{1}{4}dm \cdot r^2 + dm \cdot z^2\right]$$

$$dm = \rho\pi r^2 dz, \quad r = \frac{R}{h}z$$

建议 6 分

2. 刚体的质心为：建议 3 分

$$l = \frac{\int_0^h z^3 dz}{\int_0^h z^2 dz} = \frac{3}{4}h$$

刚体的拉格朗日量为：建议 6 分

$$L = \frac{I_1}{2}\left(\dot\theta^2 + \dot\phi^2 \sin^2\theta\right) + \frac{I_3}{2}\left(\dot\psi + \dot\phi\cos\theta\right)^2 - \frac{3}{4}mgh\cos\theta$$

三个守恒量分别为：

$$E = \frac{I_1}{2}\left(\dot\theta^2 + \dot\phi^2 \sin^2\theta\right) + \frac{I_3}{2}\left(\dot\psi + \dot\phi\cos\theta\right)^2 + \frac{3}{4}mgh\cos\theta$$

$$P_\phi = \frac{\partial L}{\partial\dot\phi} = (I_1\sin^2\theta + I_3\cos^2\theta)\dot\phi + I_3\cos\theta\,\dot\psi = const.$$

$$P_\psi = \frac{\partial L}{\partial\dot\psi} = I_3\left(\dot\psi + \dot\phi\cos\theta\right) = I_3\omega_3 = const.$$

3. 根据上面三个守恒量，得到θ方向的运动方程为：

$$\frac{I_1}{2}\,\dot{\theta}^2 = E' - V_{eff}(\theta)$$

$$E' = E - \frac{P_\psi^2}{2I_3}$$

$$V_{eff}(\theta) = \frac{\left(P_\phi - P_\psi \cos\theta\right)^2}{2I_1 \sin^2\theta} + \frac{3}{4} mgh\cos\theta$$

均匀进动的条件为$V_{eff}(\theta)$取极小值，即:

$$E' = V_{eff}(\theta_0)$$

$$\frac{dV_{eff}(\theta)}{d\theta}|\theta = \theta_0 = 0$$

具体分析如下。

令:

$$\alpha = \frac{2E'}{I_1}, \qquad \beta = \frac{3Mgh}{2I_1}, \qquad a = \frac{P_\psi}{I_1}, \qquad b = \frac{P_\phi}{I_1}, \cos\theta = u$$

$$\dot{u}^2 = (1-u^2)(\alpha - \beta u) - (b - au)^2 \equiv f(u)$$

另有:

$$\dot{\phi} = \frac{(b - au)}{1 - u^2}$$

由$f(u_0) = 0$，得到:

$$\alpha - \beta u_0 = \frac{(b - au_0)^2}{(1 - {u_0}^2)}$$

由$f'(u_0) = 0$，得到:

$$\frac{\beta}{2} = \frac{a(b - au_0)}{(1 - {u_0}^2)} - \frac{u_0(\alpha - \beta u_0)}{(1 - {u_0}^2)}$$

利用:

$$\dot{\phi}_0 = \frac{(b - au_0)}{1 - u_0^2}$$

得到:

$$\frac{\beta}{2} = a\dot{\phi}_0 - u_0\dot{\phi}_0^2$$

这是关于$\dot{\phi}_0$的二次方程，方程有解的条件是:

$$\Delta = a^2 - 2\beta u_0 \geq 0$$

即:

$$\omega_3 \geq \frac{\sqrt{3Mgh\cos\theta_0 I_1}}{I_3}$$

建议 5 分

解法二：

根据欧拉-拉格朗日方程，得到θ方向的运动方程为：

$$I_1\ddot{\theta} = \left(I_1\cos\theta\,\dot{\phi}^2 - I_3\omega_3\dot{\phi} + 3Mgh/4\right)\sin\theta$$

均匀进动时，$\ddot{\theta} = 0, \theta = \theta_0$，因此，

$$I_1\cos\theta\,\dot{\phi}^2 - I_3\omega_3\dot{\phi} + 3Mgh/4 = 0$$

这是关于$\dot{\phi}$的二次方程，方程有解的条件：

$$\Delta = (I_3\omega_3)^2 - 3MghI_1\cos\theta_0 \geq 0$$

即：

$$\omega_3 \geq \frac{\sqrt{3Mgh\,I_1\cos\theta_0}}{I_3}$$