装 …… 订 …… 线

一. (20分) 设从总体

| X | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $P$ | $(1-\theta)/3$ | $1/3$ | $(1+\theta)/3$ |

(其中$-1<\theta<1$为未知参数) 中抽取的一个简单样本$X_1,\ldots,X_n$, 试

(1) 求$\theta$的充分统计量, 其是否为完全统计量?

(2) 求$\theta$的矩估计$\tilde{\theta}$和最大似然估计$\hat{\theta}$, 是否为无偏估计?

二. (20分) 一个移动通讯公司随机抽取了其900个包月客户, 计算得知他们一个月平均使用时间是220分钟, 样本标准差是90分钟. 假设使用时间服从正态分布.

(1) 求包月客户平均使用时间和标准差的 95% 置信区间, 并解释所得区间的含义.

(2) 如果要求客户平均使用时间的 95% 置信区间的长度不超过5分钟, 应至少抽取多少个客户? 该公司的抽样规模是否满足要求?

三. (20分) 下表统计了某铁路局 122 个扳道员五年内由于操作失误引起的严重事故情况, 其中 $r$ 表示一扳道员某五年内引起严重事故的次数, $s$ 表示扳道员人数. 假设扳道员由于操作失误在五年内所引起的严重事故的次数服从Poisson分布. 求

| $r$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | $\geq 6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $s$ | 44 | 42 | 21 | 9 | 4 | 2 | 0 |

(1) 一个扳道员在五年内未引起严重事故的概率 $p$ 的最小方差无偏估计 $\hat{p}_1$和最大似然估计$\hat{p}_2$.

(2) $p$的一个(渐近)95%水平的置信上界.

四. (15分) 设$X_1,\ldots,X_n$为来自正态总体$N(1,\sigma^2)$一组简单样本, $\sigma^2>0$为参数. 试

(1) 求$\sigma^2$的最小方差无偏估计$\hat{\sigma}^2$, 其是否达到Cramer-Rao下界?

(2) 给出一个比最小方差无偏估计$\hat{\sigma}^2$在均方误差准则下更优的估计.

五. (25分) 设$X_1, \ldots, X_n$为来自如下指数总体的简单样本, 总体密度函数为

$$f(x|a) = e^{-(x-a)} I(x \geq a), -\infty < a < 1$$

其中$a$为未知参数. 试

(1) 求$a$的最大似然估计, 并讨论其相合性和极限分布.

(2) 证明$T = X_{(1)}$为$a$的充分统计量但不是完全统计量.

(3) 求$a$的最小方差无偏估计.

**附表: 上分位数**

$u_{0.025} = 1.960, \quad u_{0.05} = 1.645, \quad \chi^2_{899}(0.025) = 984, \quad \chi^2_{899}(0.975) = 817.8.$