# 复习 1

## 1. 邻域

$+\infty$ 的邻域是 $(a, +\infty)$, 这里 $a$ 是任意实数.

$-\infty$ 的邻域是 $(-\infty, a)$, 这里 $a$ 是任意实数.

$x_0$ 的邻域是 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $\delta$ 是任意正数

$x_0$ 的去心邻域是 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$.

$x_0$ 的右边邻域是 $(x_0, x_0 + \delta)$.

$x_0$ 的左边邻域是 $(x_0 - \delta, x_0)$.

## 2. 极限的定义

1) 设 $\{a_n\}$ 是一个数列, $a$ 实数. 若对任意正数 $\varepsilon$, 存在 $+\infty$ 的邻域 $V$, 使得

$$|a_n - a| < \varepsilon, \ \forall\, n \in V \cap \mathbb{N},$$

则称 $\{a_n\}$ 收敛于 $a$, 记为 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

2) 设函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上有定义, $A$ 是一个实数, 若对任意正数 $\varepsilon$, 存在 $+\infty$ 的邻域 $V$, 使得

$$|f(x) - A| < \varepsilon, \ \forall\, x \in V,$$

则称 $f(x)$ 当 $x \to +\infty$ 时收敛于 $A$, 记为 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$.

3) 设函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 的某个去心邻域有定义, $A$ 是一个实数, 若对任意正数 $\varepsilon$, 存在 $x_0$ 的去心邻域 $V$, 使得

$$|f(x) - A| < \varepsilon, \ \forall\, x \in V,$$

则称 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时收敛于 $A$, 记为 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

4) 设函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 的某个右边邻域有定义, $A$ 是一个实数, 若对任意正数 $\varepsilon$, 存在 $x_0$ 的右边邻域 $V$, 使得

$$|f(x) - A| < \varepsilon, \ \forall\, x \in V,$$

则称 $f(x)$ 当 $x \to x_0^+$ 时收敛于 $A$, 记为 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$.

5) 设函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 的某个左边邻域有定义, $A$ 是一个实数, 若对任意正数 $\varepsilon$, 存在 $x_0$ 的左边邻域 $V$, 使得

$$|f(x) - A| < \varepsilon, \ \forall\, x \in V,$$

则称 $f(x)$ 当 $x \to x_0^-$ 时收敛于 $A$, 记为 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = A$.

## 3. 求极限的方法

1) 根据极限的运算性质.

2) 根据两边夹的原理.

3) 根据 Stolz 定理, L'Hospital 法则

**例 1** 设 $a_1, \cdots, a_m, t_1, \cdots, t_m$ 都是正数, 且 $t_1 + \cdots + t_m = 1$. 求

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{t_1 a_1^n + t_2 a_2^n + \cdots + t_m a_m^n}.$$

**解** 不妨设 $a_m = \max\{a_1, \cdots, a_m\}$. 则

$$\sqrt[n]{t_m}\, a_m < \sqrt[n]{t_1 a_1^n + t_2 a_2^n + \cdots + t_m a_m^n} < a_m.$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{t_m} = 1$, 根据两边夹的原理有

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{t_1 a_1^n + t_2 a_2^n + \cdots + t_m a_m^n} = a_m = \max\{a_1, \cdots, a_m\}.$$

**例 2** 设 $a_0 = 1, a_n = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_{n-1}+1}$. 证明 $\{a_n\}$ 收敛, 并求其极限.

**解** 由递推公式, 知 $\{a_n\}$ 是正数列. $a_1 > a_0$. 假设 $a_n > a_{n-1}$, 则

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{a_n}{a_n+1} - \frac{a_{n-1}}{a_{n-1}+1} \\ &= \frac{a_n - a_{n-1}}{(a_n+1)(a_{n-1}+1)} \\ &> 0. \end{aligned}$$

故, $\{a_n\}$ 单调递增. 又显然有 $a_n < 2$. 于是 $\{a_n\}$ 收敛. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. 在递推公式中两边取极限得

$$a = 1 + \frac{a}{a+1}.$$

解此方程得 $a = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. 注意到应有 $a > 1$. 故, $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

**例 3** 设 $a_1 = 3, a_{n+1} = \frac{1}{a_n+1}$. 证明 $\{a_n\}$ 收敛, 并求其极限.

**解** 由递推公式, 知 $\{a_n\}$ 是正数列.

$$a_{n+2} - a_n = \frac{1}{a_{n+1}+1} - \frac{1}{a_{n-1}+1} = -\frac{a_{n+1} - a_{n-1}}{(a_{n+1}+1)(a_{n-1}+1)}.$$

这说明 $a_{n+2} - a_n$ 与 $a_n - a_{n-2}$ 符号相同. 由递推公式, $a_1 = 2, a_2 = \frac{1}{4}, a_3 = \frac{4}{5}$, $a_4 = \frac{5}{9}$. 于是 $\{a_{2n}\}$ 单调递增有上界 1, $\{a_{2n-1}\}$ 单调递减有下界 $\frac{1}{4}$, 它们都收敛, 设极限分别为 $a, b$. 由递推公式, 有

$$a = \frac{1}{b+1}, \ b = \frac{1}{a+1}.$$

故, $a = b = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 即,

$$\lim_{n\to\infty} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

**法二** 设 $a=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, 则 $a=\frac{1}{a+1}$. 于是

$$|a_{n+1}-a|=\left|\frac{1}{a_n+1}-\frac{1}{a+1}\right|=\left|\frac{a_n-a}{(a_n+1)(a+1)}\right|$$
$$<\frac{1}{a+1}|a_n-a|.$$

由此可得

$$|a_{n+1}-a|<\frac{1}{(a+1)^n}|a_1-a|\to 0,\ (n\to\infty).$$

这说明 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$.

**例 4** 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$.

**解** 设 $a_n=\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$. 则

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\ln a_n\\
=&\lim_{n\to\infty}\frac{n\ln n-(\ln n+\ln(n-1)+\cdots+\ln 2)}{n}\\
=&\lim_{n\to\infty}\frac{[(n+1)\ln(n+1)-(\ln(n+1)+\cdots+\ln 2)]-[n\ln n-(\ln n+\cdots+\ln 2)]}{1}\\
=&\,n\ln(1+\frac{1}{n})\\
=&\,1.
\end{aligned}
$$

故, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=e$.

**例 5** 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上连续函数, 且满足 $f(2x) = f(x)$. 求证: $f(x)$ 是常数.

**证明** 根据条件, 有

$$f(x) = f(\frac{x}{2}) = f(\frac{x}{4}) = \cdots = f(\frac{x}{2^n})$$

注意到 $f$ 在 0 连续, 有

$$\lim_{n\to+\infty} f(\frac{x}{2^n}) = f(0).$$

于是

$$f(x) = f(0).$$

即, $f(x)$ 是常数.

**例 6** 设 $f(x)$ 是一个多项式. 证明: 必存在一点 $x_0$ 使得 $|f(x_0)| \leqslant |f(x)|$ 对任意实数 $x$ 成立.

**证明** 设

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,\ a_n \neq 0.$$

则

$$|f(x)| = |a_n x^n| \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot \frac{1}{x} + \cdots + \frac{a_1}{a_n} \cdot \frac{1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n} \cdot \frac{1}{x^n}\right).$$

此式说明 $|f(x)| \to +\infty, (x \to \infty)$. 因此存在 $A > 0$ 使得

$$|f(x)| > |f(0)|,\ x \in (-\infty, -A) \cup (A, +\infty).$$

故连续函数 $|f(x)|$ 在 $[-A, A]$ 中某点 $x_0$ 取最小值, 此点也是 $|f(x)|$ 在实轴上的最小值点.

**例 7** 设 $f(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上并满足 $a \leqslant f(x) \leqslant b$ (对任意 $x \in [a,b]$), 且存在 $k \in (0,1)$ 使得

$$|f(x) - f(y)| \leqslant k|x-y|, \text{ (对任意 } x, y \in [a,b]).$$

求证存在唯一的 $x_0 \in [a,b]$ 使得 $f(x_0) = x_0$.

**证明** 根据条件, 有 $f(a) \geqslant a$, $f(b) \leqslant b$. 设 $g(x) = f(x) - x$. 则 $g(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数, 且 $g(a) = f(a) - a \geqslant 0$, $g(b) = f(b) - b \leqslant 0$. 根据介值定理知, 存在 $x_0 \in [a,b]$ 使得 $g(x_0) = 0$, 即, $f(x_0) = x_0$. 若又有 $x_1 \in [a,b]$ 使得 $f(x_1) = x_1$. 则

$$|x_1 - x_0| = |f(x_1) - f(x_0)| \leqslant k|x_1 - x_0|.$$

注意到 $k \in (0,1)$. 上式蕴含 $x_1 = x_0$. 故, 不动点是唯一性.

**证法二** 记 $f([a,b]) = [a_1, b_1]$,

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] = f([a_n, b_n]), \ n = 1, 2, \cdots .$$

则有 $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$. 因为存在 $s, t \in [a_n, b_n]$ 使得 $a_{n+1} = f(s), b_{n+1} = f(t)$, 所以根据条件, 有

$$b_{n+1} - a_{n+1} = f(t) - f(s) \leqslant k|t - s| \leqslant k(b_n - a_n).$$

故, $b_n - a_n \leqslant k^n(b - a)$ 根据闭区间套定理, 存在唯一的 $x_0 \in [a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \cdots$. 此时, 有

$$f(x_0) \in f([a_n, b_n]) = [a_{n+1}, b_{n+1}] \to x_0.$$

故, $f(x_0) = x_0$.

例子: 设 $f(x) = \ln(e^x + 1)$. 则 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续. 对任意 $x < y$ 存在 $\xi \in (x, y)$ 使得 $f(x) - f(y) = f'(\xi)(x - y) = \frac{e^\xi}{e^\xi + 1}(x - y)$. 故,

$$|f(x) - f(y)| < |x - y|.$$

因为 $f(x) > \ln(e^x) = x$, 所以 $f(x)$ 没有不动点.