

## 0.1 贝塞尔函数

贝塞尔函数是柱坐标系使用分离变量法后自然产生的函数族。

### 0.1.1 贝塞尔方程

我们以泊松方程为例：(齐次情形)设有一个半径为 $a$ 的圆柱体，高为 $H$ ，处于热平衡状态，侧面绝热，上下表面温度已知，内部无热源。求温度分布？

首先我们写出定解问题：

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0, r < R, 0 < z < H, 0 < \theta < 2\pi \\ u_r|_{x^2+y^2} = 0 \\ u(x, y, 0) = g_1(r, \theta), u(x, y, H) = g_2(r, \theta) \end{cases}$$

我们使用柱坐标系并用分离变量法，在柱坐标系下，齐次泊松方程为

$$\Delta_3 u = \frac{\partial u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial u}{\partial z^2} = 0.$$

做分离变量

$$u = ZR\Theta,$$

其中， $Z = Z(z), R = R(r), \Theta = \Theta(\theta)$ 。则有，

$$-\frac{r^2 R'' Z + r R' Z + r^2 R Z''}{RZ} = \frac{\Theta''}{\Theta}.$$

不妨设 $\frac{\Theta''}{\Theta} = -\lambda$ ，则有固有值问题

$$\begin{cases} \Theta'' + \lambda \Theta = 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ \Theta(0) = \Theta(2\pi), \Theta'(0) = \Theta'(2\pi). \end{cases}$$

这是周期边界条件的固有值问题， $k = 1, q = 0, \rho = 1$ ，由SL理论， $\lambda_0 = 0, \Theta_0 = 1$ 。其余固有值 $\lambda_n = n^2, n \geq 1$ ，对应固有函数 $\Theta_n^{(1)} = \cos n\theta, \Theta_n^{(2)} = \sin n\theta, n \geq 1$ 。将固有值代入原方程，得

$$\frac{r^2 R'' Z + r R' Z + r^2 R Z''}{RZ} = n^2.$$

即：

$$-\frac{Z''}{Z} = \frac{-n^2 R + r^2 R'' + r R'}{r^2 R}.$$

我们再用一次分离变量，假设上式为常值 $-\mu$ ，则我们得到固有值问题

$$\begin{cases} r^2 R'' + r R' + (\mu r^2 - n^2) R = 0, r \geq 0 \\ |R(0)| < \infty, R'(a) = 0. \end{cases}$$

写成标准形式，有

$$\begin{cases} [rR']' - \frac{n^2}{r} R + \mu r R = 0, 0 < x < a \\ |R(0)| < \infty, R'(a) = 0. \end{cases}$$

我们根据 $n$ 的不同取值来讨论：

当  $n = 0$  时,  $q = 0$ , 两端分别为自然边界条件和II类边界条件。因而0是固有值, 对应固有函数为  $R_0 = 1$ 。其余固有值均大于零, 我们可以设  $x = \sqrt{\mu}r, y(x) = R(x/\sqrt{\mu})$ , 我们就得到了

$$\begin{cases} x^2 y'' + xy' + x^2 y = 0, x > 0. \\ |y(0)| < \infty. \end{cases}$$

上述方程称为零阶贝塞尔方程。

当  $n \neq 0$  时,  $q \neq 0$ , 我们不需要考虑零固有值。所有固有值都大于0, 即  $\mu > 0$ 。我们可以设  $x = \sqrt{\mu}r, y(x) = R(x/\sqrt{\mu})$ , 我们就得到了

$$\begin{cases} x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0, x > 0. \\ |y(0)| < \infty. \end{cases}$$

上述方程称为  $n$  阶贝塞尔方程。一般  $\nu$  阶 ( $\nu \geq 0$ ) 贝塞尔方程的形式为

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0, x > 0.$$

写成SL的形式为

$$[xy']' - \frac{\nu^2}{x}y + xy = 0, x > 0.$$

我们发现除了在0阶的时候需要考虑零固有值外, 其他形式都是统一的, 因而问题的核心在于解上述常微分方程。

**定理.** 如果  $y_1$  和  $y_2$  是上述常微分方程的两个线性无关解, 其中一个在0点有界, 则另一个必然在零点无界。

实际上, 我们假设  $y_1$  是定理的有界解,  $y_2$  是无界解, 则常微分方程的所有解可以表示为  $C_1 y_1 + C_2 y_2$ 。可以说明, 所有有界解都是  $y_1$  的倍数。结合我们的边界条件,  $y_1$  是我们所关心的。其某个特解称为  $\nu$ -阶贝塞尔函数, 记为  $J_\nu(x)$ 。

现在假设我们已经知道了  $J_n(x)$ , 我们回到了  $n$ -阶贝塞尔固有值问题。  $R(r) = J_n(\sqrt{\mu}r)$ 。边界条件为

$$|R(0)| < \infty, R'(r) = (J_n(\sqrt{\mu}r))'|_{r=a} = \sqrt{\mu}J_n'(x)|_{x=\sqrt{\mu}a} = 0.$$

设  $\omega = \sqrt{\mu}$ , 设  $J_n'(\omega a) = 0$  的所有正解为  $\omega_{n,1} < \omega_{n,2} < \dots$ 。则固有值  $\mu_{n,m} = \omega_{n,m}^2$ , 固有函数  $R_{n,m} = J(\omega_{n,m}r)$ , 当  $n = 0$  时, 按情况讨论零固有值是否存在。将固有值代入  $Z$  的方程, 得到

$$Z'' - \omega_{n,m}^2 Z = 0$$

固有值非零时解得

$$Z = C_{n,m,1} e^{\omega_{n,m}z} + C_{n,m,2} e^{-\omega_{n,m}z}.$$

固有值零时解得

$$Z = C + Dz.$$

所以原定解问题的解为

$$u = C + Dz + \sum_{m=1}^{\infty} (C_{0,m,1}^{(1)} e^{\omega_{0,m}z} + C_{0,m,2}^{(1)} e^{-\omega_{0,m}z}) J_0(\omega_{0,m}r) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (C_{n,m,1}^{(1)} e^{\omega_{n,m}z} + C_{n,m,2}^{(1)} e^{-\omega_{n,m}z}) J_n(\omega_{n,m}r) \Theta_n^{(1)}(\theta) + \dots$$

## 0.2 贝塞尔函数

我们来解 $\nu$ 阶 ( $\nu > 0$ ) 贝塞尔方程

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0, x > 0.$$

这是一个2阶常微分方程, 其解有形式 $C_1 J_\nu + C_2 N_\nu$ , 其中 $J_\nu$ 和 $N_\nu$ 是定义在 $(0, +\infty)$ 上线性无关的特解, 其中,  $J_\nu$ 在0点有界,  $N_\nu$ 在0点无界. 现在我们找这两特解: 不妨设

$$y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+\nu}.$$

代入贝塞尔方程, 得到

$$(1 + 2\nu)a_1 = 0, n(n + 2\nu)a_n + a_{n-2} = 0.$$

我们只要特解, 因而并不关心奇数项. 我们有

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k a_0}{2^{2k} k! (k + \nu) \cdot (k + \nu - 1) \cdots (\nu + 1)}.$$

我们介绍一个函数 $\Gamma$ 函数:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt.$$

该函数在 $x \geq 1$ 都有定义, 并且有

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = -e^{-t}|_0^{\infty} = 1.$$

当 $x \geq 1$ 时,

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^x dt = - \int_0^{\infty} t^x de^{-t} = -t^x e^{-t}|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-t} dt^x = x \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt = x \Gamma(x).$$

用上述递推公式, 我们可以说明 $\Gamma(n+1) = n!$ , 还可以将 $\Gamma$ 函数的定义推广到全体实数去掉非正整数上. 例如

$$\Gamma(-\frac{1}{2}) = \Gamma(\frac{1}{2}) / (-\frac{1}{2}) = -4\Gamma(\frac{3}{2}).$$

实际上

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt = \int_0^{\infty} e^{-s^2} s^{-\frac{1}{2}} ds^2 = 2 \int_0^{\infty} e^{-s^2} s^{-1} ds = \sqrt{\pi}.$$

但是

$$\Gamma(0) = \Gamma(1)/0 = \infty \text{ 以及 } \Gamma(-n) = \infty, n \in \mathbb{N},$$

在此不做展开.

有了 $\Gamma$ 函数, 我们可以将 $a_{2k}$ 记为

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k \Gamma(\nu + 1) a_0}{2^{2k} k! \Gamma(k + \nu + 1)}.$$

取 $a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu + 1)}$ , 我们得到了贝塞尔方程的第一个特解也是我们最关心的特解:

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+\nu}}{2^{2k+\nu} k! \Gamma(k + \nu + 1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k + \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}.$$

$J_\nu$  一般没有显式表达式，但我们有

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}.$$

实际上，当  $k$  为正整数时。

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} + k\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \cdots \times \frac{2k-1}{2} = \frac{\sqrt{\pi}(2k-1)!!}{2^k}.$$

从而

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma\left(k + \frac{1}{2} + 1\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k! \frac{\sqrt{\pi}(2k+1)!!}{2^{k+1}}} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\frac{1}{2}}.$$

整理得

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k! \frac{\sqrt{\pi}(2k+1)!!}{2^{k+1}}} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x.$$


---

为了求另一个特解，我们不妨假设另一个特解为

$$y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n-\nu}.$$

带入贝塞尔方程，得到

$$n(n-2\nu)a_n + a_{n-2} = 0.$$

我们可以将  $a_{2k}$  记为

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k \Gamma(-\nu+1) a_0}{2^{2k} k! \Gamma(k-\nu+1)}.$$

取  $a_0 = \frac{1}{2^{-\nu} \Gamma(-\nu+1)}$ ，我们得到了贝塞尔方程的另一个特解：

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k-\nu}}{2^{2k-\nu} k! \Gamma(k-\nu+1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k-\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu}.$$

当  $\nu$  不是整数时，

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} J_{-\nu}(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} J_\nu(x) = 0$$

因而  $J_\nu$  与  $J_{-\nu}$  线性无关。但是当  $\nu = n$  为非负整数的时候

$$\begin{aligned} J_{-n}(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k-n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n} = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k-n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n} \\ &= \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k-n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+n}}{(k+n)! k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} \\ &= (-1)^n \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+n+1) k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} = (-1)^n J_n(x). \end{aligned}$$

$J_n$  与  $J_{-n}$  线性相关。为了解决这个问题。当  $\nu$  不是整数时，我们令

$$N_\nu(x) = \frac{J_\nu(x) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}.$$

$\nu$ -阶贝塞尔方程的所有解可以表示为  $C_1 J_\nu + C_2 N_\nu$ 。对于非负整数

$$N_n(x) = \lim_{\nu \rightarrow n} N_\nu(x) = \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{J_\nu(x) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}.$$

这个极限是  $\frac{0}{0}$  的形式，可以用洛必达法则，得

$$N_n(x) = \frac{\cos(\nu\pi) \frac{\partial J_\nu}{\partial \nu}(x) - \pi J_\nu(x) \sin(\nu\pi) - \frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu}(x)}{\pi \cos(\pi\nu)} \Big|_{\nu=n} = \frac{\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu}(x) - (-1)^n \frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu}(x)}{\pi} \Big|_{\nu=n}.$$

$J_\nu$  称为第一类  $\nu$ -阶贝塞尔函数； $N_\nu$  称为第二类  $\nu$ -阶贝塞尔函数或者诺伊曼函数。在这本书中我们重点关注  $J_n$  特别是  $J_0$ 。

---

## 0.3 贝塞尔函数的性质

### 0.3.1 母函数

$\exp(\frac{x}{2}(\xi - \frac{1}{\xi}))$  称为贝塞尔函数的母函数。我们有

$$\exp(\frac{x}{2}(\xi - \frac{1}{\xi})) = \exp(\frac{x}{2}\xi) \exp(-\frac{x}{2}\frac{1}{\xi}) = \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\frac{x\xi}{2})^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (\frac{x}{2\xi})^n \right)$$

依  $\xi$  的次数展开得：

$$\begin{aligned} \exp(\frac{x}{2}(\xi + \frac{1}{\xi})) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(n+k)!} (\frac{x\xi}{2})^{n+k} \frac{(-1)^k}{k!} (\frac{x}{2\xi})^k + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\frac{x\xi}{2})^k \frac{(-1)^{n+k}}{(n+k)!} (\frac{x}{2\xi})^{n+k} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} (\frac{x}{2})^{2k+n} \right) \xi^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left( (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} (\frac{x}{2})^{2k+n} \right) \xi^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} J_n(x) \xi^n + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_n(x) \xi^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} J_n(x) \xi^n + \sum_{n=1}^{\infty} J_{-n}(x) \xi^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) \xi^n. \end{aligned}$$

注意到如果将母函数看成一个  $\xi$  的复函数，则母函数在  $\xi \neq 0$  解析，并且  $\xi = 0$  是母函数的孤立奇点，可以洛朗展开：

$$\exp(\frac{x}{2}(\xi + \frac{1}{\xi})) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n \xi^n$$

用洛朗展开的公式

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} d\xi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

其中 $C$  是围绕孤立奇点 $a$  的闭路（见书本86页）。在这里取 $f(\xi) = \exp(\frac{x}{2}(\xi - \frac{1}{\xi}))$ ，取 $C$  为单位圆，即 $\xi = e^{\theta i}, 0 \leq \theta < 2\pi$ ，取 $a = 0$ 。则有

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{\exp(\frac{x}{2}(e^{\theta i} - \frac{1}{e^{\theta i}}))}{(e^{\theta i} - 0)^{n+1}} de^{\theta i} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\exp(x \sin \theta i)}{e^{n\theta i}} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp((x \sin \theta - n\theta)i) d\theta.$$

注意到 $\exp((x \sin \theta - n\theta)i) = \cos(x \sin \theta - n\theta) + i \sin(x \sin \theta - n\theta)$  以及 $\sin(x \sin \theta - n\theta)$  为 $\theta$  的奇函数和周期 $2\pi$  的函数，我们有

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(x \sin \theta - n\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(x \sin \theta - n\theta) d\theta = 0.$$

所以

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(x \sin \theta - n\theta) d\theta = J_n(x).$$

称之为整阶贝塞尔函数的积分表示。

利用母函数可以证明很多贝塞尔函数的性质。

$$J_0(0) = 1, J_n(0) = 0, n \neq 0.$$

又例如

$$J_n(x+y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_{n+k}(x) J_{-k}(y).$$

实际上一方面

$$\exp(\frac{x+y}{2}(\xi - \frac{1}{\xi})) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x+y) \xi^n.$$

另一方面

$$\exp(\frac{x+y}{2}(\xi - \frac{1}{\xi})) = \exp(\frac{x}{2}(\xi - \frac{1}{\xi})) \exp(\frac{y}{2}(\xi - \frac{1}{\xi})) = (\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) \xi^n) (\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(y) \xi^n).$$

依 $\xi$  的阶数展开得

$$\exp(\frac{x+y}{2}(\xi - \frac{1}{\xi})) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_{n+k}(x) \xi^{n+k} J_{-k}(y) \xi^{-k} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_{n+k}(x) J_{-k}(y) \xi^n.$$

对照得：

$$J_n(x+y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_{n+k}(x) J_{-k}(y).$$

### 0.3.2 微分关系与递推公式

贝塞尔函数 $J_\nu$ 满足以下性质：

$$(1) (x^\nu J_\nu)' = x^\nu J_{\nu-1} = x^\nu J_\nu' + \nu x^{\nu-1} J_\nu;$$

$$(2) (\frac{J_\nu}{x^\nu})' = -\frac{J_{\nu+1}}{x^\nu} = \frac{J_\nu'}{x^\nu} - \frac{\nu J_\nu}{x^{\nu+1}}.$$

整理得

$$(1) J_{\nu-1} = J'_\nu + \nu x^{-1} J_\nu;$$

$$(2) J_{\nu+1} = -J'_\nu + \nu x^{-1} J_\nu.$$

我们证明之:

证明. (1). 首先

$$x^\nu J_\nu(x) = x^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k + \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k+\nu} k! \Gamma(k + \nu + 1)} x^{2k+2\nu}.$$

对  $x$  求导得

$$(x^\nu J_\nu(x))' = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k + 2\nu)}{2^{2k+\nu} k! \Gamma(k + \nu + 1)} x^{2k+2\nu-1} = x^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k+\nu-1} k! \Gamma(k + \nu)} x^{2k+\nu-1} = x^\nu J_{\nu-1}(x).$$

(2). 同理

$$\frac{J_\nu(x)}{x^\nu} = x^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k + \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k+\nu} k! \Gamma(k + \nu + 1)} x^{2k}.$$

需要注意得是  $k=0$  项为常数项, 求导后为0, 为了避免误导造成错误, 我们单独提出来考虑, 当然如果  $k!$  写成  $\Gamma(k+1)$  那么就没必要啰嗦了. 求导得

$$\begin{aligned} \left(\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right)' &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 2k}{2^{2k+\nu} k! \Gamma(k + \nu + 1)} x^{2k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k+\nu-1} (k-1)! \Gamma(k + \nu + 1)} x^{2k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2^{2k+\nu+1} k! \Gamma(k + \nu + 2)} x^{2k+1} = -x^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k+\nu+1} k! \Gamma(k + \nu + 2)} x^{2k+\nu+1} \\ &= -x^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k + (\nu + 1) + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+(\nu+1)} = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x). \end{aligned}$$

由微分关系, 我们可以得到递推公式

$$(1) J'_\nu = \frac{1}{2}(J_{\nu-1} - J_{\nu+1});$$

$$(2) \frac{2\nu}{x} J_\nu = J_{\nu-1} + J_{\nu+1}.$$

以及

$$J'_0(x) = J_{-1}(x) = -J_1(x).$$

因而, 整阶贝塞尔函数包括其导数总能用  $J_0, J_1$  表出. 这也是作业和考试答案的要求, 尽量用  $J_0, J_1$  表示. 例如

$$J'_1 = \frac{1}{2}(J_0 - J_2) = \frac{1}{2}J_0 - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{x}J_1 - J_0\right) = J_0 - \frac{1}{x}J_1.$$

当然我们也可以利用微分关系求  $J'_1$

$$(xJ_1)' = xJ_0 = J_1 + xJ'_1.$$

得到

$$J_1' = J_0 - \frac{1}{x} J_1.$$

两者是一致的。又例如

$$J_3 = \frac{4}{x} J_2 - J_1 = \frac{4}{x} \left( \frac{2}{x} J_1 - J_0 \right) - J_1 = \left( \frac{8}{x^2} - 1 \right) J_1 - \frac{4}{x} J_0$$

**例子1.** 计算积分  $\int_0^\infty e^{-ax} J_0(bx) dx$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a, b > 0$ . 并计算  $L[J_0(t)]$ ,  $L[J_1(t)]$ .

**解.** 用贝塞尔函数的积分表达式。

$$\begin{aligned} 2\pi \int_0^\infty e^{-ax} J_0(bx) dx &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-ax} \cos(bx \sin \theta) d\theta dx \\ &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-ax} e^{ibx \sin \theta} d\theta dx \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\infty e^{x(-a+ib \sin \theta)} dx d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{-a+ib \sin \theta} e^{x(-a+ib \sin \theta)} \Big|_0^\infty d\theta \\ &= 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{-1}{-a+ib \sin \theta} d\theta \\ &= 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{a+ib \sin \theta}{a^2+b^2 \sin^2 \theta} d\theta \\ &= 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{a}{a^2+b^2 \sin^2 \theta} d\theta. \end{aligned}$$

设  $t = \tan \theta$ , 则  $dt = d(\tan \theta) = \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}$ , 带入得

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{a}{a^2+b^2 \sin^2 \theta} d\theta = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a \cos^2 \theta}{a^2+b^2 \sin^2 \theta} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{a^2+(a^2+b^2)t^2} dt.$$

设  $s = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} t$ , 带入上式, 得到

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{a}{a^2+b^2 \sin^2 \theta} d\theta = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+s^2} ds = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \arctan s \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

从而

$$\int_0^\infty e^{-ax} J_0(bx) dx = \frac{1}{\pi} \times \frac{\pi}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

如果用留数定理, 可以说明

$$L[J_0(t)] = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}, \operatorname{Re}(p) > 0.$$

实际上当  $\operatorname{Re} p > 0$  时

$$L[J_0(t)](p) = \int_0^\infty e^{-pt} J_0(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-pt} \cos(t \sin \theta) d\theta dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p}{p^2+(p^2+1)t^2} dt.$$



$\frac{p}{p^2+(p^2+1)t^2}$  作为复函数有两个一阶极点  $t_1, t_2 = \pm \frac{pi}{\sqrt{p^2+1}}$ , 一个在上半平面 ( $t_1$ ), 一个在下半平面 ( $t_2$ ).

$$\text{Res}\left(\frac{1}{p^2+(p^2+1)t^2}, t_1\right) = \lim_{t \rightarrow t_1} \frac{p}{p^2+(p^2+1)t^2} \times (t-t_1) = \frac{p}{(p^2+1)(t-t_2)} \Big|_{t=t_1} = \frac{p}{(p^2+1)(t_1-t_2)}.$$

$$L[J_0(t)](p) = \frac{1}{\pi} \times 2\pi i \text{Res}\left(\frac{1}{p^2+(p^2+1)t^2}, t_1\right) = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}.$$

另当  $\text{Re} p > 0$  时

$$L[J_1(t)] = \int_0^\infty e^{-pt} J_1(t) dt = - \int_0^\infty e^{-pt} J_0'(t) dt = -e^{-pt} J_0(t) \Big|_0^\infty - p \int_0^\infty e^{-pt} J_0(t) dt = 1 - pL[J_0(t)].$$

即

$$L[J_1(t)] = \frac{\sqrt{1+p^2} - p}{\sqrt{1+p^2}}.$$

**例子2.**  $n \geq 2$ , 证明

$$\int_0^x x^n J_0(x) dx = x^n J_1(x) + (n-1)x^{n-1} J_0(x) - (n-1)^2 x^2 \int_0^x x^{n-2} J_0(x) dx.$$

**证明.** 这是书后面的作业。

$$\int_0^x x^n J_0(x) dx = \int_0^x x^{n-1} x J_0(x) dx = \int_0^x x^{n-1} (x J_1(x))' dx = x^n J_1(x) - (n-1) \int_0^x x^{n-1} J_1(x) dx.$$

用微分关系  $J_1(x) = -(J_0(x))'$ , 得

$$\int_0^x x^{n-1} J_1(x) dx = - \int_0^x x^{n-1} J_0'(x) dx = x^{n-1} J_0(x) + (n-1) \int_0^x x^{n-2} J_0(x) dx.$$

综合以上所述, 证明结论。

实际上, 对任意整数  $m, n$ :

$$\begin{aligned} \int x^m J_n(x) dx &= \int x^{m-n} x^n J_n(x) dx = \int x^{m-n-1} (x^{n+1} J_{n+1}(x))' dx \\ &= x^m J_{n+1}(x) - (m-n-1) \int x^{m-1} J_{n+1}(x) dx. \end{aligned}$$

结合例子2, 可以说明最终  $\int x^m J_n(x) dx$  总能表示成,  $J_0, J_1, \int J_0$  的组合。当  $m+n$  为奇数时候, 尾巴项为

$$\int x J_0 dx = \int (x J_1)' dx = x J_1.$$

当  $m+n$  为偶数的时候, 尾巴项  $\int J_0 dx$  没法消掉。

### 0.3.3 渐近公式与零点

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - \nu^2) y = 0, x \geq 0.$$

设  $u = \sqrt{xy}$ , 得

$$y' = \frac{u'}{x^{1/2}} - \frac{u}{2x^{3/2}}, y'' = \frac{u''}{x^{1/2}} - \frac{u'}{x^{3/2}} + \frac{3u}{4x^{5/2}}.$$

得到

$$u'' + \left(1 + \frac{1/4 - \nu^2}{x^2}\right)u = 0.$$

当  $|x|$  非常大得时候, 可以近似得认为

$$u'' + u = 0.$$

其通解为

$$u = C_1 \cos x + C_2 \sin x = A \cos(x + \theta).$$

实际上, 进一步地推导可以证明 (略)

$$J_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right),$$

$$N_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

从而可以发现  $J_\nu, J'_\nu, J_\nu + hJ'_\nu$  都有无穷多正零点。这说明我们选取的边界条件总有可数无限个固有值。

## 0.4 贝塞尔方程的固有值问题

现在我们考虑贝塞尔方程的固有值问题,

$$\begin{cases} x^2 y'' + xy' + (\mu x^2 - \nu^2)y = 0, 0 < x < a \\ |y(0)| < \infty, \alpha y(a) + \beta y'(a) = 0. \end{cases}$$

SL型为,

$$[xy']' - \frac{\nu^2}{x} + \mu xy = 0.$$

需要注意的是  $\rho = x$ , 因而内积为  $\langle f, g \rangle = \int_0^a f(x)g(x)x dx$ 。

由上节讨论可得, 该方程的解为

$$y = C_1 J_\nu(\sqrt{\mu}x) + C_2 N_\nu(\sqrt{\mu}x).$$

代入边界条件,  $C_2 = 0$ 。设  $\omega = \sqrt{\mu}$ , 则边界条件为

$$\alpha J_\nu(\omega a) + \beta \omega J'_\nu(\omega a) = 0.$$

上述方程有无数解, 我们假设所有解为  $(0 = \omega_0 <) \omega_1 < \dots$ 。

(固有值  $\mu_0 = 0$ , 对应固有函数  $Y_0 = 1$ )

固有值  $\mu_n = \omega_n^2$ , 对应固有函数  $Y_n = J_\nu(\omega_n x)$ 。

需要注意的是只有当  $\alpha = 0, \nu = 0$  时,  $\omega_0 = 0$  存在。

我们需要以  $\{J_\nu(\omega_n x)\}_n$  为正交基做傅里叶展开,  $(0, a)$  的函数  $f(x)$  展开为

$$f = \text{可能的常数项} + \sum_{n=1}^{\infty} f_n J_\nu(\omega_n x).$$

为了计算系数, 我们需要计算  $\int_0^a x J_\nu^2(\omega_n) dx$ , 为此对下式乘以  $2y'$

$$x[xy']' + (\omega^2 x^2 - \nu^2)y = 0.$$

得到

$$2[xy'] [xy']' + (\omega^2 x^2 - \nu^2)2yy' = 0.$$

即

$$([xy']^2)' + (\omega^2 x^2 - \nu^2)(y^2)' = 0.$$

从 0 到  $a$  做积分, 得到:

$$\int_0^a ([xy']^2)' dx = - \int_0^a (\omega^2 x^2 - \nu^2)(y^2)' dx = -(\omega^2 x^2 - \nu^2)y^2|_0^a + \int_0^a 2\omega^2 xy^2 dx.$$

上式左边 =  $[xy']^2|_0^a = (ay'(a))^2$ , 从而

$$\int_0^a xy^2 dx = \frac{(ay'(a))^2 + (\omega^2 a^2 - \nu^2)y(a)^2 + \nu^2 y(0)^2}{2\omega^2}.$$

带入  $y = J_\nu(\omega x)$  及  $\nu^2 J_\nu(0)^2 = 0$ , 得

$$\int_0^a xy^2 dx = \frac{a^2 \omega^2 J_\nu'^2(\omega a) + (\omega^2 a^2 - \nu^2) J_\nu^2(\omega a)}{2\omega^2}.$$

$$\mathcal{N}_\nu^2 = \langle J_\nu(\omega x), J_\nu(\omega x) \rangle = \int_0^a x J_\nu^2(\omega x) dx:$$

$$(\alpha) \alpha \neq 0, \beta = 0: \text{此时 } J_\nu(\omega a) = 0, \text{ 得到 } \mathcal{N}_\nu^2 = \frac{a^2}{2} J_\nu'^2(\omega a) = \frac{a^2}{2} J_{\nu+1}^2(\omega a);$$

$$(\beta) \alpha = 0, \beta \neq 0: \text{此时 } J_\nu'(\omega a) = 0, \text{ 得到 } \mathcal{N}_\nu^2 = \frac{(\omega^2 a^2 - \nu^2) J_\nu^2(\omega a)}{2\omega^2} = \frac{1}{2} (a^2 - \frac{\nu^2}{\omega^2}) J_\nu^2(\omega a);$$

$$(\gamma) \alpha \neq 0, \beta \neq 0: \text{此时, 设 } h = \frac{\beta}{\alpha}, \text{ 有 } J_\nu(\omega a) + h\omega J_\nu'(\omega a) = 0, \text{ 得到 } \mathcal{N}_\nu^2 = \frac{1}{2} (\frac{a^2}{h^2 \omega^2} + a^2 - \frac{\nu^2}{\omega^2}) J_\nu^2(\omega a).$$

特别地, 当  $\nu = 0$  时候:

$$(\alpha) \alpha \neq 0, \beta = 0: \mathcal{N}_0^2 = \frac{a^2}{2} J_1^2(\omega a);$$

$$(\beta) \alpha = 0, \beta \neq 0: \mathcal{N}_0^2 = \frac{a^2}{2} J_0^2(\omega a);$$

$$(\gamma) \alpha \neq 0, \beta \neq 0: \mathcal{N}_0^2 = \frac{1}{2} (\frac{a^2}{h^2 \omega^2} + a^2) J_0^2(\omega a).$$

**例子 3.** 设  $J_0(x) = 0$  得所有正根为  $0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots$ , 分别将  $(0, 1)$  上得函数  $1, x^2$  分解为  $J_0(\omega_i x)$  的级数。

解.  $\omega_i^2$  以及  $J_0(\omega_i)$  为对应如下零阶贝塞尔固有值问题的固有值和固有函数

$$\begin{cases} x^2 y'' + xy' + \mu x^2 y = 0, 0 \leq x \leq 1 \\ |y(0)| < \infty, y(1) = 0. \end{cases}$$

边界条件为 I 类边界条件, 所以  $\mathcal{N}_{0,i}^2 = \frac{1}{2} J_1^2(\omega_i)$ .

首先对 1 分解:

$$\langle 1, J_0(\omega_i x) \rangle = \int_0^1 1 J_0(\omega_i x) x dx = \frac{1}{\omega_i^2} \int_0^{\omega_i} J_0(x) x dx = \frac{1}{\omega_i^2} \int_0^{\omega_i} (x J_1(x))' dx = \frac{J_1(\omega_i)}{\omega_i}.$$

从而

$$1 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\langle 1, J_0(\omega_i x) \rangle}{\mathcal{N}_{0,i}^2} J_0(\omega_i x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2}{\omega_i J_1(\omega_i)} J_0(\omega_i x).$$

再对  $x^2$  做分解:

$$\langle x^2, J_0(\omega_i x) \rangle = \int_0^1 x^3 J_0(\omega_i x) dx = \frac{1}{\omega_i^4} \int_0^{\omega_i} J_0(x) x^3 dx.$$

$$\begin{aligned} \langle x^2, J_0(\omega_i x) \rangle &= \int_0^1 x^3 J_0(\omega_i x) dx = \frac{1}{\omega_i^4} \int_0^{\omega_i} x^3 J_0(x) dx \\ &= \frac{1}{\omega_i^4} \int_0^{\omega_i} x^2 (x J_1(x))' dx \\ &= \frac{1}{\omega_i^4} \left( \int_0^{\omega_i} x^2 d(x J_1(x)) \right) \\ &= \frac{1}{\omega_i^4} \left( x^3 J_1(x) \Big|_0^{\omega_i} - 2 \int_0^{\omega_i} x^2 J_1(x) dx \right) \\ &= \frac{1}{\omega_i^4} \left( x^3 J_1(x) \Big|_0^{\omega_i} - 2 \int_0^{\omega_i} (x^2 J_2(x))' dx \right) \\ &= \frac{1}{\omega_i^4} \left( x^3 J_1(x) \Big|_0^{\omega_i} - 2x^2 J_2(x) \Big|_0^{\omega_i} \right) \\ &= \frac{1}{\omega_i^4} \left( x^3 J_1(x) - 4x J_1(x) + 2x^2 J_0(x) \right) \Big|_0^{\omega_i}. \end{aligned}$$

注意到  $J_0(\omega_i) = 0$ ,

$$\langle x^2, J_0(\omega_i x) \rangle = \frac{1}{\omega_i^4} \left( x^3 J_1(x) - 4x J_1(x) + 2x^2 J_0(x) \right) \Big|_0^{\omega_i} = \frac{2}{\omega_i J_1(\omega_i)} - \frac{8}{\omega_i^3 J_1(\omega_i)}.$$

$$x^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\langle x^2, J_0(\omega_i x) \rangle}{\mathcal{N}_{0,i}^2} J_0(\omega_i x) = \sum_{i=1}^{\infty} \left( \frac{2}{\omega_i J_1(\omega_i)} - \frac{8}{\omega_i^3 J_1(\omega_i)} \right) J_0(\omega_i x).$$

例子 4. 设  $J_0'(x) = 0$  得所有正根为  $0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots$ , 将  $(0, 1)$  上的函数  $1, x^2$  分解为  $1, J_0(\omega_i x)$  的级数。

解.  $0, \omega_i^2$  和其对应的  $1, J_0(\omega_i)$  为如下零阶贝塞尔固有值问题的固有值和固有函数

$$\begin{cases} x^2 y'' + xy' + \mu x^2 y = 0, 0 \leq x \leq 1 \\ |y(0)| < \infty, y'(1) = 0. \end{cases}$$

边界条件为II类边界条件, 所以 $\mathcal{N}_{0,i}^2 = \frac{1}{2}J_0^2(\omega_i)$ 。

首先对1分解: 就是1。

再对 $x^2$ 做分解: 首先求常数固有函数1的系数

$$\langle 1, 1 \rangle = \int_0^1 1^2 dx = \frac{1}{2}.$$

$$\langle x^2, 1 \rangle = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.$$

所以常数项系数 =  $\frac{\langle x^2, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} = \frac{1}{3}$ 。

$$\begin{aligned} \langle x^2, J_0(\omega_i x) \rangle &= \int_0^1 x^2 J_0(\omega_i x) dx = \frac{1}{\omega_i^4} \int_0^{\omega_i} x^2 J_0(x) dx \\ &= \frac{1}{\omega_i^4} \int_0^{\omega_i} x^2 (x J_1(x))' dx \\ &= \frac{1}{\omega_i^4} \left( \int_0^{\omega_i} x^2 d(x J_1(x)) \right) \\ &= \frac{1}{\omega_i^4} \left( x^3 J_1(x) \Big|_0^{\omega_i} - 2 \int_0^{\omega_i} x^2 J_1(x) dx \right) \\ &= \frac{1}{\omega_i^4} \left( x^3 J_1(x) \Big|_0^{\omega_i} - 2 \int_0^{\omega_i} (x^2 J_2(x))' dx \right) \\ &= \frac{1}{\omega_i^4} \left( x^3 J_1(x) \Big|_0^{\omega_i} - 2x^2 J_2(x) \Big|_0^{\omega_i} \right) \\ &= \frac{1}{\omega_i^4} \left( x^3 J_1(x) - 4x J_1(x) + 2x^2 J_0(x) \right) \Big|_0^{\omega_i}. \end{aligned}$$

注意到 $J_0'(\omega_i) = -J_1(\omega_i) = 0$ :

$$\begin{aligned} \langle x^2, J_0(\omega_i x) \rangle &= \frac{1}{\omega_i^4} (x^3 J_1(x) + 2x^2 J_0(x) - 4x J_1(x)) \Big|_0^{\omega_i} \\ &= \frac{1}{\omega_i^4} (\omega_i^3 J_1(\omega_i) + 2\omega_i^2 J_0(\omega_i) - 4\omega_i J_1(\omega_i)) \\ &= \frac{2J_0(\omega_i)}{\omega_i^2}. \end{aligned}$$

从而

$$x^2 = \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\langle x^2, J_0(\omega_i x) \rangle}{\mathcal{N}_{0,i}^2} J_0(\omega_i x) = \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{4}{\omega_i^2 J_0(\omega_i)} J_0(\omega_i x).$$

**例子5** (零阶贝塞尔固有值问题). 有一个处于热平衡的理想金属圆柱, 半径高均为1, 上下底温度分别为 $1-r^2, 0$ , 侧面温度为0, 无热源, 求圆柱体内的温度分布。

**解.** 由对称性, 容易知道温度分布与角度无关, 不妨设温度 $u = u(r, z)$ 。因而可以写出定解问题

$$\begin{cases} \Delta_3 u = \frac{\partial u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z^2} = 0, 0 \leq r \leq 1, 0 \leq z \leq 1 \\ u|_{r=1} = 0. \\ u(0, z) = 0, u(1, z) = 1 - r^2. \end{cases}$$

分离变量,  $u(r, z) = R(r)Z(z)$ , 有

$$-\frac{Z''}{Z} = \frac{rR'' + R'}{rR}.$$

设上式为常值 $-\mu$ , 得到固有值问题

$$\begin{cases} r^2 R'' + rR' + \mu r^2 R = 0, 0 \leq r \leq 1 \\ |R(0)| < \infty, R(1) = 0. \end{cases}$$

这是零阶的贝塞尔固有值问题, 因为有一个边界条件是I类边界条件。因而零不是固有值, 设

$$J_0(\omega)$$

的所有正解为 $0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots$ 。则对应固有值 $\omega_n^2$ , 固有函数 $J_0(\omega_n r)$ , 将固有值带入 $Z_n$ 的方程, 得到:

$$Z_n'' - \omega_n^2 Z_n = 0.$$

$Z_n = A_n e^{\omega_n z} + B_n e^{-\omega_n z}$ 。从而

$$u(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n e^{\omega_n z} + B_n e^{-\omega_n z}) J_0(\omega_n r).$$

求系数,

$$u(r, 1) = 1 - r^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{8}{\omega_i^3 J_1(\omega_i)} J_0(\omega_i r), u(r, 0) = 0.$$

对照得

$$\begin{cases} A_n + B_n = 0 \\ A_n e^{\omega_n} + B_n e^{-\omega_n} = \frac{\langle 1-r^2, J_0(\omega_n r) \rangle}{\langle J_0(\omega_n r), J_0(\omega_n r) \rangle} = \frac{8}{\omega_n^3 J_1(\omega_n)} \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} A_n = \frac{8}{(e^{\omega_n} - e^{-\omega_n}) \omega_n^3 J_1(\omega_n)} \\ B_n = -\frac{8}{(e^{\omega_n} - e^{-\omega_n}) \omega_n^3 J_1(\omega_n)}. \end{cases}$$

从而

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{(e^{\omega_n} - e^{-\omega_n}) \omega_n^3 J_1(\omega_n)} (e^{\omega_n z} - e^{-\omega_n z}) J_0(\omega_n r) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{sh(\omega_n) \omega_n^3 J_1(\omega_n)} sh(\omega_n z) J_0(\omega_n r).$$

**例子6.** 有一半径为1的无限长金属圆柱, 初始温度为 $1 - r^2$ , 热传导系数/密度/比热都是1, 侧面绝热, 无热源, 求圆柱体的温度变化。

**解.** 容易知道温度分布与角度无关与 $z$ 无关, 不妨设温度 $u = u(t, r)$ 。因而可以写出定解问题

$$\begin{cases} u_t = \frac{\partial u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r}, 0 \leq r \leq 1, t > 0 \\ u_r|_{r=1} = 0, t > 0. \\ u(0, r) = 1 - r^2. \end{cases}$$

分离变量, 设 $u = T(t)R(r)$ , 得

$$\frac{T'}{T} = \frac{rR'' + R'}{rR}.$$

左边为 $t$ 得函数, 右边为 $r$ 得函数, 因而为常数, 设为 $-\lambda$ , 得到零阶固有值问题

$$\begin{cases} r^2 R'' + rR' + \lambda r^2 R = 0, 0 \leq r \leq 1 \\ |R(0)| < \infty, R'(1) = 0. \end{cases}$$

和

$$T' + \lambda T = 0.$$

边界条件分别为自然边界条件和II类边界条件, 因为 $\lambda_0 = 0$ 为固有值, 对应固有函数为 $R_0 = 1$ 。设

$$J'_0(\omega) = 0$$

得所有正解为 $\omega_1 < \omega_2 < \dots$ , 则固有值为 $\omega_n^2$ , 对用固有函数为 $R_n = J_0(\omega_n r)$ 。代入固有值, 解 $T_n$ 的微分方程

$$T'_n + \omega_n^2 T_n = 0$$

得 $T_0 = A_0$ 和 $T_n = A_n e^{-\omega_n^2 t}$ ,  $n \geq 1$ 。所以定解问题得解为

$$u(t, r) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\omega_n^2 t} J_0(\omega_n r).$$

将 $1 - r^2$ 做展开

$$1 - r^2 = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\omega_n^2 J_0(\omega_n)} J_0(\omega_n r).$$

对照得:

$$A_0 = \frac{1}{2}, A_n = -\frac{4}{\omega_n^2 J_0(\omega_n)}, n \geq 1.$$

所以

$$u(t, r) = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\omega_n^2 J_0(\omega_n)} e^{-\omega_n^2 t} J_0(\omega_n r).$$

## 0.5 勒让德固有值问题

在球坐标系, 尤其是存在轴对称性的时候做变量分离, 我们会碰到勒让德函数。

设有一个半径为 $a$ 的金属球, 内部无热源, 表面的温度已知, 为 $f(\cos(\theta))$ ,  $(r, \theta, \varphi), r \in [0, R], \theta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi)$ 为球极坐标系,  $x = r \sin \theta \cos \varphi, y = r \sin \theta \sin \varphi, z = r \cos \theta$ 。内部无热源, 金属球处于热平衡, 求温度分布?

在球极坐标下, 拉普拉斯有如下形式:

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.$$

很多物理问题, 特别是静电场中的问题, 都有轴对称性, 这时候, 解不依赖于 $\varphi$ , 拉普拉斯可以化简为:

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right),$$

其中 $u = u(r, \theta)$ 。

例如上述例子，设  $u = u(r, \theta)$  为温度分布，首先写出定解问题

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u(a, \theta) = f(\cos \theta) \end{cases}$$

分离变量，设  $u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$ ，则有

$$\frac{1}{r^2}[r^2 R']'\Theta + \frac{R}{r^2 \sin \theta}[\sin \theta \Theta']' = 0.$$

即

$$-\frac{[r^2 R']'}{R} = \frac{[\sin \theta \Theta']'}{\sin \theta \Theta}.$$

为常值，设为  $-\lambda$ 。得到固有值问题

$$(I) \quad \begin{cases} [\sin \theta \Theta']' + \lambda \sin \theta \Theta = 0 \\ |\Theta(0)| < \infty, |\Theta(\pi)| < \infty. \end{cases}$$

以及微分方程

$$-\frac{[r^2 R']'}{R} = -\lambda.$$

做变量替换  $x = \cos \theta$ ，则  $x \in [-1, 1]$ ， $\theta = \arccos x$ 。

$$\frac{d}{d\theta} = \frac{d}{d \arccos x} = -\sqrt{1-x^2} \frac{d}{dx}, \sin \theta = \sqrt{1-x^2}.$$

所以

$$[\sin \theta \Theta']' = \frac{d}{d\theta}(\sin \theta \frac{d}{d\theta} \Theta) = -\sqrt{1-x^2} \frac{d}{dx}(-\sqrt{1-x^2} \frac{d}{dx} \Theta) = \sqrt{1-x^2}(-2x \frac{d\Theta}{dx} + (1-x^2) \frac{d^2\Theta}{dx^2}).$$

令  $y(x) = \Theta(\arccos x)$ ，则  $\Theta(\theta) = y(\cos \theta)$ ，得到固有值问题

$$(II) \quad \begin{cases} (1-x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0 \\ |y(\pm 1)| < \infty. \end{cases}$$

这是勒让德方程得固有值问题。其SL型为

$$[(1-x^2)y']' + \lambda y = 0.$$

$k = 1 - x^2$ ， $q = 0$ ， $\rho = 1$ ，两个边界条件都是自然边界条件，因而零是固有值，其他固有值都大于零。所有固有值都可以表示成  $n(n+1)$ ，实际上只有当  $n$  是非负整数的时候才有有界解，为了说明这件事情，我们还是像贝塞尔函数那样找两个线性无关的特解，假设解具有形式

$$y = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i.$$

带入固有值问题得

$$\sum_{i=0}^{\infty} i(i-1)a_i x^{i-2} - \sum_{i=0}^{\infty} i(i-1)a_i x^i - \sum_{i=0}^{\infty} 2ia_i x^i + n(n+1) \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = 0.$$



从而

$$(i+2)(i+1)a_{i+2} - i(i-1)a_i - 2ia_i + n(n+1)a_i = 0.$$

即

$$a_{i+2} = \frac{(i-n)(i+n+1)}{(i+2)(i+1)}a_i.$$

令  $a_0 = a_1 = 1$ , 奇偶项分离, 我们可以得到两个特解

$$y_1(x) = \sum_i a_{2i}x^{2i},$$

$$y_2(x) = \sum_i a_{2i+1}x^{2i+1}.$$

由递推公式:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{2i}}{a_{2i-2}} \right| = \lim_{i \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{2i+1}}{a_{2i-1}} \right| = 1.$$

所以  $y_1$  与  $y_2$  得收敛半径至少都是1. 并且  $y_1$  为非零偶函数,  $y_2$  为非零奇函数,  $y_1$  和  $y_2$  线性无关. 即勒让德方程得所有解可以表示为

$$C_1y_1 + C_2y_2.$$

当  $n$  为非负整数得时候, 我们按照奇偶性来讨论, 1).  $n = 2k$  为偶数, 此时

$$a_{2k+2} = \frac{(2k-n)(2k+n+1)}{(2k+2)(2k+1)}a_{2k} = 0.$$

顺带可以说明  $a_{2i} = 0, i = k+1, \dots$ . 即  $y_1$  为多项式, 因而  $|y_1(\pm 1)| < \infty$ . 2) 当  $n$  为奇数得时候, 也有类似讨论, 在此略去.

当  $n$  不是整数的时候, 可以证明

$$\lim_{i \rightarrow \infty} a_{2i} = c_1 \neq 0, \lim_{i \rightarrow \infty} a_{2i+1} = c_2 \neq 0.$$

$y_1(1)$  收敛性与  $c_1 \sum_i 1^{2i}$  一致, 极限趋向于  $+\infty$  或者  $-\infty$ . 因为是偶函数, 因而  $y_1(1) = y_1(-1) = +\infty$  或者  $-\infty$ . 反之,  $y_2$  的  $\pm 1$  的取值也是  $\pm\infty$  但符号相反. 所以此时,  $y_1$  和  $y_2$  无论怎么线性组合, 在  $\pm 1$  的取值都不可能同时有界, 所以此时  $n(n+1)$  不是固有值.

所以 (II) 的固有值为

$$\lambda_n = n(n+1), n = 0, 1, 2, \dots$$

$\lambda_n$  对应的固有函数为

$$y_n(x) = \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n.$$

**证明.** 设  $Y = (x^2 - 1)^n$ , 则

$$(x^2 - 1)Y' = 2nx(x^2 - 1)^n = 2nxY.$$

两边求  $n+1$  阶求导, 用莱布尼兹求导公式得

$$\begin{aligned} [(x^2 - 1)Y']^{(n+1)} &= C_{n+1}^0(x^2 - 1)Y^{(n+2)} + C_{n+1}^1 2xY^{(n+1)} + C_{n+1}^2 2Y^{(n)} \\ &= (x^2 - 1)Y^{(n+2)} + 2(n+1)xY^{(n+1)} + n(n+1)Y^{(n)}. \end{aligned}$$

以及

$$[2nxY]^{(n+1)} = 2nxY^{(n+1)} + 2n(n+1)Y^{(n)}.$$

对照得并用  $y_n = Y^{(n)}$  替换得到

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \lambda_n y = 0.$$


---

我们一般在  $y_n$  前添加一个常数因子。

$$p_n(x) = \frac{1}{2^n n!} y_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n.$$

$p_n(x)$  称为勒让德多项式，如果把  $(x^2 - 1)^n$  展开

$$(x^2 - 1)^n = \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{n!}{i!(n-i)!} x^{2n-2i}$$

得到

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^i \frac{(2n-2i)!}{2^n i!(n-i)!(2-2i)!} x^{2n-2i}.$$

称为级数表示， $[\cdot]$  取整符号。

简单计算容易得到

$$p_0(x) = 1,$$

$$p_1(x) = x,$$

$$p_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1),$$

$$p_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x).$$

$p_n(x)$  为  $n$  次多项式，当  $n$  为偶数的时候为偶函数，当  $n$  为奇数的时候为奇函数， $p_n(x)$  的首项系数为  $\frac{(2n)!}{2^n n! n!}$ 。

现在我们已经有了  $\{p_n(x)\}_{n \geq 0}$  以及固有值  $\lambda_n = n(n+1)$ ,

固有值问题(I) 的固有值同样为  $\lambda_n = n(n+1)$ ，固有函数为  $\Theta_n = p_n(\cos \theta)$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ 。将固有值带到  $R_n$  的函数，有

$$-\frac{[r^2 R_n']'}{R_n} = -\lambda_n.$$

即

$$r^2 R_n'' + 2r R_n' - n(n+1)R_n = 0.$$

这是一个欧拉方程，做变量替换  $r = e^t$ ，得到

$$\frac{d^2 R_n}{dt^2} + \frac{dR_n}{dt} - n(n+1)R_n = 0.$$

解之，

$$R_n(r) = A_n e^{nt} + B_n e^{-(n+1)t} = A_n r^n + B_n r^{-n-1}.$$

所以

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{-n-1}) p_n(\cos \theta).$$

在本例子中,  $B_n = 0$ . 令  $r = a$ , 得到

$$f(\cos \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n a^n p_n(\cos \theta).$$

需要将  $f(\cos \theta)$  做类似傅里叶分解:

$$f(\cos \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n p_n(\cos \theta).$$

其中

$$f_n = \frac{\int_0^\pi f(\cos \theta) p_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta}{\int_0^\pi p_n^2(\cos \theta) \sin \theta d\theta} = \frac{\int_{-1}^1 f(x) p_n(x) dx}{\int_{-1}^1 p_n^2(x) dx}.$$

对照得,  $A_n = \frac{f_n}{a^n}$  以及

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \left(\frac{r}{a}\right)^n p_n(\cos \theta).$$

为了求系数, 我们需要将连续函数沿着  $p_n$  做傅里叶分解. 由SL 理论,  $\{p_n(x)\}_{n \geq 0}$  是一组完备正交基, 从而可以把  $[-1, 1]$  上的符合边界条件的连续函数分解为  $\{p_n(x)\}_{n \geq 0}$  的线性组合, 且一致收敛, 不符合的也能分解, 除了可能边界上不收敛/整体不一致收敛其他都对. 从而可以得到几个简单的事实:

- (1) 当  $m \neq n$  时候  $\int_{-1}^1 p_n(x) p_m(x) dx = 0$ ;
- (2) 设  $P_n(x) = a_0 + \dots + a_n x^n$  为  $n$  次多项式, 则  $P_n(x)$  可以由  $p_0, p_1, \dots, p_n$  线性组合, 系数可以用待定系数法确定, 且  $p_n$  前面的系数等于  $a_n \frac{2^n n! n!}{(2n)!}$ ;
- (3) 如果  $m \leq n$ , 则  $\int_{-1}^1 P_m(x) p_n(x) dx = 0$ ;
- (4) 如果多项式  $P_n(x)$  只有奇次项, 则展开成  $\{p_{2n+1}\}$  的线性组合; 如果多项式  $P_n(x)$  只有偶次项, 则展开成  $\{p_{2n}\}$  的线性组合.

**例子7.** 设有一个半径为  $a$  的金属球, 球表面的温度已知, 为  $f(\cos \theta) = \cos^2(\theta)$ , 内部无热源, 金属球处于热平衡, 求温度分布?

**解.** 取极坐标  $(r, \theta, \varphi)$ ,  $r \in [0, a]$ ,  $\theta \in [0, \pi]$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi]$  表面温度与  $\varphi$  无关, 由对称性, 球内的温度分布也与  $\varphi$  无关, 因而可以假设  $u = r(r, \theta)$ . 写出定解问题为:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, r < a, \theta \in [-\pi, \pi] \\ u|_{r=a} = \cos^2(\theta) \end{cases}$$

由以上讨论可知,

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{-n-1}) p_n(\cos \theta).$$

球心温度有限, 因而  $B_n = 0$ , 所以

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n p_n(\cos \theta).$$

令  $r = a$  得到

$$\cos^2 \theta = \sum_{n=0}^{\infty} A_n a^n p_n(\cos \theta).$$

对照可得, 除了  $p_0, p_2$  项之外, 其余全部为0. 所以

$$\cos^2 \theta = A_0 + A_2 a^2 \left( \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1) \right).$$

解得  $A_0 = \frac{1}{3}, A_2 = \frac{2}{3a^2}$ . 所以

$$u(r, \theta) = \frac{1}{3} + \frac{2r^2}{3a^2} p_2(\cos \theta) = \frac{r^2}{a^2} \cos^2 \theta + \left( \frac{1}{3} - \frac{r^2}{3a^2} \right).$$

**例子8.** 设有一个半径为  $R$  厚度为  $R/2$  的空心球, 外表面的温度为  $\cos^2(\theta)$ , 内表面的温度为  $\cos(\theta)$ , 空心球处于热平衡, 求温度分布?

**解.** 取极坐标  $(r, \theta, \varphi), r \in [0, a], \theta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi]$  表面温度与  $\varphi$  无关, 由对称性, 空心球内的温度分布也与  $\varphi$  无关, 因而可以假设  $u = u(r, \theta)$ . 写出定解问题为:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, 0 \leq r \leq a, \theta \in [-\pi, \pi] \\ u|_{r=R} = \cos^2(\theta), \theta \in [-\pi, \pi]. \end{cases}$$

由以上讨论可知,

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{-n-1}) p_n(\cos \theta).$$

注意到

$$\begin{aligned} \cos \theta &= p_1(\cos \theta), \\ \cos^2 \theta &= \frac{1}{3} p_0(\cos \theta) + \frac{2}{3} p_2(\cos \theta). \end{aligned}$$

分别带入  $R$  和  $R/2$  得  $A_n = B_n = 0, n \geq 3$  以及

$$\begin{cases} A_0 + \frac{B_0}{R} = \frac{1}{3} \\ A_0 + \frac{2B_0}{R} = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_1 R + \frac{B_1}{R^2} = 0 \\ \frac{A_1 R}{2} + \frac{4B_1}{R^2} = 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_2 R^2 + \frac{B_2}{R^3} = \frac{2}{3} \\ \frac{A_2 R^2}{4} + \frac{8B_2}{R^3} = 0. \end{cases}$$

解得  $A_0 = \frac{2}{3}, B_0 = -\frac{R}{3}, A_1 = -\frac{2}{7R}, B_1 = \frac{2}{7} R^2, A_2 = \frac{64}{93R^2}, B_2 = -\frac{2}{93} R^3$ . 最终结果我们就直接省略了。

关于半球问题：第一类边界条件奇展开，且只有奇数次项；第二类边界条件偶展开，且只有偶次项。

**例子9.** 设有一个半径为 $a$ 的金属半球，球表面的温度已知，为 $\cos^2(\theta)$ ，内部无热源，金属半球处于热平衡，根据以下情况分别求温度分布？

(1) 底部绝热；

(2) 底部恒温=0。

**解.** (1)把半球补成一个完整得球，要使得底部绝热，仅需让球得表面温度上下对称即可，即

$$\begin{cases} \Delta u = 0, 0 \leq r \leq a, \theta \in [-\pi, \pi] \\ u|_{r=R} = \cos^2(\theta). \end{cases}$$

就是上上例子。

(2)把半球补成一个完整得球，要使得底部恒温0，仅需让球得表面温度上下反对称即可，即

$$\begin{cases} \Delta u = 0, 0 \leq r \leq a, \theta \in [-\pi, \pi] \\ u|_{r=R} = \cos^2(\theta), \theta \in [-\pi, 0] \\ u|_{r=R} = -\cos^2(\theta), \theta \in [0, \pi]. \end{cases}$$

我们暂时没法求系数。

### 0.5.1 勒让德函数的母函数与递推公式

勒让德函数的母函数为

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}, x \in [-1, 1], -1 < t < +1.$$

我们尝试对 $t$ 在0点Taylor展开。

$$(1+s)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} C_k^{-\frac{1}{2}} s^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{2})!}{k!(-\frac{1}{2}-k)!} s^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(k+1)\Gamma(\frac{1}{2}-k)} s^k.$$

回忆 $\Gamma$ 函数， $\Gamma(x+1) = x!$ 。所以

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(k+1)\Gamma(\frac{1}{2}-k)} (t^2-2xt)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(k+1)\Gamma(\frac{1}{2}-k)} t^k (t-2x)^k.$$

$t^n$ 前面的系数

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(k+1)\Gamma(\frac{1}{2}-k)} C_k^{n-k} (-2x)^{2k-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(k+1)\Gamma(\frac{1}{2}-k)} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(n-k+1)\Gamma(2k-n+1)} (-2x)^{2k-n}.$$

注意到

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s).$$

所以

$$\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}-k)} = (\frac{1}{2}-k) \times (\frac{1}{2}-(k-1)) \times \cdots \times (\frac{1}{2}-1) = \frac{(-1)^k(2k)!}{2^{2k}k!}.$$

所以 $t^n$  前系数为

$$= \sum_{k=\lceil \frac{n}{2} \rceil}^n \frac{(-1)^k(2k)!}{2^{2k}k!} \frac{1}{(n-k)!(2k-n)!} (-2x)^{2k-n}.$$

其中 $\lceil \frac{n}{2} \rceil$  为不小于 $\frac{n}{2}$  的最小整数。替换 $l = n - k$  则有上式等于

$$\sum_{l=0}^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \frac{(-1)^{n-l}(2n-2l)!}{2^{2n-2l}(n-l)!} \frac{1}{l!(n-2l)!} (-2x)^{n-2l} = \sum_{l=0}^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \frac{(-1)^l(2n-2l)!}{2^n(n-l)!l!(n-2l)!} x^{n-2l} = p_n(x).$$

所以

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x)t^n.$$

令 $x = 1$  得

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n(1)t^n = \frac{1}{\sqrt{1-2t+t^2}} = \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n.$$

对照得

$$p_n(1) = 1.$$

令 $x = -1$  得

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n(-1)t^n = \frac{1}{\sqrt{1+2t+t^2}} = \frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n.$$

对照得

$$p_n(-1) = (-1)^n.$$

令 $x = 0$  得

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n(0)t^n = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{-\frac{1}{2}}^k t^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(k+1)\Gamma(\frac{1}{2}-k)} t^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(2k)!}{2^{2k}k!k!} t^{2k}.$$

对照得:  $n$  为奇数, 则 $p_n(0) = 0$ ;  $n = 2k$  为偶数, 则 $p_n(0) = \frac{(-1)^k(2k)!}{2^{2k}k!k!}$ 。利用母函数可以导出勒让德多项式的递推公式( $n \geq 1$ )。

$$(1) (n+1)p_{n+1}(x) - x(2n+1)p_n(x) + np_{n-1}(x) = 0;$$

$$(2) np_n(x) - xp'_n(x) + p'_{n-1}(x) = 0;$$

$$(3) np_{n-1}(x) - p'_n(x) + xp'_{n-1}(x) = 0;$$

$$(4) p'_{n+1}(x) - p'_{n-1}(x) = (2n+1)p_n(x).$$

证明. 记 $\varphi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}$ , 则

$$\varphi_t = (x-t)\varphi^3,$$

$$\varphi_x = t\varphi^3.$$

先证明(1)

$$\begin{aligned}\varphi_t &= \sum_{n=1}^{\infty} np_n(x)t^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)p_{n+1}(x)t^n, \\ 2t\varphi_t + \varphi &= \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)p_n(x)t^n, \\ t\varphi + t^2\varphi_t &= \sum_{n=0}^{\infty} np_{n-1}(x)t^n = \sum_{n=1}^{\infty} np_{n-1}(x)t^n.\end{aligned}$$

所以

$$\sum_{n \geq 0} ((n+1)p_{n+1}(x) - x(2n+1)p_n(x) + np_{n-1}(x))t^n = \varphi_t - 2xt\varphi_t - x\varphi + t\varphi + t^2\varphi_t.$$

注意到

$$\varphi_t - 2xt\varphi_t + t^2\varphi_t = [1 - 2xt + t^2](x-t)\varphi^3 = (x-t)\varphi.$$

所以 $(n+1)p_{n+1}(x) - x(2n+1)p_n(x) + np_{n-1}(x) = 0, n \geq 1$ .

再证明(2).

$$\varphi_x = \sum_{n=0}^{\infty} p'_n(x)t^n = \sum_{n=1}^{\infty} p'_n(x)t^n.$$

所以

$$t\varphi_t - x\varphi_x + t\varphi_x = \sum_{n \geq 1} (np_n(x) - xp'_n(x) + p'_{n-1}(x))t^n.$$

注意到

$$t\varphi_t - x\varphi_x + t\varphi_x = [t(x-t) - xt + t^2]\varphi^3 = 0.$$

所以 $np_n(x) - xp'_n(x) + p'_{n-1}(x) = 0, n \geq 1$ .

再证明(3).

$$(t\varphi + t^2\varphi_t) - \varphi_x + tx\varphi_x = \sum_{n \geq 1} (np_{n-1}(x) - p'_n(x) + xp'_{n-1}(x))t^n.$$

注意到

$$(t\varphi + t^2\varphi_t) - \varphi_x + tx\varphi_x = t\varphi + [t^2(x-t) - t + t^2x]\varphi^3 = t\varphi - t[1 - 2xt + t^2]\varphi^3 = 0.$$

所以 $np_{n-1}(x) - p'_n(x) + xp'_{n-1}(x), n \geq 1$ .

最后证明(4).

$$\begin{aligned}\frac{\varphi_x}{t} - t\varphi_x - (2t\varphi_t + \varphi) &= p'_1(x) - p_0(x) + \sum_{n \geq 1} (p'_{n+1}(x) - p'_{n-1}(x) - (2n+1)p_n(x))t^n \\ &= \sum_{n \geq 1} (p'_{n+1}(x) - p'_{n-1}(x) - (2n+1)p_n(x))t^n.\end{aligned}$$

注意到

$$\frac{\varphi_x}{t} - t\varphi_x - (2t\varphi_t + \varphi) = -\varphi + [1 - t^2 - 2t(x-t)]\varphi^3 = \varphi + \varphi = 0.$$

所以 $p'_{n+1}(x) - p'_{n-1}(x) = (2n+1)p_n(x)$ .

例子10.  $m, n \geq 0$  正整数, 求积分

$$\int_0^1 x^m p_n(x) dx.$$

解. 我们先处理两种简单情形。

$$n = 0 \text{ 时候, 化为 } \int_0^1 x^m p_0(x) dx = \int_0^1 x^m dx = \frac{1}{m+1}.$$

$m = 0, n \geq 1$  的时候,

$$\int_0^1 p_n(x) dx = \frac{1}{2n+1} \int_0^1 p'_{n+1}(x) - p'_{n-1}(x) dx = \frac{-p_{n+1}(0) + p_{n-1}(0)}{2n+1}.$$

特别地, 当  $n$  为非零偶数的时候为0。

当  $m, n \geq 1$  的时候,

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^m p_n(x) dx &= \frac{1}{n} \int_0^1 x^m (x p'_n(x) - p'_{n-1}(x)) dx \\ &= \frac{1}{n} \left( (x^{m+1} p_n(x) - x^m p_{n-1}(x)) \Big|_0^1 - \int_0^1 (m+1)x^m p_n(x) - m x^{m-1} p_{n-1}(x) dx \right) \\ &= \frac{1}{n} \left( - \int_0^1 (m+1)x^m p_n(x) - m x^{m-1} p_{n-1}(x) dx \right). \end{aligned}$$

整理得

$$\int_0^1 x^m p_n(x) dx = \frac{m}{m+n+1} \int_0^1 x^{m-1} p_{n-1}(x) dx.$$

$(m, n) \rightarrow (m-1, n-1)$  重复上述过程最终可以化成简单情形。而且容易看出把积分区域换成  $[-1, 0]$  或者  $[-1, 1]$ , 这种流程依然成立。例如

$$\int_{-1}^1 p_4(x) x^4 dx = \frac{4}{9} \int_{-1}^1 p_3(x) x^3 dx = \frac{4}{21} \int_{-1}^1 p_2(x) x^2 dx = \frac{8}{105} \int_{-1}^1 p_1(x) x^1 dx = \frac{8}{315} \int_{-1}^1 p_0(x) x^0 dx = \frac{16}{315}.$$

### 0.5.2 勒让德傅里叶展开

在处理勒让德固有值问题的时候, 我们需要求

$$\int_{-1}^1 p_n^2(x) dx.$$

为此, 我们将母函数平方后从  $-1$  到  $1$  做积分。

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{1-2xt+t^2} dx = \sum_n \sum_m \int_{-1}^1 p_n(x) p_m(x) t^{m+n} dx.$$

左边原函数  $\frac{\ln(1-2xt+t^2)}{-2t}$ , 所以

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{1-2xt+t^2} dx = \frac{\ln(1-2xt+t^2)}{-2t} \Big|_{-1}^1 = \frac{\ln(1+t) - \ln(1-t)}{t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} t^{2n}.$$

右边由SL 理论, 当  $m \neq n$  的时候  $\int_{-1}^1 p_n(x) p_m(x) dx = 0$ 。所以右边等于

$$\sum_n \left( \int_{-1}^1 p_n^2(x) dx \right) t^{2n}.$$



对照得

$$\int_{-1}^1 p_n^2(x) dx = \frac{2}{2n+1}.$$

例子11. 求积分

$$\int_{-1}^1 p_4(x)(1+x+2x^2+3x^3+4x^4) dx.$$

解. 可以将  $1+x+2x^2+3x^3+4x^4$  展开为

$$1+x+2x^2+3x^3+4x^4 = C_0p_0 + C_1p_1 + C_2p_2 + C_3p_3 + C_4p_4.$$

我们只需要关心  $C_4$ , 因为

$$p_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3).$$

所以  $C_4 = \frac{32}{35}$ . 所以

$$\int_{-1}^1 p_4(x)(1+x+2x^2+3x^3+4x^4) dx = \frac{32}{35} \int_{-1}^1 p_4^2(x) dx = \frac{32}{35} \times \frac{2}{9} = \frac{64}{315}.$$

至此, 由SL理论, 任何  $(-1, 1)$  上得连续有界函数都可以用勒让德多项式展开.

例子12. 将

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -1 < x < \alpha \\ 1/2 & x = \alpha \\ 1 & \alpha < x < 1. \end{cases}$$

按勒让德多项式展开.

解.

$$\int_{-1}^1 f(x)p_0(x) dx = \int_{\alpha}^1 p_0(x) dx = 1 - \alpha.$$

当  $n \geq 1$ ,

$$\int_{-1}^1 f(x)p_n(x) dx = \frac{1}{2n+1} \int_{\alpha}^1 p_n(x) dx = \frac{1}{2n+1} \int_{\alpha}^1 p'_{n+1}(x) - p'_{n-1}(x) dx = \frac{p_{n-1}(\alpha) - p_{n+1}(\alpha)}{2n+1}.$$

所以

$$f(x) = \frac{1-\alpha}{2} p_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_{n-1}(\alpha) - p_{n+1}(\alpha)}{2} p_n(x).$$

现在我们可以处理上节的半球问题.

例子13.

$$\begin{cases} \Delta u = 0, 0 \leq r \leq a, \theta \in [-\pi, \pi] \\ u|_{r=R} = \cos^2(\theta), \theta \in [-\pi, 0] \\ u|_{r=R} = -\cos^2(\theta), \theta \in [0, \pi]. \end{cases}$$

解. 由前面的讨论可知, 定解问题的解可以表示为

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{-n-1}) p_n(\cos \theta).$$

因为  $|u(0, \theta)| < \infty$ , 所以  $B_n = 0$ . 所以

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n p_n(\cos \theta).$$

令  $r = R$  得

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n R^n p_n(\cos \theta) = \begin{cases} \cos^2(\theta), \theta \in [-\pi, 0] \\ -\cos^2(\theta), \theta \in [0, \pi]. \end{cases}$$

即

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n R^n p_n(x) = f(x) = \begin{cases} x^2, x \in [0, 1] \\ -x^2, x \in [-1, 0]. \end{cases}$$

我们将  $f(x)$  按勒让德多项式分解

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n p_n(x).$$

其中

$$C_n = \frac{\langle f(x), p_n(x) \rangle}{\langle p_n(x), p_n(x) \rangle}.$$

注意到  $f(x)$  为奇函数, 所以当  $n$  为偶数得时候,

$$\langle f(x), p_n(x) \rangle = \int_{-1}^1 f(x) p_n(x) dx = 0.$$

当  $n$  为奇数得时候, 如果  $n = 1$

$$\langle f(x), p_1(x) \rangle = \int_{-1}^1 f(x) p_1(x) dx = 2 \int_0^1 x^2 p_1(x) dx = \int_0^1 x p_0(x) dx = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}.$$

当  $n$  为奇数且  $n \geq 3$  时

$$\begin{aligned} \langle f(x), p_n(x) \rangle &= \int_{-1}^1 f(x) p_n(x) dx \\ &= 2 \int_0^1 x^2 p_n(x) dx = \frac{4}{n+3} \int_0^1 x p_{n-1}(x) dx = \frac{4}{(n+3)(n+1)} \int_0^1 p_{n-2}(x) dx \\ &= \frac{4(p_{n-3}(0) - p_{n-1}(0))}{(n+3)(n+1)(2n-3)}. \end{aligned}$$

所以

$$u = \frac{r}{2R} p_1(\cos \theta) + \sum_{n \text{ 为奇数}, n \geq 3} \frac{4(p_{n-3}(0) - p_{n-1}(0))}{(n+3)(n+1)(2n-3)} \left(\frac{r}{R}\right)^n p_n(\cos \theta).$$

**例子14.** 一个半径为  $a$  的空心金属球壳内部有一个点电荷  $4\pi\epsilon_0 q$  ( $\epsilon_0$  是真空介电常数), 它与球心的距离为  $b$ , 求球内电势分布。

解. 假设点电荷处于 $z$ 正轴上, 则由轴对称性, 电势与 $\varphi$ 无关。我们可以把电势分成两部分, 一部分是由点电荷产生的电势为

$$\varphi_1(x, y, z) = \frac{q}{\rho(x, y, z)}$$

其中

$$\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - b)^2} = \sqrt{r^2 \sin^2 \theta + (r \cos \theta - b)^2} = \sqrt{r^2 - 2br \cos \theta + b^2}.$$

另一部分是由球壳上的感应电荷产生的电势, 满足

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & x^2 + y^2 + z^2 < a^2 \\ u|_{r=a} = -\frac{q}{\sqrt{a^2 \sin^2 \theta + (a \cos \theta - b)^2}} \end{cases}$$

上述定解问题的解可以表示为

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{-n-1}) p_n(\cos \theta).$$

球壳上的感应电荷在球心的电势有界, 所以 $B_n = 0$ 。所以

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n p_n(\cos \theta).$$

我们将边界电势按勒让德多项式进行分解

$$-\frac{q}{\sqrt{a^2 \sin^2 \theta + (a \cos \theta - b)^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n p_n(\cos \theta).$$

其中

$$C_n = \frac{2n+1}{2} \times \int_0^\pi -\frac{q}{\sqrt{a^2 \sin^2 \theta + (a \cos \theta - b)^2}} p_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta = -\frac{(2n+1)q}{2a} \int_{-1}^1 \frac{p_n(x)}{\sqrt{1 + (\frac{b}{a})^2 - 2\frac{b}{a}x}} dx.$$

由母函数公式

$$\int_{-1}^1 \frac{p_n(x)}{\sqrt{1 + (\frac{b}{a})^2 - 2\frac{b}{a}x}} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{-1}^1 p_n(x) p_k(x) (\frac{b}{a})^k dx = (\frac{b}{a})^n \times \frac{2}{2n+1}.$$

所以,

$$C_n = -\frac{b^n q}{a^{n+1}} = A_n a^n \Rightarrow A_n = -\frac{b^n q}{a^{2n+1}}.$$

所以

$$u = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n q}{a^{2n+1}} r^n p_n(\cos \theta) = -\frac{q}{a} \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{br}{a^2})^n p_n(\cos \theta).$$

再次用母函数公式。

$$u = -\frac{q}{a} \times \frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{br}{a^2} \cos \theta + (\frac{br}{a^2})^2}} = -\frac{q}{\sqrt{a^2 - 2br \cos \theta + (\frac{br}{a})^2}}.$$

所以电势

$$\varphi = \varphi_1 + u = \frac{q}{\sqrt{r^2 - 2br \cos \theta + b^2}} - \frac{q}{\sqrt{a^2 - 2br \cos \theta + (\frac{br}{a})^2}}$$