2021 年理论力学 022392.06 期中试题

潘海俊老师

2021 年 11 月 21 日 2:30-4:30

有部分魔改

一

（1）对矢量 $\vec{A}=\frac{1}{2}\vec{B}\times\vec{r}$ 和 $\vec{A}'=(B_2x_3,B_3x_1,B_3x_2)$，求证它们是 $\vec{B}$ 的矢量势

（2）找出满足 $\vec{A}'=\vec{A}+\nabla\psi$ 的一个规范函数 ψ

二

对势函数

$$U(x)=D(e^{-2\alpha x}-2e^{-\alpha x})$$

$D>0,\alpha>0$

（1）画出 $U(x)$ 的示意图

（2）分别对具有总能量 $E>0,E=0,E<0$ 的质量为 m 的物块在此势场的运动的情况讨论，求出速度场和相轨迹

（3）求在此势场中，在 $x=0$ 附近的质量 m 的物块微振动的周期

三

考虑泛函

$$I[x(t)]=\int_1^2\frac{\dot{x}^2}{6t^2}\mathrm{d}t$$

并且 $x(1)=1$，$x(2)=0$

（1）求满足题意的驻值路径 $x(t)$

（2）求在此路径下 $I[x]$ 的值

（3）该路径为最大路径还是最小路径？请证明

四

如图所示，在光滑的细杆上串着质量为 M 的物块，下面悬挂着光滑铰链连接的长度分别为 l_1 和 l_2 的刚性细杆和质量分别为 m_1 和 m_2 的小球，假设 $M=2m_1=2m_2$ 并且 $l_1=l_2=l$，利用 θ_1,θ_2（均为小量）：

（1）写出系统的拉格朗日函数

（2）求简正频率和相对应的简正模

（3）当 $\theta_1=0$，令 $\theta_2=\epsilon$ 偏移一个小角度，松手后求各物块的加速度

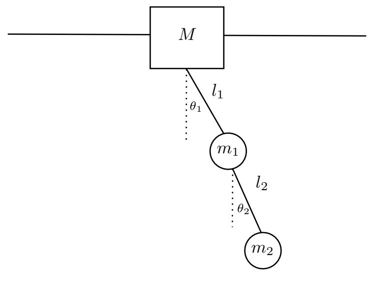

图 1

五

如图所示，光滑滑轮连接了质量分别为 $4m, 3m, m$ 的物体，从初始静止后松手 $4m$ 移动的相对位移为 x，m 的为 y

（1）写出整个系统的拉格朗日函数

（2）利用诺特定理，确定一个变换及其对应的运动常数

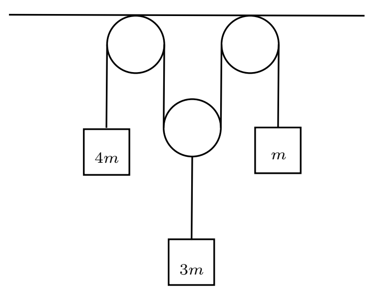

图 2

六

两根刚杆用光滑铰链连结如图所示，上杆长 l_1，质量为 m_1，下杆长 l_2，质量为 m_2，在下杆的下端施加不变的水平力 F

（1）试求平衡时两杆各自同竖直线的夹角 θ_1 和 θ_2

（2）利用拉格朗日乘数法求解刚杆与天花板的连结铰链对刚杆的力

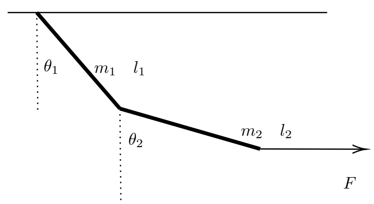

图 3

2022 年理论力学 022392.06 期末试题

潘海俊老师

2022 年 1 月 15 日 14:30-16:40

有部分魔改

一

一维谐振子的哈密顿量为

$$H(q,p)=\frac{1}{2}(p^2+\omega^2q^2)$$

如果选第一类生成函数（母函数）

$$F_1(q,Q)=\frac{1}{2}\omega q^2\cot(2\pi Q)$$

（1）写出与母函数 F_1 对应的正则变换

（2）写出新的哈密顿量 $K(Q,P)$

（3）根据新哈密顿量求解 $q(t)$ 和 $p(t)$

二

已知对某三维体系的粒子

$$H=\frac{\vec{p}^2}{2m}+\frac{1}{2}k\vec{r}^2$$

力学量

$$G=\sum_{i,j\in\{1,2,3\}}\frac{1}{2}A_{ij}p_ip_j+\frac{1}{2}B_{ij}x_ix_j+C_{ij}x_ip_j$$

是运动常数，并且 A,B 均为对称矩阵

（1）求 A,B,C 矩阵满足的条件

（2）G 可以看作多个独立的二次型守恒量的线性组合，求出独立守恒量的个数

三

某单自由度体系的哈密顿量为

$$H=\frac{p^2}{2}+\frac{1}{q}$$

设

$$q|_{t=0} = 1$$

$$p|_{t=0} = 0$$

（1）写出该系统的哈密顿方程

（2）试利用哈密顿雅可比方法求解 $q(t)$

四

对某在 x 轴上一维运动的质量为 m 的粒子，求出其哈密顿函数，哈密顿矢量场，和画出其典型相轨道

（1）受力为 $F_x = -kx^3 \quad (k>0)$

（2）受力为 $F_x = kx \quad (k>0)$

五

对某体系

$$\dot{q} = p \quad \dot{p} = -2(q+p)$$

（1）判断 (q,p) 是否为哈密顿体系

（2）如果在变换

$$Q = qe^t \quad P = (q+p)e^t$$

下，是否 (Q,P) 为哈密顿体系

（3）假设在初始 $t=0$ 时，(Q,P) 的相平面上布满了足够多的相点，在时间 $t=\tau>0$ 的演化下，求位于相曲线内部的相点构成的面积 S

（4）将 (Q,P) 对应到 (q,p) 的相平面上，求 $t=0$ 和 $t=\tau>0$ 演化下位于相曲线内部的相点构成的面积 S_0 和 S_τ

六

对某质量分布均匀为 m，长宽为 a，$\sqrt{2}a$ 的薄板，可以沿着几何中心光滑转动，初始时刻在 x_1, x_3 平面内与 x_1 轴成 30° 的部位有初始角速度 Ω

（1）求薄板沿各个方向的主转动惯量

（2）求初始角动量同初始角速度的夹角

（3）求沿 x_2 轴方向的角速度 $\omega_2(t)$

（4）当时间趋于无限时，薄板的角速度会趋于恒定值，求出此角速度

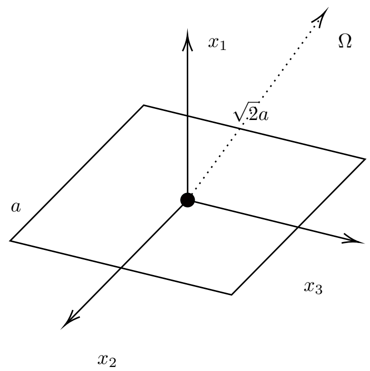

图 4