12.3.1 Weierstrass 逼近定理和 Parseval 定理

定理 1 (Weierstrass 三角多项式逼近定理) 设 $f \in C[-\pi,\pi]$ 且满足 $f(-\pi)=f(\pi)$. 则 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可用三角多项式一致逼近.

证明 因为 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 连续, 且 $f(-\pi)=f(\pi)$, 所以 $f(x)$ 可以延拓成 $(-\infty,+\infty)$ 上以 2π 为周期的连续函数. 根据 Fejér 定理, $f(x)$ 的 Fourier 级数部分和的均值 $\sigma_n(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛于 $f(x)$. 由于

$$\sigma_n(x)=\frac{S_0(x)+S_1(x)+\cdots+S_{n-1}(x)}{n}$$

是一个 $n-1$ 次三角多项式. 因此 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上, 特别是在 $[-\pi,\pi]$ 上可用三角多项式一致逼近. 证毕

由三角多项式形式的逼近定理, 还可以推出代数多项式形式的逼近定理.

定理 2 (Weierstrass **多项式逼近定理**) 设 $f \in \mathrm{C}[a,b]$. 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可用代数多项式一致逼近.

证明 只需考虑 $[a,b]=[-1,1]$ 的情形. 此时 $f \in \mathrm{C}[-1,1]$. 令

$$g(x) = f(\cos x).$$

则 $g(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 连续, 且 $g(-\pi)=g(\pi)$. 根据 Fejér 定理,

$$\sigma_n(x) \to g(x), \quad (\text{在 } x \in [-\pi,\pi] \text{ 上一致}).$$

这里 $\sigma_n(x)$ 是 $g(x)$ 的 Fourier 级数的部分和的均值. 于是任意 $\varepsilon > 0$, 存在 n 使得

$$\max_{x\in[-\pi,\pi]} |\sigma_n(x) - g(x)| < \varepsilon. \tag{12.1}$$

由于 $g(x)$ 是偶函数, 其 Fourier 级数是余弦级数. 注意到 $\cos kx$ 可表示为

$\cos x$ 的 k 次多项式, 比如 $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, . 故, $\sigma_n(x)$ 可表为

$$\sigma_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \cos^k x,$$

c_k 都是常数. 现在令

$$P_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k t^k,$$

这是一个 $n-1$ 次代数多项式. 由 (12.1), 得

$$\max_{x\in[-\pi,\pi]} |P_n(\cos x) - f(\cos x)| < \varepsilon.$$

这等价于

$$\max_{t\in[-1,1]} |P_n(t) - f(t)| < \varepsilon.$$

这就说明 $f(x)$ 可用代数多项式在 $[-1, 1]$ 上一致逼近. 证毕

例 1 设 a_n, b_n 是 $f(x)$ 的 Fourier 系数, 则 f 的 Fejér 算子 (即, Fourier 级数前 n 项和的均值) 可表为

$$\sigma_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{n-1}\left(1 - \frac{j}{n}\right)(a_j \cos jx + b_j \sin jx). \tag{12.2}$$

证明 由定义

$$\begin{aligned}
\sigma_n(x) &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(x) = \frac{1}{n}\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} S_k(x)\right) \\
&= \frac{1}{n}\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{k}(a_j \cos jx + b_j \sin jx)\right)\right] \\
&= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{k}(a_j \cos jx + b_j \sin jx)
\end{aligned}$$

交换求和号, 可得

$$
\begin{aligned}
\sigma_n(x) &= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=j}^{n-1}(a_j\cos jx + b_j\sin jx) \\
&= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1}(n-j)(a_j\cos jx + b_j\sin jx) \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{n-1}\left(1-\frac{j}{n}\right)(a_j\cos jx + b_j\sin jx)
\end{aligned}
$$

利用以上结果和三角函数的正交性, 可得下面的推论.

推论 1 设 a_n, b_n 是 $f(x)$ 的 Fourier 系数, $\sigma_n(x)$ 是 $f(x)$ Fejér 算子. 则有

$$
\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sigma_n^2(x)\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{j=1}^{n-1}\left(1-\frac{j}{n}\right)^2(a_j^2+b_j^2).
$$

定理 3 (Parseval 定理) 若 $f(x)$ 是周期为 2π 的连续函数, 则其 Fourier 系数 a_n, b_n 满足

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx.$$

证明 由 Fejér 定理和前面的例子和推论, 只需证明

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\left(2-\frac{k}{n}\right)\left(a_k^2+b_k^2\right)=0.$$

由于 a_n, b_n 是 $f(x)$ 的 Fourier 系数, 故, 根据 Bessel 不等式, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$ 收敛, 因而

$$A_k:=\sum_{j=k}^{\infty}(a_j^2+b_j^2)\to 0,\ (k\to\infty).$$

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\left(2-\frac{k}{n}\right)\left(a_k^2+b_k^2\right) \leqslant 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\left(a_k^2+b_k^2\right)$$

$$= \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} k\left(a_k^2+b_k^2\right) = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k}\left(a_k^2+b_k^2\right)$$

$$= \frac{2}{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=j}^{n}\left(a_k^2+b_k^2\right) \leqslant \frac{2}{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=j}^{\infty}\left(a_k^2+b_k^2\right)$$

$$= \frac{2}{n} \sum_{j=1}^{n} A_j \rightarrow 0\ (n \rightarrow \infty).$$

于是

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\left(2-\frac{k}{n}\right)\left(a_k^2+b_k^2\right) = 0.$$

定理 4 若 $f(x)$ 是在 $[-\pi,\pi]$ 上可积且平方可积的函数, 则其 Fourier 系数 a_n, b_n 满足

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx.$$

证明 我们只证明 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上 Riemann 可积的情况. 因此 f 是有界的: $m \leqslant f(x) \leqslant M$. 同时改变 f 在一点的值不影响可积性以及通过积分计算 f 的 Fourier 系数, 因此假设 $f(-\pi)=f(\pi)$.

因为 Riemann 可积, 所以对任意正数 ε, 存在 $[-\pi,\ \pi]$ 一个分割,

$$T:\ -\pi=x_0<\cdots<x_k=\pi$$

使得

$$\sum_{i=1}^{k}\omega_i\Delta x_i<\frac{\varepsilon^2}{4\Omega},$$

其中 $\omega_i=M_i-m_i$ 是 f 在小区间 $[x_{i-1},\ x_i]$ 上的振幅, $\Omega=M-m$ 是 f 在

整个区间 $[-\pi, \pi]$ 上的振幅. 用折线连接 $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ 和 $(x_i, f(x_i))$ 两点并记折线所构成的函数为 $g(x)$, 该函数是连续的, 满足 $g(-\pi) = g(\pi)$, 而且在 $x \in [x_{i-1}, x_i]$ 上, f 与 g 满足

$$m_i \leqslant f(x) \leqslant M_i, \quad m_i \leqslant g(x) \leqslant M_i.$$

所以

$$|f(x) - g(x)| \leqslant \omega_i, \; x \in [x_{i-1}, x_i]$$

于是

$$\begin{aligned}\|g-f\|^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} |g(x) - f(x)|^2 \, dx = \Omega \sum_{i=1}^{k} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |g(x) - f(x)| \, dx \\ &\leqslant \Omega \sum_{i=1}^{k} \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon^2}{4}.\end{aligned}$$

故,

$$\|g - f\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

注意到函数 $g(x)$ 是 $[-\pi, \pi]$ 上逐段光滑的连续函数, 并满足 $g(-\pi) = g(\pi)$, 因此周期延拓后仍然是逐段光滑的连续函数. 根据 Dirichlet 定理, $g(x)$ 的 Fourier 级数在 $[-\pi, \pi]$ 上一致收敛于 $g(x)$, 也就是存在一个正整数 N, 当 $n > N$ 时, $g(x)$ 的 Fourier 级数的前 n 项部分和, 记为 $T_n(x)$, 满足

$$|g(x) - T_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}}, \quad x \in [-\pi, \ \pi]$$

所以

$$\|g - T_n\|^2 < \frac{\varepsilon^2}{4}.$$

即,

$$\|g - T_n\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

于是

$$\|f - T_n\| \leqslant \|f - g\| + \|g - T_n\| < \varepsilon.$$

根据 Bessel 不等式, 对所有的 n 次三角多项式,唯有 f 的 Fourier 级数的部分

和 $S_n(x)$ 与 $f(x)$ 距离最小, 所以当 $n > N$ 时有

$$\|f - S_n\| \leqslant \|f - T_n\| < \varepsilon.$$

即

$$\lim_{n\to\infty} \|f - S_n\| = 0$$

这样我们对 $[-\pi, \pi]$ 上 Riemann 可积的函数 $f(x)$,证明了它的 Fourier 级数平方平均收敛于 $f(x)$, 因此 Parseval 等式成立.

例 2 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的连续函数. 令

$$F(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(x+t)\,dt,$$

用 a_n, b_n 和 A_n, B_n 分别表示 f 和 F 的 Fourier 系数. 证明:

$$A_0 = a_0^2,\ A_n = a_n^2 + b_n^2,\ B_n = 0.$$

由此推出 f 的 Parseval 等式.

证明 因为 f 是周期为 2π 的连续函数, 所以 $F(x)$ 也是周期为 2π 的连续函数.

$$\begin{aligned} F(-x) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(-x+t)\,dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-x-\pi}^{-x+\pi} f(x+u)f(u)\,du && (u = -x+t) \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)f(u)\,du && (\text{被积函数以 } 2\pi \text{ 为周期}) \\ &= F(x). \end{aligned}$$

所以 $F(x)$ 是偶函数. 故, $B_n = 0$.

$$\begin{aligned}
A_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\cos nx\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(x+t)\,dt\right)\cos nx\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\cos nx\,dx\right)dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi+t}^{\pi+t} f(u)\cos n(u-t)\,du\right)dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,(a_n\cos nt + b_n\sin nt)\,dt \\
&= \begin{cases} a_n^2 + b_n^2, & n \geqslant 1 \\ a_0^2, & n = 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

令

$$g(x) = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)\cos nx.$$

因为上式右端的级数在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛, 所以 $g(x)$ 是周期为 2π 的连续函数. $g(x)$ 与 $F(x)$ 有相同的 Fourier 系数. 故, $g(x)=F(x)$, 即,

$$F(x)=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\cos nx,\ \ x\in(-\infty,+\infty).$$

在此式中取 $x=0$, 得

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=F(0)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(t)\,dt,$$

即, f 的 Parseval 等式成立.