日期:　　/

9.1

9.1.1 平面点集

1. 距离 ρ. 邻域 $B(M,r)$、$B_-(M,r)$

2. 内点、外点、边界点

余集 E^c、核 E^o、开集、闭集

3. 孤立点、聚点

开(闭)区域、区域

4. 连通，即为道路连通

单/多连通

9.1.3 极限

1. 证明有无极限

5. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$ 无极限　　说明按不同方式取极限不一样

9.1.4 连续

当 $(x,y)\to(0,0)$ 时　$xy\to0$

$u=xy$　$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \Rightarrow \lim\limits_{xy\to0}$

1.4. 复合和换元　P_{59}　$T_{9.1.6}$

2. 介值定理（在证明中有用）

习题：T19 综合运用了连续、极限知识，好题

日期: /

练习

例: 1. 证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^4+y^2}=0$

$\left|\frac{x^2y^2}{x^4+y^2}\right| < \frac{1}{2}|y| \xrightarrow[y\to 0]{x\to 0} 0$

2. 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}} (x^2+y^2)^{x^2y^2}$

$I=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}} e^{\ln(x^2+y^2)x^2y^2} = e^{\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \ln(x^2+y^2)x^2y^2}$

换元
$x=r\cos\theta$
$y=r\sin\theta$
也行

而 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}} \ln(x^2+y^2)x^2y^2 = \lim \underbrace{(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)}_{0} \cdot \underbrace{\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}}_{0}$

复合运算

$\Rightarrow I=e^0=1$.

9.2 多变量函数微分

9.2.1 偏导

1. f_x'. f_y' 的定义+几何意义

2. S. 定理 9.12 $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$

9.2.2 可微

1. 定理 9.14 可微 → 连续
可微 → 偏导存在
且 $df(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$

前提: f_x'. f_y' 存在

2. 定理 9.15 有界 ⇒ 连续 证明技巧好

连续 ⇒ 可微

f_x'. f_y' 是判断 $f(x,y)$ 性质的利器

日期:　　/

9.2.3 方向导数与梯度

1. 方向导数定义　$\frac{\partial f}{\partial e}$

2. 若可微 $\Rightarrow$ $\frac{\partial f}{\partial e} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta$　①

为什么?

引出

3. 梯度　$\mathrm{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j$

得到

4. $\frac{\partial f}{\partial e} = \mathrm{grad} f \cdot \vec{e}$　　$\vec{e} = (\cos\alpha, \cos\beta)$

$= |\mathrm{grad} f| \cdot \cos\theta \leftarrow$ 夹角　②　　两种运算方法

9.2.4 复合

1. 定理9.18　s.

2. $u = f(\xi, \zeta) = f(\xi(x,y), \zeta(x,y)) = u(x,y)$

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \zeta} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial x}$　　$\frac{\partial u}{\partial y}$ - -

$du = d\,u(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$

$du = d\,u(\xi, \zeta) = \frac{\partial u}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial u}{\partial \zeta} d\zeta$

3. Laplace 方程　$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$　(了解)

4. P78下半　有关自然坐标系的推导。(力学)

简单明了

5. Jacobi 矩阵　$\frac{\partial(\xi, \zeta)}{\partial(x,y)} = \frac{\partial(\xi, \zeta)}{\partial(u,v)} \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$　链式法则　(了解)

例: $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ a & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

(i) 判别$\frac{\partial f}{\partial x}$、$\frac{\partial f}{\partial y}$在(0,0)的存在性　敛证

(ii) $a=0$ 时, 计算 $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$

(iii) 判别$f(x,y)$在(0,0)点的可微性

(i) (ii) 略

(iii). 若 可微 ⇒ 连续　⇐ 定理的运用

而$f(x,y)$在(0,0)不连续 ×

∴不可微

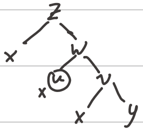
难度较大，做不了可看解答

很好的题，可以了解这类题的核心

例: 已知变换 $x=u$, $y=\frac{u}{1+uv}$　$z=\frac{u}{1+uw}$

将下列方程变换成 $w=w(u,v)$ 的方程

$$x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=z^2$$



注意变量之间的关系

x.y.z → u.v.w　应考虑 x.y.z 而不是 u.v.w

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{1+xw}\right)$$

$$=\frac{1+xw-x\left(w+x\left(\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial u}\right)\right)}{(1+xw)^2}\qquad v=\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\qquad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{x^2}$$

$$=\frac{1}{(1+xw)^2}\left(1-\frac{\partial w}{\partial v}-x^2\frac{\partial w}{\partial u}\right)=\frac{1}{(1+uw)^2}\left(1-\frac{\partial w}{\partial v}-u^2\frac{\partial w}{\partial u}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{1+xw}\right)=-\frac{x}{(1+xw)^2}\cdot x\frac{\partial w}{\partial v}\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right)$$

$$=\frac{x^2/y^2}{(1+xw)^2}\cdot\frac{\partial w}{\partial v}=\frac{(1+uv)^2}{(1+uw)^2}\frac{\partial w}{\partial v}$$

代入. $\frac{1}{(1+uw)^2}x^2\left(1-\frac{\partial w}{\partial v}-u^2\frac{\partial w}{\partial u}\right)+y^2\frac{(1+uv)^2}{(1+uw)^2}\frac{\partial w}{\partial v}=z^2$

$$z^2\left(1-\frac{\partial w}{\partial v}-u^2\frac{\partial w}{\partial u}\right)+z^2\frac{\partial w}{\partial v}=z^2$$

$$\Rightarrow\quad z^2-z^2u^2\frac{\partial w}{\partial u}=z^2$$

$$\therefore\ \frac{\partial w}{\partial u}=0$$

日期:　　　/

9.3 隐函数

1. 定理9.20 证明看一下

2. 分析总结 P88-89　1.2.3.

3. 从微分角度看隐函数定理

4. 逆映射的隐函数定理

整体来说较为简单，做题时想清楚 什么时候求导 什么时候微分

9.4 空间曲线与曲面

1. P98 看弧长求法

2. 弄清推倒曲率的步骤(了解)

$$\begin{cases} K = \dfrac{|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)|}{|\vec{r}'(t)|^3} \\ K = \dfrac{x'(t)\, y''(t) - x''(t)\, y'(t)}{[x'^2(t) + y'^2(t)]^{3/2}} \quad (x = x(t)\quad y = y(t)) \\ K = \dfrac{f''(x)}{(1+f'^2(x))^{3/2}} \end{cases}$$

感觉没啥

9.5 Taylor

1. $\varphi(t) = f(x+th,\ y+tk)$　$t \in [0,1]$　极好的一种转换方式

求Taylor

2. Taylor 展开到 n阶　具体含义　$R_n = o(\rho^n)$

3. 极值、最值、驻点　☆看 $AC-B^2$ 法证明

边界　总体的总结一下

日期:　　/

第10章

10.1 二重积分

计巧：1.交换积分限，做题时想清先对x还是对y

2.分部积分

10.2 二重换元

1. $(x,y)\to(u,v)$ $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv$

2. $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (why?)

作业T4.5.6.7 都很不错

10.3 三重积分

1. 定理10.9 可积 ⇒ 有界

连续 ⇒ 可积

有界+不连续少 ⇒ 可积

☆2、切面 & 切条

利用做过的题目总结一下什么时候用什么方法好

通常换元用切面，硬解用切条

积分限复杂用切条，有高度对称性用切面

日期:　　/

3. 换元　$(x,y,z)\to(u,v,w)$　$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|dudvdw$

4. 思考+解题步骤(个人见解)

① 对称性考虑　为0 or 合并 ← 不要忘记乘倍数

② 切片 or 切面

③ 换元 or 不～ ?

④ (若③)　写出换元后区域限(如 $r: 0\to2$　$\theta: 0\to\frac{\pi}{2}$　$\varphi: 0\to\frac{\pi}{4}$)

⑤ 开积. 这里要乘上①中的倍数

5、$\int_{-R}^{R}dx\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}(x^2+y^2)\,dz$

$=\iiint_V(x^2+y^2)\,dV\quad=\frac{4}{15}\pi R^5$

$V:\ \{x^2+y^2+z^2\le R^2\quad z\ge0\}$　在转化的时候仔细一点不要弄错了

第十章总的来说就是算. 找到自己的完美步骤做题就错不了

日期:　　/

第八章

8.1

☆ 例：(1) $\forall \vec{c}$, $\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c} \Rightarrow \vec{a}=\vec{b}$　　(1) $(\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{c}=0$ ✓

(2) $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$

(2) 可用几何，硬算做，这里用(1)

只需证对 $\forall \vec{d}$, $((\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c})\cdot\vec{d}=(\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{d}$　混合积运算 ✓

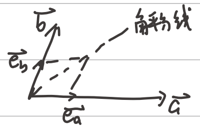
这是挺好的一个思路

混合积

例：$A_i(x_i,y_i,z_i)$　$i=1,2,3$　求 $S_{A_1A_2A_3}$

$S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}\right|$

例：已知 $\vec{a}=(-2,-1,2)$, $\vec{b}=(7,-4,-4)$ $|\vec{c}|=6\sqrt{6}$, 求沿 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 夹角平分线的向量 $\vec{c}$



$\vec{e_a}=(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3})$　$\vec{e_b}=(\frac{7}{9},-\frac{4}{9},\frac{4}{9})$

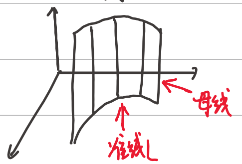
$\vec{e_a}+\vec{e_b}=(\frac{1}{9},-\frac{7}{9},\frac{2}{9})$

$\Rightarrow \vec{e_c}=\pm\frac{1}{3\sqrt{6}}\cdot(1,-7,2)$　$\Rightarrow \vec{c}=|\vec{c}|\vec{e_c}$

细节

8.2　不停叉乘

8.3 二次曲面



日期: /

1. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 椭圆柱面
2. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 双曲柱面
3. $y^2=2px\ (p>0)$ 抛物柱面

$\}$ 柱面

4. 旋转曲面 $\begin{cases} f(x,z)=0 \\ y=0 \end{cases}$ 绕z ⇒ $f(\sqrt{x^2+y^2}, z)=0$

这节要难

只会在这里

5. 椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$
6. 单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$
7. 双叶 〃 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$
8. 二次锥面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$
9. 椭圆抛物面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$
10. 双曲抛物面 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$,

☆ 8.3 作业 T_4

8.4 坐标变换.

1. 如何把交叉项(xy项)约掉?

转α $(x,y) \Rightarrow (x',y')$

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases}$$

通常取 $\alpha=\frac{\pi}{4}$

日期: /

第十一章

11.1 略

11.2 $|\vec{r_u}' \times \vec{r_v}'| \begin{cases} ① \left\| \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_u' & y_u' & z_u' \\ x_v' & y_v' & z_v' \end{vmatrix} \right\| \\ ② \sqrt{EG-F^2} \Leftarrow \text{通常好算一点。} \end{cases}$

步骤: 1. 曲面s参数化 $ds=\sqrt{*}\,du\,dv$

2. 找出(u,v)变化范围D

3. 各种复合代入积分

两道把对称性拉满的题:

例: 计算 $I_1=\int_L x^2 ds$ $\quad I_2=\int_L xy\,ds$ $\quad L:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2\\ x+y+z=0\end{cases}$

对称性. $I_1=\frac{1}{3}\int_L(x^2+y^2+z^2)ds=\frac{1}{3}\int_L a^2 ds=\frac{1}{3}a^2 l=\frac{1}{3}a^2\cdot 2\pi a=\frac{2\pi}{3}a^3$

$I_2=\frac{1}{3}\int_L(xy+yz+zx)ds=\frac{1}{6}\int_L(x+y+z)^2ds-\frac{1}{6}\int_L(x^2+y^2+z^2)ds=-\frac{1}{6}a^2 l=-\frac{1}{6}a^2\cdot 2\pi a=-\frac{\pi}{3}a^3$

例: $I=\iint_S(ax+by+cz+t)^2 ds$ $\quad S: x^2+y^2+z^2=R^2$

由对称性 $\iint_S xy\,ds=0 \quad yz=0 \quad zx=0$

$\iint_S x\,ds=\iint_S y\,ds=\iint_S z\,ds=0$

$\Rightarrow I=\iint_S(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+t^2)ds=\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\iint_S x^2ds+t^2\iint_S 1\,ds$ ✓

日期:　　　/

日期: /